Ромашкевич Александр Иосифович
Пенсионер, инвалид, окончил МИФИ в 1964г., последнее место работы МИЭТ, старший преподаватель кафедры общей физики.

Снова о гармонических колебаниях

В статье рассмотрены несколько задач из «олимпиадного архива». Рассмотрены различные подходы к решению задач на гармонические колебания. Показано, что негармоническое движение с уменьшением амплитуды колебаний в ряде случаев приближается к гармоническому закону. Статья будет полезна абитуриентам технических вузов и школьникам, готовящимся к олимпиадам по физике.

Напомним привычный нас вид уравнения гармонического движения материальной точки по оси X около нуля:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Здесь x – координата точки, $\ddot{x}$ – её вторая производная по времени.

Точно так же может колебаться и твёрдое тело, если оно движется поступательно. Просто все его точки движутся одинаково. В этом уравнении ω – циклическая частота, связанная с периодом колебаний T соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Решение дифференциального уравнения более общего вида

$$A\ddot{x} + Bx + C = 0$$

тоже описывает изменение координаты x по гармоническому закону (A, B, C – постоянные), в чём легко убедиться. Сделаем замену переменной:

$$x = u - \frac{C}{B}.$$

С учётом того, что $\ddot{x} = \ddot{u}$, приходим к уравнению:

$$A\ddot{u} + Bu = 0,$$

и далее, заменяя $\omega^2 = \dfrac{B}{A}$, получаем:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0,$$

$$u = A\sin(\omega t + \varphi),$$

а решение исходного уравнения

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) - \frac{C}{B}.$$

Дополнительное слагаемое в решении имеет простой физический смысл. Когда материальная точка проходит положение равновесия, её ускорение $\ddot{x}$ равно нулю. Остаётся

$$Bx + C = 0,$$

откуда

$$x = x_0 = -\frac{C}{B},$$

где x_0 – координата положения равновесия материальной точки.

Разумеется, всё сказанное выше будет относиться к любой физической величине, меняющейся по гармоническому закону.

Чаще всего в задачах на гармонические колебания надо найти период или частоту колебаний.

Разберём подходы к решению таких задач на примере бусинки, скользящей по нити.

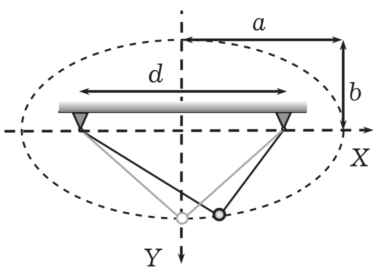

Рис. 1

Задача 1. По лёгкой шёлковой нити длиной l может скользить без трения бусинка. Концы нити закреплены в двух точках, находящихся на одном уровне. Расстояние между точкам крепления d $(d < l)$. Определить период малых колебаний бусинки в вертикальной плоскости, проходящей через точки крепления.

Решение. Сумма расстояний от бусинки до точек крепления (длина нити) неизменна. Это означает, что траектория движения бусинки укладывается на участок эллипса, большая (a) и малая (b) полуоси которого

$$a = \frac{l}{2},\ b = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - d^2}.$$

Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

При смещении бусинки из положения равновесия вправо на величину x координата y становится равной

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

и бусинка приподнимается над положением равновесия на высоту

$$h = b - b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Если принять потенциальную энергию бусинки в положении равновесия равной нулю, то её потенциальная энергия при смещении по горизонтали на величину x будет равна

$$\Pi = mgh = mgb\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right).$$

В системе действуют только консервативные силы, что позволяет найти силу F_x, действующую на бусинку вдоль оси x:

$$F_x = -\frac{d\Pi}{dx} = -mgb\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)' =$$

$$= mgb\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{2x}{a^2}\right).$$

Считая малый участок эллипса вблизи положения равновесия близким к горизонтальному, а отклонения x бусинки от положения равновесия настолько малыми, что

$$\frac{x^2}{a^2} << 1,$$

приходим к закону движения:

$$m\ddot{x} \approx -\frac{mgb}{a^2}x,$$

$$\ddot{x} + \frac{gb}{a^2}x \approx 0.$$

Таким образом, малое отклонение бусинки от положения равновесия приводит к гармоническим колебаниям:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{gb}{a^2}},\ T \approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2}{gb}}.$$

