



Горбатый Игорь Натанович
 Доктор физико-математических наук,
 профессор кафедры общей физики МИЭТ.

Силовые линии и особые точки электростатического поля

При помощи компьютера построены силовые линии электростатического поля для некоторых систем точечных зарядов. Показано, что совокупность силовых линий электростатического поля каждой системы можно условно разбить на семейства, которые отделены друг от друга особыми поверхностями. Эти разделяющие (сепаратрисные) поверхности проходят через точки, в которых вектор напряженности электрического поля равен нулю. Расположение в пространстве «нулевых» точек и сепаратрисных поверхностей определяет пространственную структуру (топологию) картины силовых линий.

Там они часами трудились, голые по пояс,
 в адском сиянии силовых полей...

Клиффорд Саймак

Если у них есть силовые поля, то людям
 на Земле несдобровать, ведь так?
 Может быть, именно там изготавливаются
 силовые поля.

Айзек Азимов

«Силовое поле» – излюбленный объект писателей-фантастов. Видимо, считается, что слова «силовое поле» интуитивно понятны любому читателю. Человек, далёкий от физики, представит себе область, попав в которую, тела будут отталкиваться, притягиваться или разрушаться, а более образованный чи-

татель представит себе пространство, утыканное векторами сил, которые *готовы подействовать* на попавшие в поле тела.

Примером силового поля является поле электростатическое. Оно в каждой точке характеризуется вектором напряжённости $\vec{E} = \vec{F}/q$, равным отношению силы \vec{F} , кото-

рая действует на пробный заряд q , помещённый в данную точку пространства, к величине этого заряда.

Для графического изображения полей удобно использовать силовые линии. Силовая линия проводится так, что касательная к ней в каждой точке совпадает с направлением вектора напряжённости поля \vec{E} в этой же точке. Заметим, что основоположники электромагнетизма Фарадей и Максвелл видели в силовых линиях не только геометрические кривые, отображающие структуру поля, но полагали также, что силовые линии характеризуют механические напряжения, натяжения особой среды – эфира, заполняющего всё пространство. Считалось, что эфир растянут вдоль силовых линий и сжат поперёк них. Такая деформа-

ция эфира, по мнению Максвелла и Фарадея, и приводила к электрическому взаимодействию зарядов.

Дальнейшие исследования начала XX века привели к выводу, что никакого эфира не существует. Поэтому силовые линии утратили своё значение как объекты, объясняющие электрическое взаимодействие. Однако их значение как графического образа поля сохранилось. Картина силовых линий даёт представление о пространственной структуре поля и позволяет определять направление вектора поля в любой точке.

Далее мы научимся строить силовые линии при помощи компьютера, а также изображать их приближённо, не упуская при этом главные особенности пространственной структуры поля.

Как построить силовые линии при помощи компьютера

Легко изобразить силовые линии уединённого точечного заряда. Они представляют собой радиально расходящиеся от заряда прямые. Уже для двух точечных зарядов построение «вручную» силовых линий является весьма трудоёмким делом. Компьютер позволяет получить результаты быстро и точно.

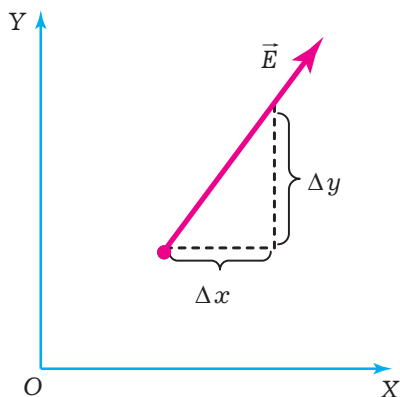


Рис. 1. К построению силовой линии

Алгоритм построения силовой линии следует непосредственно из

её определения. Проиллюстрируем его для случая, когда силовые линии лежат в плоскости XU . Выберем произвольную точку поля с координатами (x, y) , рассчитаем в этой точке проекции вектора напряжённости E_x и E_y на оси прямоугольной системы координат. Проведём отрезок прямой от выбранной точки поля (x, y) к некоторой близлежащей точке, смещённой на Δx и Δy относительно исходной. При выполнении условия

$$\Delta y / \Delta x = E_y / E_x$$

мы будем перемещаться вдоль вектора \vec{E} , то есть вдоль силовой линии (рис. 1). Приращение одной из координат, например Δx , можно задавать произвольно, выбирая это приращение достаточно малым, а приращение другой координаты рассчитывать. Собственно, всё. Описанную процедуру нужно многократно повторять, пока силовая линия не упрётся в точечный за-

ряд или не покинет экран монитора. Вы можете сами составить такую компьютерную программу, а если нет любви к программированию, то можете просто посмотреть уже подготовленные нами картинки, но при этом вы лишите себя удовольствия наблюдать за тем, как постепенно, линия за линией, формируется целостная картина силового поля.

