Заяц Алексей Евгеньевич
Кандидат физико-математических наук,
учитель физики МАОУ «Лицей №131», г. Казань

Сколько изображений даёт пара плоских зеркал?

В настоящей работе решена задача о нахождении числа изображений, которые дают два плоских полубесконечных зеркала. Показано, что только в редких случаях, когда величина угла между зеркалами является делителем 180°, количество изображений не зависит от положения источника света. Обсуждается степень корректности и условия применимости формул для количества изображений, встречающихся в различных методических пособиях.

1. Введение

Вопрос, вынесенный в заголовок настоящей статьи, кажется, на первый взгляд, безобидным и «стандартным». Это впечатление ещё более усилится, если набрать подобный запрос в любой поисковой системе. Множество сайтов, как на русском, так и на иностранных языках, предложат ответ, с длинными объяснениями, иллюстрациями и формулами. Этот же вопрос можно встретить, в том или ином виде, и в целом ряде школьных пособий по физике [1, 2, 3, 4, 5].

Что же тогда заставило автора взяться за написание данной статьи? То, что практически во всех известных источниках ответ на вопрос, сколько же всего изображений точечного источника дают два плоских полубесконечных зеркала, ошибочен! А благодаря сети Интернет, этот ошибочный результат распространился практически повсюду и выдаётся за истинный.

Обычно можно встретить следующее (повторюсь, ошибочное!) рассуждение: 1) возьмём два плоских полубесконечных зеркала, образующих двугранный угол θ, и поместим между ними точечный источник света; 2) рассмотрим, для простоты, углы между зеркалами вида $\theta = 360^\circ / k$, где k – натуральное число, большее единицы; 3) если

$k=2$, то $\theta=180^\circ$, и система зеркал даёт единственное изображение; 4) если же $k=4$, то $\theta=90^\circ$, и, как хорошо известно, изображений предмета будет три; 5) обобщая полученные результаты на остальные значения k, приходим к выводу, что два зеркала, образующие угол $\theta=360^\circ/k$, дают $k-1$ изображение. В подтверждение сказанному обычно приводят также примеры $\theta=60^\circ$ и $\theta=45^\circ$, для которых будет пять и семь изображений соответственно.

Что же здесь не так? Первое, что бросается в глаза, – отсутствие случая, где k – дробное число. Он либо полностью игнорируется, либо выписывается некая формула «из общих соображений», например, $N=[360^\circ/\theta]-1$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Второе - логическая «дыра» в самом рассуждении, которая видна невооружённым глазом: в рассмотренных примерах число k всегда берётся чётным! Это неспроста, поскольку, как будет показано ниже, только при чётном k количество изображений в зеркалах **не зависит** от положения самого источника! В остальных случаях, в зависимости от того, где расположен источник света, число изображений будет меняться. В частности, это будет происходить, когда $\theta=360^\circ/3=120^\circ$, $\theta=360^\circ/5=72^\circ$ и т. п. Именно этот факт делает ошибочной «общую формулу» количества изображений вида $N=360^\circ/\theta-1$, даже для случая $\theta=360^\circ/k$.

Приведём один пример. Пусть угол между зеркалами равен $\theta=120^\circ$. Так как $120^\circ=360^\circ/3$, согласно этому подходу, зеркала должны давать $3-1=2$ изображения. Однако можно продемонстрировать, что это не так (см. рис. 1). Лучи идущие от источника S, отражающиеся однократно от каждого из зеркал, формируют те самые два изображения. Но есть ещё лучи, которые сначала отражаются от горизонтального зеркала, а потом от наклонного, формируя ещё одно, третье, «неучтённое» формулой изображение.

Справедливости ради, стоит отметить, что не всё так ужасно, и есть несколько примеров правильного подхода к означенной проблеме. Во-первых, в задачниках Буховцева [1] и Замятнина [2] в условии соответствующей задачи присутствует оговорка, что источник света находится на равном расстоянии от обоих зеркал. Это добавление сразу делает ответ однозначным, а решение, приведённое в книге, верным. Во-вторых, в сборнике задач Московских городских олимпиад [6] приведена задача на данную тему с подробным верным решением (№4.12 о количестве изображений в случае $\theta=80^\circ$). В-третьих, в книге Дж. Уокера «Физический фейерверк» [7] даётся прямая ссылка на статью американского физика Чая [8] с подробным разбором нашего вопроса. В настоящей статье мы будем, в целом, придерживаться методов, изложенных в [8], но с некоторыми добавлениями и дополнительными примерами. Помимо этого, мы получим, наконец, правильную формулу, определяющую количество изображений в общем случае (формула (11)).

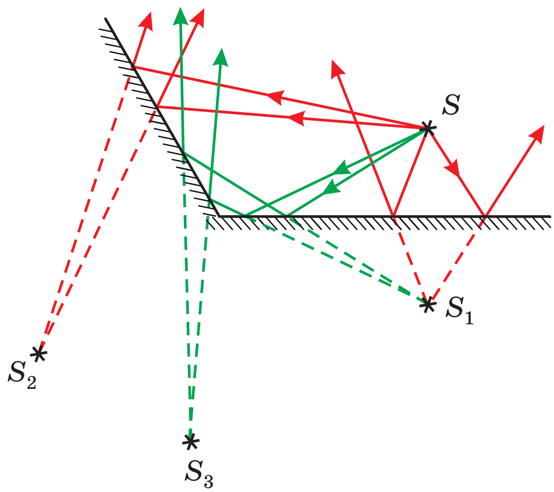


Рис. 1. Пример построения изображений в паре зеркал, образующих угол $\theta = 120^\circ$, демонстрирующий, что количество изображений отличается от задаваемого формулой $N = 360^\circ/\theta - 1$. Изображения S_1 и S_2 формируются лучами, испытавшими одно отражение (выделены красным цветом). Изображение S_3 является результатом двойного отражения (соответствующие лучи выделены зелёным). Из построения видно, что S_3 представляет собой отражение S_1 в наклонном зеркале.