Заменив размеры полуосей эллипса a и b данными условия задачи, получаем

$$T \approx \pi l\sqrt{\frac{2}{g}}(l^2 - d^2)^{-\frac{1}{4}}.$$

Ответ. $T \approx \pi l\sqrt{\frac{2}{g}}(l^2 - d^2)^{-\frac{1}{4}}$.

Если читателя слегка напугало это решение, подойдём к задаче по-другому.

Будем априори считать колебания бусинки гармоническими.

Можно получить результат, приравнивая максимальные потенциальную и кинетическую энергии бусинки.

Упростим выражение для потенциальной энергии с помощью приближения

$$\sqrt{1-\alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad \text{при} \quad \alpha << 1.$$

$$\Pi = mgh = mgb\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}\right) =$$

$$= mgb\left(1 - 1 + \frac{x_0^2}{2a^2}\right) = \frac{mgb}{2a^2}x_0^2, \quad (1)$$

где x_0 – амплитудное отклонение бусинки.

Максимальная кинетическая энергия бусинки

$$K = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}\omega^2 x_0^2. \quad (2)$$

По умолчанию предполагается, что читатель знает: амплитуда скорости связана с амплитудным отклонением формулой

$$v_0 = \omega x_0.$$

Приравнивая выражения (1) и (2), приходим к прежнему результату:

$$\frac{mgb}{2a^2}x_0^2 = \frac{m}{2}\omega^2 x_0^2, \quad \omega^2 = \frac{gb}{a^2}.$$

Наконец, если и это решение не понравилось, можно поступить просто, если сказать прямо: колебания бусинки напоминают математический маятник, в качестве длины которого нужно взять радиус кривизны эллипса в нижней точке.

Заглядываем в учебник математики и находим нужную формулу:

$$R = \frac{a^2}{b}.$$

Подставляя сюда $a = \frac{l}{2}$ и $b = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - d^2}$, получаем

$$R = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - d^2}}.$$

Осталось вставить R в формулу математического маятника:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{2g\sqrt{l^2 - d^2}}} =$$

$$= \pi l\sqrt{\frac{2}{g}}\left(l^2 - d^2\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

Получился тот же результат. Доказывать, что колебания будут гармоническими, здесь не нужно, т. к. это было сделано при выводе формулы математического маятника.

Но разобраться в первых двух вариантах решения стоит. Пригодится.

Задача 2. Закрытый горизонтально расположенный цилиндр разделён на две равные половины (камеры) легко скользящим поршнем. Длина газового столба в каждой половине $l = 50$ см (рис. 2). Когда цилиндр поставили вертикально, поршень опустился на $d = 6{,}5$ см (рис. 3). Считая температуру постоянной, найти период малых колебаний поршня при вертикальном положении цилиндра, если его вывести из положения равновесия.

Рис. 2

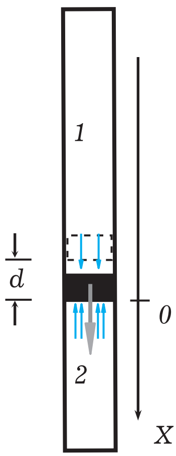

Рис 3

Решение. При вертикальном положении цилиндра равновесный размер нижней камеры $l-d$, а верхней $l+d$.

Согласно закону Бойля – Мариотта

$$p_0 l = p_1(l+d) = p'_2(l+d+x),$$

$$p_0 l = p_2(l-d) = p'_1(l-d-x).$$

Здесь p_0 – давление в камерах при горизонтальном положении цилиндра, p_1 и p_2 – равновесные давления в камерах при вертикальном положении цилиндра, p'_1 и p'_2 – давления в камерах при смещении поршня вниз на расстояние x.