Ограничимся рассмотрением электростатических полей точечных зарядов. Известно, что вектор напряжённости поля одного точечного заряда q в точке, положение которой относительно заряда задаётся радиус-вектором \vec{r} , определяется формулой

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3},$$

где ϵ_0 – электрическая постоянная. Существенно, что при $r \rightarrow 0$ модуль вектора напряжённости стремится к бесконечности, а в самой точке, где расположен q , направление вектора \vec{E} не определено.

В учебниках обычно отмечают два важных свойства силовых линий:

Электростатическое поле двух точечных зарядов

На рис. 2 изображены силовые линии поля двух точечных зарядов q и $2q$.

Заметим, что силовые линии принадлежат двум семействам. Линии первого семейства начинаются на заряде q , а линии второго семейства – на заряде $2q$. Можно провести некоторую поверхность, которая разграничивает эти два семейства (на рис. 2 виден след этой поверхности в плоскости чертежа). Эта поверхность (сепаратриса, от слова separate – разъединять) пересекает ось симметрии в некоторой точке, в которой нет силовой линии, но линии могут проходить сколь угодно близко от этой точки. Нетрудно понять, что в этой «особой»

1) силовые линии начинаются на положительных зарядах, заканчиваются на отрицательных зарядах или одним концом уходят в бесконечность;

2) силовые линии не пересекаются. Кроме того, силовые линии условились проводить так, чтобы их «густота» (число линий, пронизывающих малую площадку фиксированной площади, перпендикулярной линиям в данной точке) была пропорциональна величине напряжённости в данной точке. Для этого нужно при построении линий поля обеспечить выполнение двух условий:

а) число линий, начинающихся на положительных и заканчивающихся на отрицательных зарядах, должно быть пропорциональным величине этих зарядов,

б) вблизи каждого точечного заряда картина линий поля должна быть сферически симметричной.

Даже при помощи компьютера удовлетворить этим условиям весьма непросто. Далее мы сосредоточимся на изучении других особенностей полей и не будем следить при построении за «густотой» силовых линий.

в точке $\vec{E} = 0$, и именно поэтому нельзя говорить о направлении вектора \vec{E} в этой точке. К особым точкам следует также отнести бесконечно удалённые точки и точки, в которых расположены точечные заряды. Силовые линии могут начинаться и заканчиваться в особых точках, но в самих особых точках линии поля не определены.

Совокупность особых точек и сепаратрис определяет структуру (топологию) поля и позволяет восстановить картину всех силовых линий. Картина силовых линий и топологическая структура поля для двух положительных зарядов показаны на рис. 2 а и 2 б.

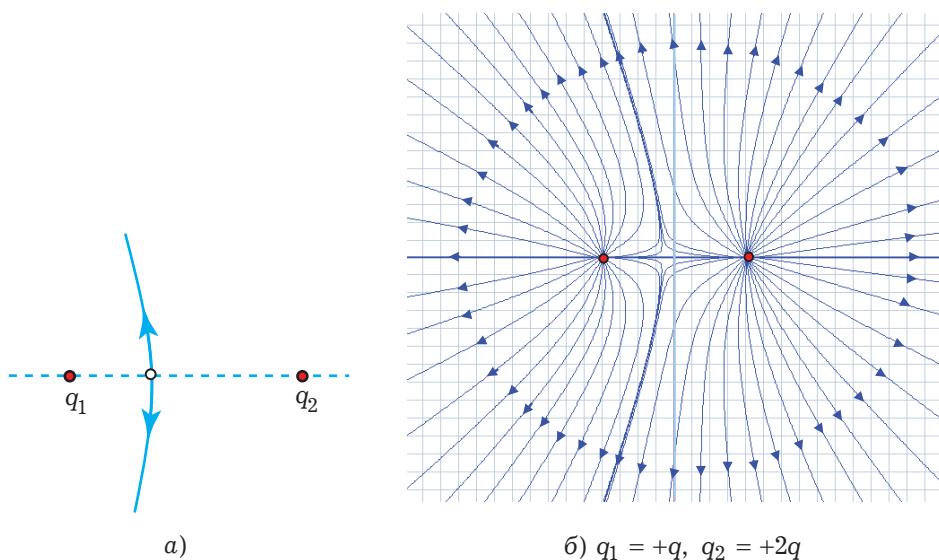


Рис. 2. а) Топология поля зарядов $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, $q_1 < q_2$, б) картина силовых линий электростатического поля зарядов q и $2q$

На рис. 3 изображена картина поля двух точечных зарядов, различающихся по величине и знаку. И в этом случае можно выделить два семейства силовых линий: одни из них начинаются на положительном заряде и заканчиваются на отрицательном, другие одним концом уходят

в бесконечность. Семейства разграничиваются, как видно, замкнутой поверхностью-сепаратрисой, охватывающей заряд меньшей величины и проходящей через больший заряд. Сепаратриса пересекает ось симметрии в «нулевой» точке, в которой напряжённость поля равна нулю.