2. Методика определения числа изображений

2.1. Принципы определения положения источника и изображений

Положение точки в рассматриваемой системе, как и любой точки в трёхмерном пространстве, должно описываться с помощью трёх параметров, например (рис. 2):

- расстояния r от точки S до ребра двугранного угла между зеркалами γ и γ';
- расстояния h от точки S до некоторой плоскости σ, перпендикулярной обоим зеркалам;
- угла φ между плоскостью, содержащей ребро двугранного угла и точку S, и некоторой другой плоскостью β, тоже проходящей через это ребро.

Однако такое количество параметров является избыточным в нашей задаче. Действительно, из законов отражения следует, что, во-первых, предмет и его изображения лежат в плоскости, перпендикулярной обоим зеркалам, а, во-вторых, расстояния от предмета и от его изображения до ребра двугранного угла, образованного зеркалами, будут одинаковыми (рис. 3). Таким образом, источник света и все его возможные изображения располагаются на окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной зеркалам, центр которой находится на ребре угла, образованного ими.

Получается, что из трёх перечисленных параметров первые два, из-за бесконечности зеркал, могут быть выбраны произвольным образом, причём для всех точек набора «источник-изображения» они остаются неизменными. Существенным является только третий параметр – угол φ. Поэтому, для удобства дальнейшего изложения, мы будем рассматривать только плоскость, в которой лежат источник и все изображения. Это позволит нам использовать более простую терминологию из планиметрии, а зеркала представлять в виде плоского угла с вершиной в точке O, образованного двумя лучами, OM и OM'. Угол φ, следуя [8], мы будем отсчитывать от биссектрисы угла $\angle MOM'$, традиционно считая, что $\varphi > 0$, если угол отсчитывается против часовой стрелки, и $\varphi < 0$, если направление противоположное. Например, точкам, лежащим на зеркале OM, соответствует значение $\varphi_M = \theta/2$, а лежащим на втором зеркале OM' – значение $\varphi_{M'} = -\theta/2$ ($\theta = \angle MOM'$).

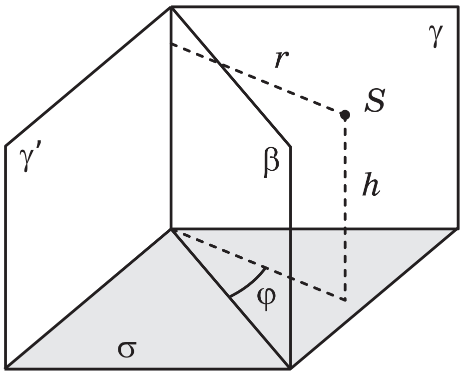


Рис. 2

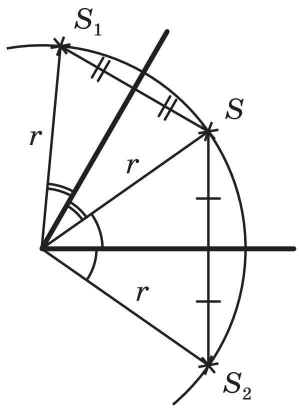


Рис. 3

2.2. Последовательности изображений

Определившись с базовыми принципами, перейдём к методике нахождения положения изображений. Пусть источник света S располагается в точке с $\varphi_S = \alpha$ ($|\alpha| < \theta/2$). Обозначим P_1 его отражение в зеркале OM, а Q_1 – отражение в зеркале OM' (см. рис. 4). Прямая OM делит отрезок SP_1 пополам, поэтому луч OM является биссектрисой $\angle SOP_1$, а угол $\theta/2$ будет средним арифметическим угла φ_{P_1} (определяющего положение точки P_1) и угла α

$$\frac{\varphi_{P_1} + \alpha}{2} = \frac{\theta}{2}.$$

Отсюда следует, что $\varphi_{P_1} = \theta - \alpha$. Рассуждая тем же образом, но с заменой $\theta \to -\theta$, получим, что точка Q_1 соответствует углу $\varphi_{Q_1} = -(\theta + \alpha)$.

Помимо изображений P_1 и Q_1, в нашей системе зеркал могут существовать изображения P_2 и Q_2, формируемые лучами, отразившимися сначала от зеркала OM, затем от OM' (или наоборот), а также P_3 и Q_3 (после трёхкратного отражения), P_4 и Q_4 (после четырёхкратного отражения) и т. д. (рис. 4). Изображение P_2 получается отражением изображения P_1 в зеркале OM', изображение Q_2 – отражением Q_1 в зеркале OM, изображение P_3 – отражением P_2 в зеркале OM, а изображение Q_3 – отражением Q_2 в зеркале OM'. По мере необходимости эти последовательности (обозначим их $\{P\}$ и $\{Q\}$ соответственно) можно продолжить, каждый раз меняя зеркало, относительно которого происходит отражение.

Оставив пока в стороне вопрос о том, до каких пор это нужно делать, определим положение всех этих изображений (если они существуют). Каждая следующая точка P_n последовательности $\{P\}$ получается отражением предыдущей точки P_{n-1} от соответствующего зеркала (при чётном n это OM', при нечётном – OM). Поэтому

$$\frac{\varphi_{P_n}+\varphi_{P_{n-1}}}{2}=(-1)^{n-1}\frac{\theta}{2}.$$

Из этой формулы и формулы для φ_{P_1} вытекает, что

$$\varphi_{P_2}=-(2\theta-\alpha),\ \varphi_{P_3}=3\theta-\alpha,\ \varphi_{P_4}=-(4\theta-\alpha),\ldots,$$

$$\varphi_{P_n}=(-1)^{n-1}(n\theta-\alpha). \qquad (1)$$

Поступая аналогично для последовательности $\{Q\}$, получаем

$$\varphi_{Q_2}=2\theta+\alpha,\ \varphi_{Q_3}=-(3\theta+\alpha),\ \varphi_{Q_4}=4\theta+\alpha,\ldots,$$

$$\varphi_{Q_n}=(-1)^{n}(n\theta+\alpha). \qquad (2)$$

(напомним, что надо просто сделать замену $\theta\to-\theta$).