Сечение цилиндра S, входящее сомножителем во все члены уравнений, сокращено.

Закон движения поршня при отклонении от положения равновесия в проекции на ось X:

$$m\ddot{x} = p'_1 S - p'_2 S + mg,$$

$$\ddot{x} + \frac{S}{m}(p'_2 - p'_1) - g = 0,$$

$$\ddot{x} + \frac{Sp_0 l}{m}\left(\frac{1}{l-d-x} - \frac{1}{l+d+x}\right) - g = 0.$$

Пока это не похоже на уравнение гармонических колебаний. Но не будем терять надежды.

Дробь $\dfrac{1}{A+x}$ при $x << A$ можно преобразовать с достаточным приближением:

$$\frac{1}{A+x}\cdot\frac{A-x}{A-x} = \frac{A-x}{A^2-x^2} \approx \frac{A-x}{A^2},$$

пренебрегая величиной второго порядка малости.

Если смещение поршня из положения равновесия достаточно мало ($x << l-d,\ x << l+d$), то

$$\ddot{x} + \frac{Sp_0 l}{m}\left(\frac{l-d+x}{(l-d)^2} - \frac{l+d-x}{(l+d)^2}\right) - g \approx 0,$$

$$\ddot{x} + \frac{Sp_0 l}{m}\left(\frac{1}{(l-d)^2} + \frac{1}{(l+d)^2}\right)x +$$

$$+\frac{Sp_0 l}{m}\left(\frac{1}{l-d} - \frac{1}{l+d}\right) - g \approx 0.$$

А это уже уравнение гармонических колебаний.

Из условия равновесия поршня можно выразить его массу:

$$p_2S = p_1S + mg,$$

$$m = \frac{S}{g}\left(p_2 - p_1\right) = \frac{S}{g}\left(\frac{p_0 l}{l-d} - \frac{p_0 l}{l+d}\right) = $$

$$= \frac{Sp_0 l}{g}\frac{2d}{l^2 - d^2}.$$

Подставляя массу во второе слагаемое (постоянные члены уравнения нас не интересуют), находим:

$$\ddot{x} + \frac{Sp_0 l}{Sp_0 l}\frac{g\left(l^2 - d^2\right)}{2d} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{(l-d)^2} + \frac{1}{(l+d)^2}\right)x + const \approx 0,$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{2d}\left(l^2 - d^2\right)\left(\frac{2l^2 + 2d^2}{\left(l^2 - d^2\right)^2}\right)x + const \approx 0,$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{d}\cdot\frac{l^2 + d^2}{l^2 - d^2}x + const \approx 0.$$

И, наконец:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{l^2 + d^2}{l^2 - d^2}}\sqrt{\frac{g}{d}},\ \ T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l^2 - d^2}{l^2 + d^2}}\sqrt{\frac{d}{g}}.$$

Произведём вычисления:

$$T \approx 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}5^2 - 0{,}065^2}{0{,}5^2 + 0{,}065^2}}\sqrt{\frac{0{,}065}{9{,}8}} \approx 0{,}5(\text{с}).$$

Ответ. $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l^2 - d^2}{l^2 + d^2}}\sqrt{\frac{d}{g}} \approx 0{,}5(\text{с})$

Задача 3. На гладком горизонтальном столе расположены два бруска, скреплённые невесомой пружиной. Бруски раздвигают так, чтобы пружина несколько растянулась. Затем первый брусок отпускают, придерживая второй. Брусок начинает колебаться с периодом T_1. Если придерживать первый брусок, отпустив второй, то период колебаний становится равным T_2. Каким будет период колебаний системы, если оба бруска отпустить одновременно?

Решение. Формула периода колебаний бруска, скреплённого с неподвижным предметом (стенкой) невесомой горизонтальной пружиной, на гладкой горизонтальной поверхности $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ была получена при решении одной из первых задач на гармонические колебания.

Найдём соотношение масс брусков:

$$\frac{T_1}{T_2} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} : 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}},$$

здесь k – коэффициент жёсткости пружины. Отсюда $\frac{m_1}{m_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$.