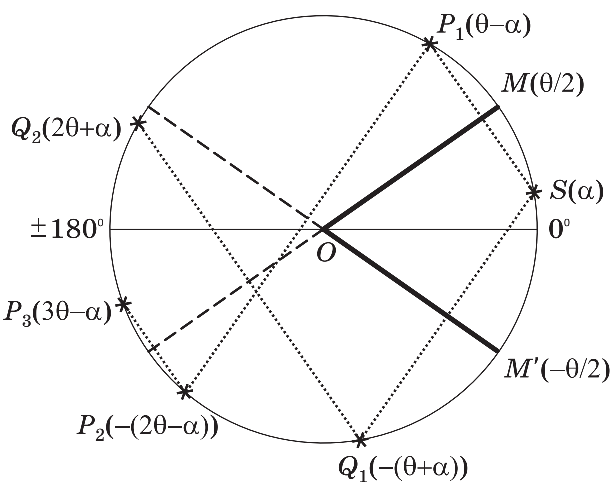


Рис. 4. Пример расположения источника и его изображений в паре плоских зеркал OM и OM'. Для всех точек, кроме O, в скобках указаны соответствующие значения координаты φ. Положение изображений, образующих последовательность $\{P\}$, задаётся формулой (1), а изображений из последовательности $\{Q\}$ – формулой (2). Отметим, что количество членов в обеих последовательностях изображений не обязано совпадать. Например, на этом рисунке последовательность $\{P\}$ имеет три члена, а последовательность $\{Q\}$ – только два.

2.3. Обрыв последовательностей изображений $\{P\}$ и $\{Q\}$

Как же узнать, до каких пор можно продолжать каждую из приведённых последовательностей? Ответ на этот вопрос вытекает из того факта, что изображения в зеркале формируются продолжениями лучей, отражённых от его поверхности. Если после очередного отражения лучи идут так, что ни один из них не может попасть на другое зеркало, новых изображений в данной системе зеркал не появится (см. например, рис. 5). Для последовательности изображений $\{P\}$ или $\{Q\}$, введённых выше, это значит, что последний член этой последовательности должен быть расположен так, чтобы все лучи, исходящие от него, не могли попасть на «лицевую» поверхность обоих зеркал. Геометрически это значит, что это изображение находится в области, ограниченной лучами ON и ON', являющими продолжениями OM и OM' соответственно. Эта «мёртвая» зона на рис. 5 выделена красным цветом. Точкам, лежащим на лучах ON и ON', соответствуют значения[1] углов $\varphi_N = \pm 180^\circ + \theta/2$ и $\varphi_{N'} = \pm 180^\circ - \theta/2$. Если изображение, скажем, P_n попадает в такую зону, это значит, что

$$180^\circ - \frac{\theta}{2} \le \left|\varphi_{P_n}\right| < 180^\circ + \frac{\theta}{2} \qquad (3)$$

Нестрогое неравенство в данном условии возникает из-за того, что при попадании изображения на ближайшую к началу отсчёта границу «мёртвой» зоны, его отражение в зеркале будет совпадать с ним самим. А это, фактически, означает, что нового изображения в последовательности не будет. Независимое попадание на дальнюю границу $\left|\varphi_{P_n}\right| = 180^\circ + \theta/2$ невозможно, так как величина $\left|\varphi_{P_n}\right|$, согласно формуле (1), растёт с шагом, равным θ.

Наконец, осталось ответить на один важный вопрос: могут ли изображения из разных последовательностей оказаться в одной точке?

Теоретически, да. Но в этом случае такое «двойное» изображение должно находиться в зоне за обоими зеркалами (в «мёртвой» зоне) и, следовательно, быть последним членом обеих последовательностей.

Упражнение 1. Докажите это

Подытожим всё, сказанное выше:

1. Множество всех изображений, которое даёт система двух плоских зеркал, можно разбить на две последовательности, $\{P\}$ и $\{Q\}$, каждый следующий член которой получается отражением предыдущего.

2. Последовательность изображений обрывается тогда, когда её член попадает в область за обоими зеркалами.

3. Для того чтобы найти общее количество изображений в системе двух плоских зеркал, нужно определить общее число членов обеих последовательностей с учётом возможного совпадения их последних членов.

[1] Выбор знака в этих формулах определяется тем, в какую сторону (по часовой стрелке или против) мы отсчитываем требуемый угол.

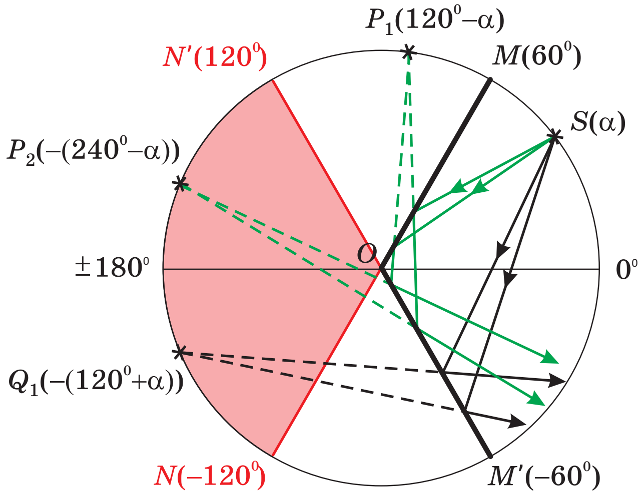


Рис. 5. Пример, иллюстрирующий появление «мёртвой» зоны (выделена красным цветом), для частного случая, когда зеркала образуют угол $\theta = 120^\circ$. Лучи, продолжения которых сходятся в точках P_2 и Q_1, не могут больше попасть ни на одно из зеркал. В результате, P_2 и Q_1 являются последними членами своих последовательностей.

2.4. Математическое отступление: целая часть числа

Для дальнейшего изложения нам понадобятся свойства функции $y = [x]$, называемой целой частью числа x. Согласно определению, $[x]$ является наибольшим целым числом, меньшим или равным x. Так, к примеру,

$$[2] = 2, [-1] = -1, [3{,}14] = 3, [-2{,}01] = -3$$

и т. д.

Из этого определения следует ряд важных свойств (см, например, [9]):

1. если $x \le y$, то $[x] \le [y]$;

2. $x - 1 < [x] \le x$, причём $[x]$ – единственное целое число, удовлетворяющее этому условию;

3. $[x] + [y] \le [x + y] \le [x] + [y] + 1$,

причём, если хотя бы одно из чисел x или y является целым, то справедливо простое равенство

$$[x] + [y] = [x + y].$$

Из третьего неравенства, в частности, следует, что при $y = -x$

$$-1 \le [x] + [-x] \le 0.$$

Так как $[x] + [-x]$ само по себе является целым числом, оно может быть равно или 0, или -1. Первое значение возникает только тогда, когда x – целое. Если же $x \notin \mathbb{Z}$, то $[x] + [-x] = -1$.

Всё это оказывается весьма полезным при решении задачи о нахождении целого числа n, удовлетворяющего двойному неравенству, в котором левая и правая границы отличаются на единицу. Так, если

$x-1<n\le x$ (нестрогое неравенство справа!),

то, согласно свойству №2, $n=[x]$.

Если же нестрогое неравенство оказывается слева,

$$x-1\le n<x,$$

то всё немного сложнее. Нужно сначала умножить все части неравенства на -1, тогда из условия

$$-x<-n\le 1-x$$

следует, что $-n=[1-x]=1+[-x]$, или $n=-[1-x]$. В случае, когда $x\notin\mathbb{Z}$, всё становится гораздо проще – оба неравенства, вне зависимости от расположения знака $\le$, имеют одно и то же решение, $n=[x]$.

3. Симметричный случай

Чтобы опробовать нашу методику, рассмотрим сначала симметричный случай: источник света находится на биссектрисе угла, образованного зеркалами (именно этот случай указан в условии соответствующих задач сборников [1,2]). Тогда $\alpha=0$, и из формул (1), (2) следует, что $\varphi_{P_n}=(-1)^{n-1}n\theta=-\varphi_{Q_n}$. Это значит, в свою очередь, что количество членов у последовательностей $\{P\}$ и $\{Q\}$ одинаково, а общее количество изображений в системе чётное за исключением ситуации, когда последние члены обеих последовательностей совпадают (см. рис. 6). Изображение, общее для $\{P\}$ и $\{Q\}$, в силу симметрии может находиться только на биссектрисе «мёртвой зоны» (рис. 6б), что соответствует $\varphi=\pm180^\circ$.

Условие возникновения такой ситуации, когда точки P_n и Q_n совпадают, вытекает из формулы

$$\left|\varphi_{P_n}\right|=n\theta=180^\circ$$

и имеет вид

$$\theta=\frac{180^\circ}{n},$$

где n, конечно, является натуральным числом, а общее число изображений, очевидно, равно $N=2n-1$.

Если же $180^\circ/\theta$ не является натуральным числом, то количество изображений находится немного сложнее. Пусть n – номер, на котором заканчиваются обе последовательности $\{P\}$ и $\{Q\}$. Тогда из условия (3) следует, что

$$180^\circ-\frac{\theta}{2}\le n\theta<180^\circ+\frac{\theta}{2}$$

или

$$\frac{180^\circ}{\theta}-\frac{1}{2}\le n<\frac{180^\circ}{\theta}+\frac{1}{2}.$$

Так как размер полученной области меньше единицы, всегда существует ровно одно значение n, удовлетворяющее данному условию, и, согласно параграфу 2.4, оно равно $n=-\left[1/2-180^\circ/\theta\right]$. Количество изображений $N=2n$, в этом случае, находится как

$$N=-2\left[\frac{1}{2}-\frac{180^\circ}{\theta}\right]\qquad\left(\frac{180^\circ}{\theta}\notin\mathbb{N}\,!\right).\quad(4)$$

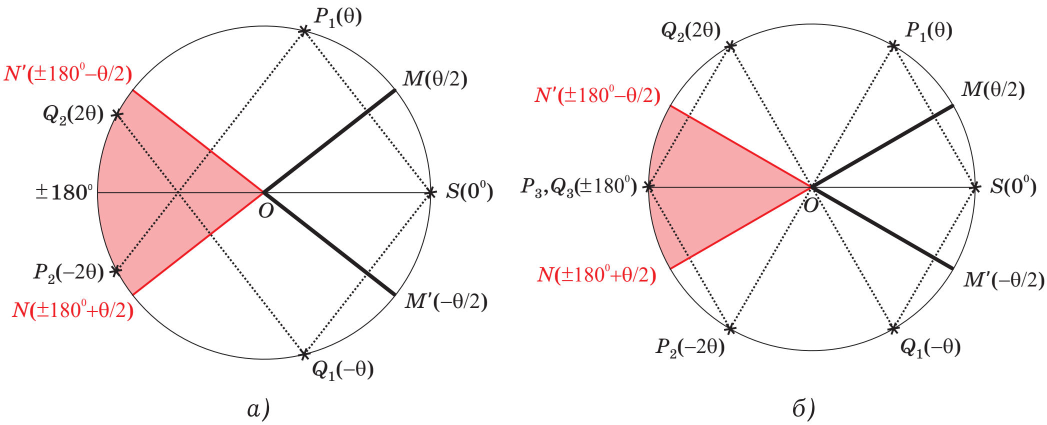


Рис. 6. Пример расположения источника и его изображений в симметричном случае. На рис. *а*) изображён случай, когда члены последовательностей $\{P\}$ и $\{Q\}$ не совпадают, в то время как рис. *б*) иллюстрирует противоположную ситуацию. В обоих случаях множество всех изображений симметрично относительно горизонтальной прямой.

В частности, если $\theta = 360^\circ/k$, где k – натуральное число, то при чётном $k = 2n$ количество изображений, как уже было сказано, равно $N = 2n - 1 = k - 1$. Если же k – нечётное число, $k = 2n + 1$, то из формулы (4) получается, что $N = 2n$, то есть снова $N = k - 1$. Здесь абсолютно необходимо напомнить, что речь идёт только о симметричном случае, когда источник находится на биссектрисе угла, образованного зеркалами! Именно для этого случая (и только для него!) данная формула верна при всех натуральных значениях k. К сожалению, авторы методических пособий почти всегда упускают это ограничение из вида.