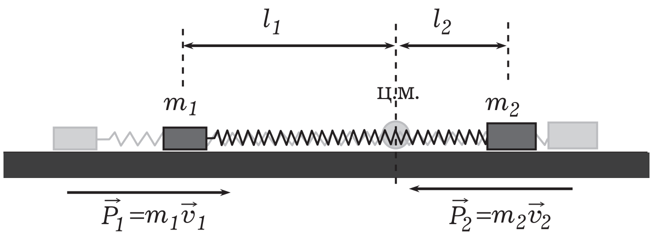

Рис. 4

Когда бруски отпускают одновременно, по закону сохранения импульс системы остаётся постоянным и равным нулю (начальный импульс системы – ноль).

Это означает, что центр масс системы и совпадающая с ним точка пружины неподвижны, а импульсы брусков равны и противоположно направлены в любой момент времени.

Ничего не изменится, если точку пружины, совпадающую с центром масс, закрепить. Но тогда бруски будут колебаться с периодами

$$T'_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \quad \text{и} \quad T'_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}},$$

где k_1 и k_2 – коэффициенты жёсткости более коротких пружин (l_1, l_2), на которые делит пружину центр масс. Пусть недеформированная пружина имеет длину l. На её концах находятся массы m_1 и m_2. Не отвлекаясь на задачу о нахождении центра масс, напишем сразу (рис. 4):

$$l_1 = l\frac{m_2}{m_1 + m_2}, \; l_2 = l\frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Мы посчитали, что расстояние между центрами тяжести брусков и длина пружины одинаковы, что, вообще говоря, справедливо, если считать бруски материальными точками. Но если предложить конструкцию бруска, показанного на рис. 5 в разрезе, то место крепления пружины практически совпадёт с центром тяжести бруска, и задача становится более корректной. Такие вещи часто

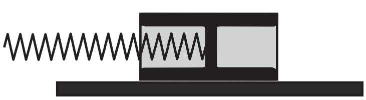

Рис. 5

предполагаются «по умолчанию», чтобы не перегружать условие задачи.

Коэффициент жёсткости пружины обратно пропорционален её длине. Поясним это утверждение.

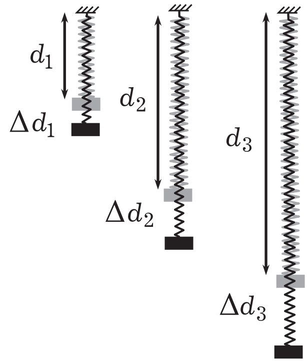

Рис. 6

Возьмём достаточно длинную спираль и нарежем из неё несколько пружин различной длины $d_1, d_2, d_3, \ldots$ Подвесим на них одинаковые грузы mg (рис. 6).

Пружины растянутся:

$$k_1\Delta d_1 = mg,$$
$$k_2\Delta d_2 = mg,$$
$$k_3\Delta d_3 = mg,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Из условия равновесия следует, что натяжение любой пружины в любом месте одно и то же (mg). А это значит, что одинаковые по длине фрагменты пружин растянуты одинаково.

Пусть растяжение единицы длины пружины под действием силы mg равно α. Тогда пружина длиной d (в недеформированном состоянии) растянется на величину $\Delta d = d\alpha$:

$$k_1 d_1 \alpha = mg,$$
$$k_2 d_2 \alpha = mg,$$

$$k_3 d_3 \alpha = mg,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k_1 d_1 = k_2 d_2 = k_3 d_3 = \frac{mg}{\alpha}.$$

Для пружин, нарезанных из одной спирали, $kd = const$, что и означает обратно пропорциональную зависимость коэффициента жёсткости от длины пружины:

$$k = \frac{const}{d}.$$

Возвращемся к задаче:

$$k_1 l_1 = kl \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = k\frac{l}{l_1} = k\frac{m_1 + m_2}{m_2} = k\left(\frac{T_1^2}{T_2^2} + 1\right).$$

$$k_2 l_2 = kl \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_2 = k\frac{l}{l_2} = k\frac{m_1 + m_2}{m_1} = k\left(1 + \frac{T_2^2}{T_1^2}\right).$$