4. Общий случай

4.1. $180^\circ/\theta \in \mathbb{N}$, α **– произвольное**

Перейдём теперь к рассмотрению общего случая, в котором источник света находится в произвольном месте между двумя зеркалами. Так же как и в предыдущем параграфе, мы начнём с разбора ситуации, когда угол между зеркалами равен $\theta = 180^\circ/n$ (n – натуральное число).

Из формул (1) и (2), определяющих положение всех изображений, получаем (число n здесь то же самое, что и в определении θ)

$$\varphi_{P_n} = (-1)^{n-1}\left(n\cdot\frac{180^\circ}{n} - \alpha\right) = (-1)^{n-1}\left(180^\circ - \alpha\right),$$

$$\varphi_{Q_n} = (-1)^{n}\left(n\cdot\frac{180^\circ}{n} + \alpha\right) =$$

$$= (-1)^{n}\left(180^\circ + \alpha\right) = (-1)^{n-1}\left(-180^\circ - \alpha\right).$$

Полученные значения отличаются на

$$\left|\varphi_{P_n}-\varphi_{Q_n}\right|=360^\circ,$$

поэтому точки P_n и Q_n совпадают, вне зависимости от значения угла α. Отсюда следует, что в случае $\theta=180^\circ/n$, который можно с полным правом назвать особым, количество изображений равно $N=2n-1$.

4.2. $180^\circ/\theta\notin\mathbb{N}$, α – произвольное

Пусть теперь $180^\circ/\theta\notin\mathbb{N}$. Будем считать, что в последовательности $\{P\}$ в «мёртвую» зону попадает изображение под номером n, а в последовательности $\{Q\}$ – под номером m. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$180^\circ-\frac{\theta}{2}\le n\theta-\alpha<180^\circ+\frac{\theta}{2},$$

$$180^\circ-\frac{\theta}{2}\le m\theta+\alpha<180^\circ+\frac{\theta}{2}.$$

Из них, согласно изложенному в параграфе 2.4, получаются явные выражения для n и m:

$$\frac{180^\circ+\alpha}{\theta}-\frac{1}{2}\le n<\frac{180^\circ+\alpha}{\theta}+\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n=-\left[\frac{1}{2}-\frac{180^\circ+\alpha}{\theta}\right],\tag{5}$$

$$\frac{180^\circ-\alpha}{\theta}-\frac{1}{2}\le m<\frac{180^\circ-\alpha}{\theta}+\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m=-\left[\frac{1}{2}-\frac{180^\circ-\alpha}{\theta}\right].\tag{6}$$

При $\alpha=0$ обе формулы дают одно и то же выражение, найденное в предыдущем параграфе. Если же $\alpha\ne0$, то значения n и m могут, вообще говоря, не совпадать.

Упражнения:

2. Доказать, что какое-либо из двух чисел n и m может равняться нулю, только если угол между зеркалами $\theta>180^\circ$ и $|\alpha|\ge180^\circ-\theta/2$.

3. Доказать, что значения n и m не могут отличаться больше, чем на единицу.

4. Доказать, что если $180^\circ/\theta\notin\mathbb{N}$, точки P_n и Q_m не совпадают при любых значениях n и m.

Следствием утверждения, сформулированного в последнем упражнении, является то, что общее количество изображений для случая $180^\circ/\theta\notin\mathbb{N}$ задаётся формулой

$$N=n+m=$$
$$=-\left[\frac{1}{2}-\frac{180^\circ+\alpha}{\theta}\right]-\left[\frac{1}{2}-\frac{180^\circ-\alpha}{\theta}\right].\tag{7}$$

4.3. Количество изображений в зависимости от α ($180^\circ/\theta\notin\mathbb{N}$)

Исследуем более подробно вопрос о распределении количества изображений при различных значениях α. Как было показано в параграфе 3, при $\alpha=0$ числа n и m всегда равны, и количество изображений всегда чётное,

$$N_1=-2\left[\frac{1}{2}-\frac{180^\circ}{\theta}\right].\tag{8}$$

Если же источник находится вблизи одного из зеркал, то есть при $\alpha\to\pm\theta/2$, то количество изображений будет нечётным,

$$N_2=-\left[-\frac{180^\circ}{\theta}\right]-\left[1-\frac{180^\circ}{\theta}\right]=$$
$$=-2\left[-\frac{180^\circ}{\theta}\right]-1=2\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]+1.\tag{9}$$

Числа N_1 и N_2 отличаются друг от друга на единицу, но какое из них больше, зависит от угла между зеркалами θ.

Упражнение 5. Доказать, что при $180^\circ/\theta \notin \mathbb{N}$ количество изображений может быть равно либо N_1, либо N_2.

Указание. Воспользоваться неравенствами (5) и (6).

Где же проходят границы, разделяющие области с чётным и нечётным количеством изображений? В силу симметрии рассматриваемой системы относительно биссектрисы угла между зеркалами, границы будут задаваться равенством вида $\alpha = \pm\alpha_0$. Значение α_0 находится из условия, что n-ое изображение в одной из последовательностей $\{P\}$ или $\{Q\}$ попадает на границу «мёртвой» зоны:

$$n\theta \pm \alpha_0 = 180^\circ - \frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad n + \left(\pm\frac{\alpha_0}{\theta} + \frac{1}{2}\right) = \frac{180^\circ}{\theta}.$$

Для этого выделим из обеих частей целую часть и, учитывая, что $0 < \pm\alpha_0/\theta + 1/2 < 1$, определим значение n:

$$\left[n + \left(\pm\frac{\alpha_0}{\theta} + \frac{1}{2}\right)\right] = \left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] \Rightarrow n = \left[\frac{180^\circ}{\theta}\right].$$

Отсюда получаем явное выражение для α_0

$$\alpha_0 = \left|180^\circ - \theta\left(\frac{1}{2} + \left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]\right)\right|. \qquad (10)$$

4.4. Результаты

Подведём итоги нашего исследования:

1. Если $180^\circ/\theta$ является натуральным числом, то количество изображений N не зависит от положения источника и является нечётным числом, равным $N = 360^\circ/\theta - 1$.