Теперь можно найти периоды колебаний обоих брусков.

$$T'_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}\frac{T_2^2}{(T_1^2 + T_2^2)}} =$$

$$= \frac{T_1 T_2}{\sqrt{\left(T_1^2 + T_2^2\right)}},$$

$$T'_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}\frac{T_1^2}{(T_1^2 + T_2^2)}} =$$

$$= \frac{T_1 T_2}{\sqrt{\left(T_1^2 + T_2^2\right)}}.$$

Получился один и тот же результат, что и следовало ожидать. Это и есть период колебаний системы.

Ответ. $T = \dfrac{T_1 T_2}{\sqrt{\left(T_1^2 + T_2^2\right)}}.$

А «на закуску» разберём ещё одну задачу, которую предлагали на одной из олимпиад высокого уровня.

Задача 4. Четыре невесомых стержня одинаковой длины l соединены шарнирно в плоский четырёхугольник (всегда ромб). Фигуру подвешивают за один из шарниров.

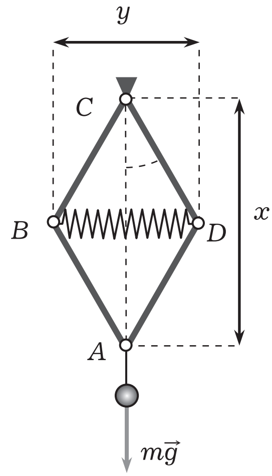

Рис. 7

К противоположному шарниру жёстко прикрепляют груз, а между оставшимися вершинами ромба в распор вставляют невесомую пружину (рис. 7). В недеформированном состоянии длина пружины равна $1{,}5l$, в положении равновесия системы её длина равна l. Найти период малых колебаний груза.

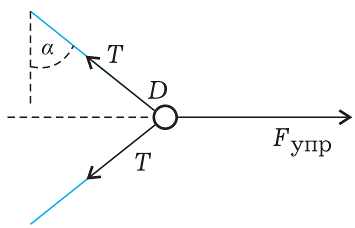

Рис. 8

Решение. Обозначим вертикальную диагональ ромба через x, а горизонтальную через y.

Закон Ньютона для невесомого

шарнира D (или B) в проекции на горизонтальное направление даёт (рис. 8):

$$k(1,5l-y)-2T\sin\alpha=0.$$

Здесь T – натяжение стержня.

Соответственно, по закону Ньютона для груза m в проекции на вертикальное направление (вниз)

$$m\ddot{x}=-2T\cos\alpha+mg.$$

Исключая из этих уравнений T, получаем:

$$m\ddot{x}=-k\left(1,5l-y\right)\operatorname{ctg}\alpha+mg.$$

Используя очевидные соотношения $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{x}{y}$ и $x^2+y^2=4l^2$, избавимся сначала от $\operatorname{ctg}\alpha$, а затем и от y.

$$m\ddot{x}=-k\left(1,5l-\sqrt{4l^2-x^2}\right)\frac{x}{\sqrt{4l^2-x^2}}+mg,$$

$$m\ddot{x}=-k\left(\frac{1,5lx}{\sqrt{4l^2-x^2}}-x\right)+mg.$$

Мы пришли к уравнению движения нижнего шарнира, а значит, и жёстко связанного с ним груза. Вообще говоря, движение не будет гармоническим. Но, может быть, при малых отклонениях от положения равновесия уравнение приведётся к желаемому виду $A\ddot{x}+Bx+C=0$?

Для ответа на этот вопрос надо ввести в уравнение величину u – отклонение от положения равновесия. Согласно условию, в положении равновесия треугольники ABD и BCD правильные ($BD=l$). Это значит, что угол α между стержнем CD и вертикалью равен 30°. Легко находим вертикальную диагональ ромба x_0 в положении равновесия: $x_0=l\sqrt{3}$.

Произведём замену: $x=l\sqrt{3}+u$.

$$m\ddot{u}=-k\left\{\frac{1,5l(l\sqrt{3}+u)}{\sqrt{4l^2-(l\sqrt{3}+u)^2}}-(l\sqrt{3}+u)\right\}+mg.$$

Упростим выражение в фигурных скобках. Сначала займёмся знаменателем дроби:

$$\sqrt{4l^2-(l\sqrt{3}+u)^2}=$$

$$=\sqrt{4l^2-3l^2-2\sqrt{3}lu-u^2}\approx\sqrt{l^2-2\sqrt{3}lu}.$$

Мы пренебрегли членом u^2 как величиной второго порядка малости. Напоминаем, что u – отклонение груза от положения равновесия. Сделаем это отклонение настолько малым, чтобы $2\sqrt{3}lu<<l^2$. Тогда можно воспользоваться приблизительным соотношением

$$\sqrt{A^2-\alpha}\approx A-\frac{\alpha}{2A}.$$

$$\sqrt{l^2-2\sqrt{3}lu}\approx l-\sqrt{3}u.$$

Теперь преобразуем дробь:

$$\frac{1,5l(l\sqrt{3}+u)}{l-\sqrt{3}u}=\frac{1,5l(\sqrt{3}l+u)(l+\sqrt{3}u)}{(l-\sqrt{3}u)(l+\sqrt{3}u)}=$$

$$=\frac{1,5l(\sqrt{3}l^2+lu+3lu+\sqrt{3}u^2)}{l^2-3u^2}\approx$$

$$\approx\frac{1,5l(\sqrt{3}l^2+4lu)}{l^2}=1,5\sqrt{3}l+6u.$$

Мы снова отбросили члены второго порядка малости.

Возвращаемся к уравнению движения:

$$m\ddot{u}\approx-1,5\sqrt{3}kl-6ku+\sqrt{3}kl+ku+mg,$$

$$m\ddot{u}+5ku+(\frac{1}{2}\sqrt{3}kl-mg)\approx 0.$$

А это уже уравнение гармонических колебаний. Осталось найти массу груза из условия равновесия и подставить в полученное уравнение.

В первых двух равенствах

$$k(1,5l - y) - 2T\sin\alpha = 0,$$
$$m\ddot{x} = -2T\cos\alpha + mg.$$

При равновесии

$$y = l,\ \ \ddot{x} = 0,\ \ \alpha = 30^0.$$
$$2T\cdot\frac{1}{2} = k(1,5l - l),$$

откуда:

$$2T\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = mg,$$
$$m = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{kl}{g}.$$

После подстановки уравнение движения груза принимает вид:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{kl}{g}\ddot{u} + 5ku \approx 0.$$
$$\ddot{u} + \left(\frac{10g}{\sqrt{3}l}\right)u \approx 0.$$

Итак, малые колебания системы можно считать гармоническими с циклической частотой

$$\omega \approx \sqrt{\frac{10g}{\sqrt{3}l}}\ \text{ и периодом }\ T \approx 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{3}l}{10g}}.$$

Ответ. $T \approx 2\pi\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}l}{10g}}$.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Осторов Романтики

От Арктики до Антарктики
Люди весь мир прошли.
И только остров Романтики
На карты не нанесли.

А он существует, заметьте-ка,
Там есть и луна и горы,
Но нет ни единого скептика
И ни одного резонёра.

Ни шёпота обывателей,
Ни скуки и ни тоски.
Живут там одни мечтатели,
Влюбленные и чудаки.

Там есть голубые утёсы
И всех ветров голоса,
Белые альбатросы
И алые паруса.

***

От Арктики до Антарктики
Люди весь мир прошли,
И только остров Романтики
На карты не нанесли.

Но, право, грустить не надо
О картах. Всё дело в том,
Что остров тот вечно рядом –
Он в сердце живёт твоём!

Э. Асадов