2. В противном случае количество изображений зависит от положения источника (параметра α):

(а) при $|\alpha| < \alpha_0$, где α_0 определяется формулой (10), количество изображений будет чётным числом $N_1 = -2\left[1/2 - 180^\circ/\theta\right]$;

(б) при $|\alpha| > \alpha_0$ количество изображений будет нечётным числом $N_2 = 2\left[180^\circ/\theta\right] + 1$;

(в) если $|\alpha| = \alpha_0$ берётся меньшее из двух значений N_1 и N_2.

Остаётся последний вопрос: можно ли описать полученный результат какой-либо «общей» формулой? В принципе, да. Для этого необходимо модифицировать формулу (7), включив в неё случай $180^\circ/\theta \in \mathbb{N}$. Воспользуемся одним из свойств функции $[x]$: выражение $[x] + [-x] + 1$ равно нулю, если x – дробное, и равно единице, если x – целое. При $180^\circ/\theta \in \mathbb{N}$ последние члены последовательностей $\{P\}$ и $\{Q\}$ совпадают, и изображений получается на одно меньше, чем по формуле (7). Следовательно, общее количество изображений при любых α и θ может быть описано формулой

$$N=-\left[\frac{1}{2}-\frac{180^\circ+\alpha}{\theta}\right]-\left[\frac{1}{2}-\frac{180^\circ-\alpha}{\theta}\right]-$$
$$-\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right]-\left[-\frac{180^\circ}{\theta}\right]-1. \qquad (11)$$

Однако приведённая формула крайне громоздка, и в практических расчётах удобнее пользоваться частными выражениями, выписанными выше.

5. Примеры

5.1. Решение задачи при $\theta=240^\circ$, 135°, 120° и 70°

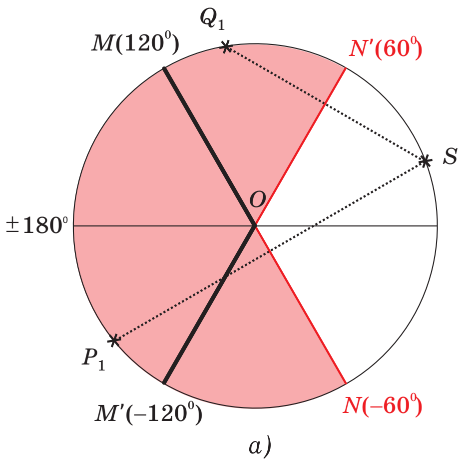
Для иллюстрации полученных формул, приведём несколько примеров для различных значений угла θ.

Вначале рассмотрим случай $\theta=240^\circ$. Для найденных нами соотношений нигде не накладывалось условие $\theta\le 180^\circ$. Это значит, что можно смело их использовать при рассмотрении нашего примера. Согласно формулам (8)-(10), имеем

$$\alpha_0=60^\circ,\quad N_1=2,\quad N_2=1.$$

Физически, это значит, что при $|\alpha|<60^\circ$ лучи света от источника попадают на оба зеркала, отражаются от них и формируют два изображения (см. рис. 7а). При $|\alpha|\ge 60^\circ$ свет на одно из зеркал не падает (или идёт вдоль его поверхности), поэтому изображение получается только одно (рис. 7б).

Остальные случаи, когда $\theta=135^\circ$, 120° и 70°, изображены на рис. 8-10. Последний случай интересен здесь тем, что данная задача предлагалась на заключительном этапе Всероссийской олимпиады в 1999 году [10]. К сожалению, авторский ответ $N=5$ корректен только при $|\alpha|\ge 5^\circ$, а если источник света находился бы вплотную к биссектрисе, то получалось бы $N=6$. Как на олимпиаде оценивали построение с шестью изображениями, по прошествии 20 лет остаётся только гадать.



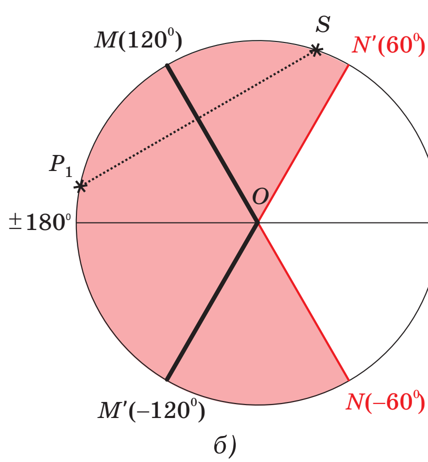
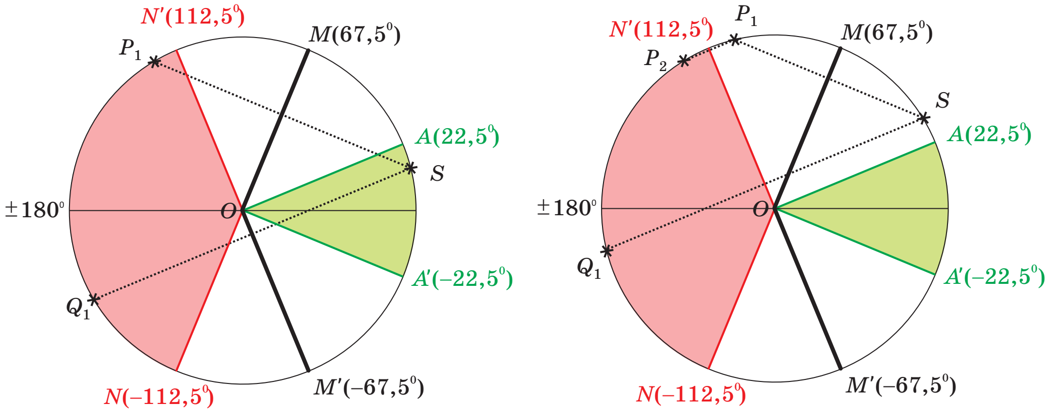
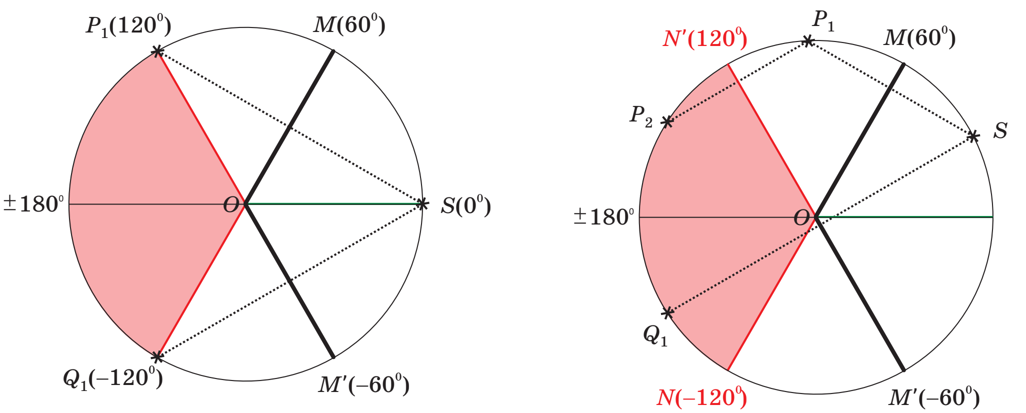


Рис. 7. Случай $\theta=240^\circ$. Если $\theta>180^\circ$ границы области $|\varphi|<\alpha_0$ совпадают с границами «мёртвой» зоны.



а) б)

Рис. 8. Случай $\theta = 135^\circ$. В этом случае $\alpha_0 = 22{,}5^\circ$, $N_1 = 2$, а $N_2 = 3$ (рисунки а и б соответственно). Область $|\varphi| < \alpha_0$ и её границы OA и OA' выделены зелёным цветом.



а) б)

Рис. 9. Случай $\theta = 120^\circ$. В этом случае $\alpha_0 = 0^\circ$, поэтому, если источник находится на биссектрисе (рис. а), то $N_1 = 2$, в противном случае - $N_2 = 3$ (рис. б).

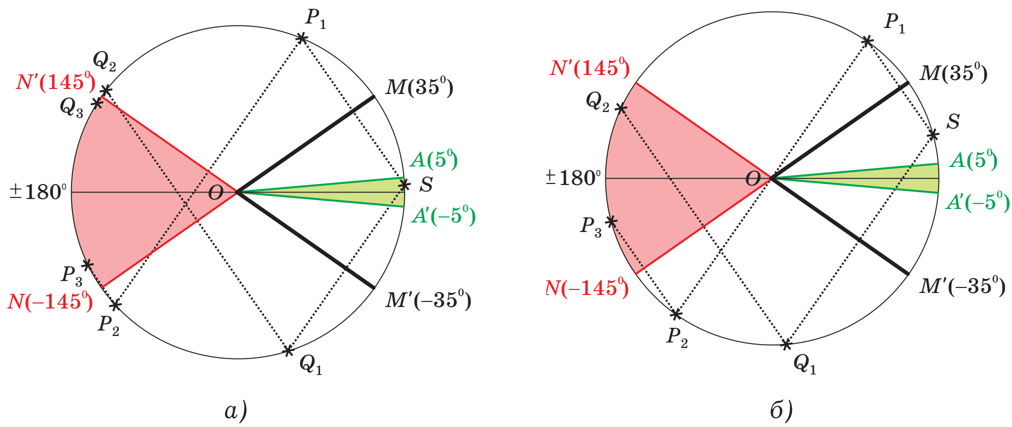


Рис. 10. Случай $\theta = 70^\circ$. В этом случае $\alpha_0 = 5^\circ$, $N_1 = 6$, а $N_2 = 5$ (рисунки а и б соответственно). Область $|\varphi| < \alpha_0$ и её границы OA и OA' снова выделены зелёным цветом.

5.2. При каком θ зеркала дают ровно 100 изображений? 99 изображений?

Ответить на эти вопросы помогут формулы для количества изображений. Рассмотрим первый вопрос[2]. Так как 100 – чётное число, то $180^\circ/\theta$ не может быть натуральным числом (в этом случае количество изображений всегда нечетное). Чётное число изображений появляется, когда источник находится вблизи биссектрисы. Это значит, что

$$N_1 = -2\left[\frac{1}{2} - \frac{180^\circ}{\theta}\right] = 100 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} - \frac{180^\circ}{\theta}\right] = -50 \Rightarrow 49{,}5^\circ < \frac{180^\circ}{\theta} \le 50{,}5^\circ.$$

Отсюда получаем условие на θ:

$$\frac{360^\circ}{101} \le \theta < \frac{360^\circ}{99}.$$

Из этого интервала необходимо выбросить точку $\theta = 360^\circ/100$, так как в этом случае $180^\circ/\theta \in \mathbb{N}$, и изображений будет только 99. Таким образом, окончательный ответ на первый вопрос:

$$\theta \in \left[\frac{360^\circ}{101}; \frac{180^0}{50}\right) \cup \left(\frac{180^0}{50}; \frac{360^\circ}{99}\right).$$

Напомним, что даже если угол θ удовлетворяет этому условию, 100 изображений появятся, только если источник света находится достаточно близко к биссектрисе (а при $\theta = 360^\circ/101$ – строго на ней).

Ровно 99 изображений получается, во-первых, при $\theta = 180^\circ/50$, а во-вторых, если

$$N_2 = 2\left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] + 1 = 99 \Rightarrow \left[\frac{180^\circ}{\theta}\right] = 49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{180^\circ}{50} < \theta \le \frac{180^\circ}{49}.$$

---

[2] Эта задача (с важным уточнением, что источник находится на биссектрисе угла между зеркалами) была дана на Московской олимпиаде школьников в 2001 году (см. [6], №4.13)

В результате, ответом на второй вопрос является неравенство

$$\frac{180^\circ}{50} \le \theta \le \frac{180^\circ}{49}.$$

Здесь, так же, как в первом случае, попадание значения θ в указанные «ворота» не гарантирует появления ровно 99 изображений. Для этого ещё требуется, чтобы источник находился достаточно далеко от биссектрисы. Исключением является только вариант $\theta = 180^\circ/50$, при котором количество изображений от положения источника не зависит.

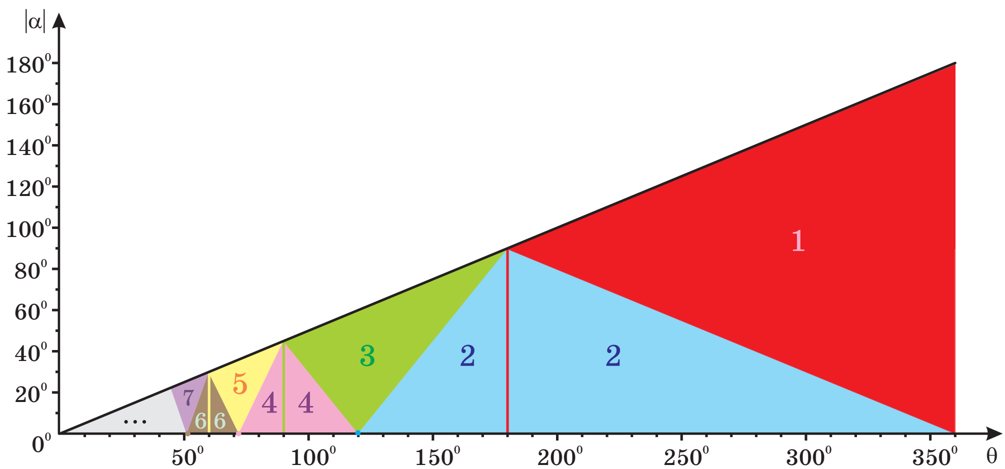
6. Заключение

В заключение приведём две диаграммы, иллюстрирующие полученные нами формулы.

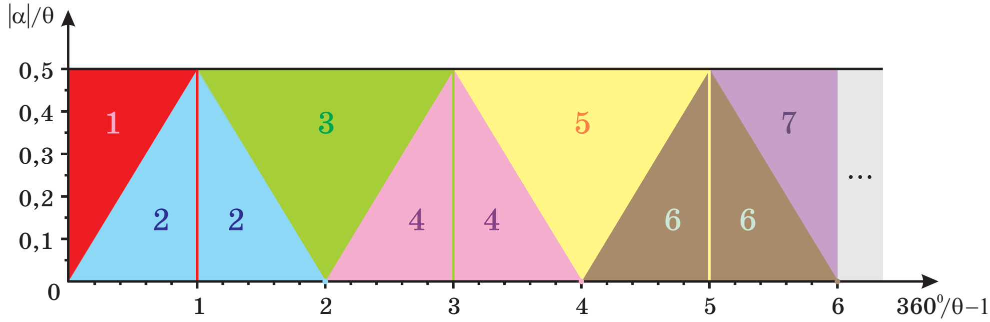
Рис. 11а показывает распределение количества изображений в системе из двух зеркал в зависимости от угла θ между ними и положения источника света (угла α).

На рис. 11б то же самое сделано в других координатах: вдоль вертикальной оси отложено отношение $|\alpha|/\theta$, а вдоль горизонтальной – величина $360^\circ/\theta - 1$, которая, как было сказано во введении, заменяет в большинстве источников правильное выражение (11) для количества изображений.

Эта диаграмма наиболее явно демонстрирует отношение формулы $N = 360^\circ/\theta - 1$ к реальности. Так, она справедлива, если $360^\circ/\theta$ – чётное число. В случае же, когда $360^\circ/\theta$ является нечётным целым числом, данная формула даёт верный ответ, **только** если источник лежит на биссектрисе угла между зеркалами. Наконец, когда число $360^\circ/\theta$ – и вовсе дробное, формула $N = 360^\circ/\theta - 1$, очевидно, неприменима, а её «аналог», формула $N = \left[360^\circ/\theta\right] - 1$, **неверна** при любых значениях параметра α.



а)



б)

Рис. 11. Распределение количества изображений N в системе из двух зеркал в зависимости от угла θ между ними и положения источника света (угла α), изображенное в двух системах координат. Области, соответствующие различным значениям N, окрашены разными цветами: красным $(N=1)$, голубым $(N=2)$, зелёным $(N=3)$, сиреневым $(N=4)$, жёлтым $(N=5)$, коричневым $(N=6)$ и фиолетовым $(N=7)$, а области с $N>7$, ради экономии, не представлены (заменены многоточием). Точки на горизонтальной оси, соответствующие $\theta=120^{\circ}$, 72°, $180^{\circ}/7$, также выделены нужным цветом с учётом принятого выше правила.

Список литературы

[1] *Буховцев Б. Б., Кривченков В. Д., Мякишев Г. Я., Шальнов В. П.*, Сборник задач по элементарной физике (задачи 689 и 690).

[2] Сборник задач по физике: Тепловые явления. Постоянный ток. Оптика/Под. ред. Замятнина М. Ю. (задача №3.76).

[3] *Балаш В. А.* Задачи по физике и методы их решения. — М.: Просвещение, 1983. — 432 с. (пример №2 на с. 371-372 и задача №14.4).

[4] Сборник задач по физике: для 9-11 кл. общеобразоват. учреждений/Сост. Степанова Г. Н. - М.: Просвещение, 1996. — 256 с. (задача №1410).

[5] *Гольдфарб Н. И.*, Физика. Задачник. 9-11 кл. — М.: Дрофа, 2002. — 368 с. (задача №25.7).

[6] Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986--2005/Под. ред. Семёнова М. В., Якуты А. А. — М.: МЦНМО, 2006. — 616 с.

[7] *Уокер Дж.*, Физический фейерверк. — М.: Мир, 1989. — 298 с. (задача 5.15).

[8] Chai An-Ti, The number of images of an object between two plane mirrors, Amer. J. Phys. 39, 1390 (1971).

[9] *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.*, Конкретная математика. — М.: Мир, 1998. — 703 с.

[10] Всероссийские олимпиады по физике/Под. ред. Козела С. М., Слободянина В. П. — М.: Вербум-М, 2005. — 534 с. (задача №9.65).