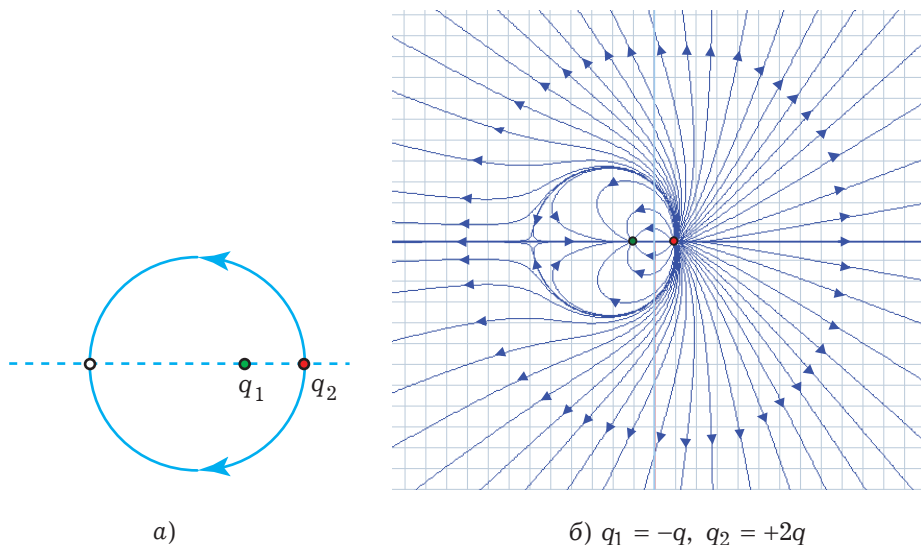


Рис. 3. а) Топология поля зарядов $q_1 < 0$, $q_2 > 0$, $|q_1| < q_2$, б) картина силовых линий электростатического поля зарядов $-q$ и $2q$

Полезным для анализа является следующее свойство, вытекающее из теоремы Гаусса: если сепаратриса образует замкнутую поверхность, то суммарный заряд, попавший

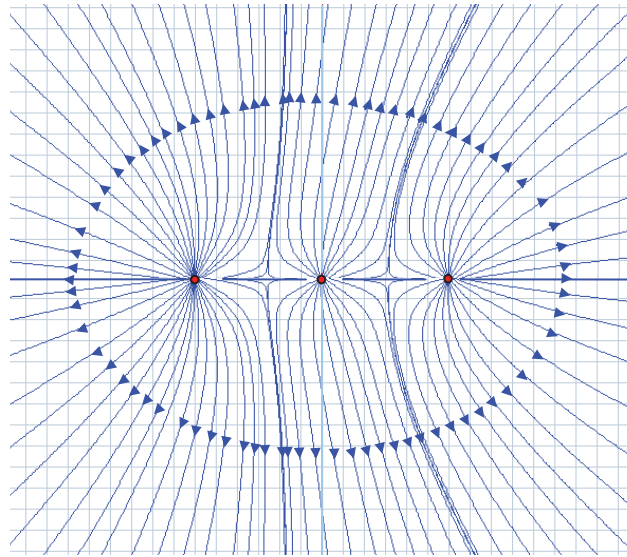
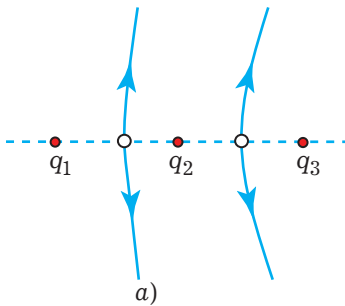
внутри этой поверхности, равен нулю. При этом считается, что если точечный заряд расположен на самой поверхности, то внутрь поверхности попадает часть этого заряда.

Электростатическое поле трёх точечных зарядов

Проанализируем теперь картину силовых линий поля трёх точечных зарядов. Ограничимся случаем осевой симметрии, когда все три заряда расположены на оси X . Прежде всего нужно найти нулевые точки, в которых $E = 0$, а затем попытаться восстановить форму сепаратрисных поверхностей.

Если все три заряда одноимённые (например положительные),

то, как нетрудно показать, имеются две нулевые точки, расположенные на оси X между зарядами. Поскольку знаки всех зарядов одинаковые, то сепаратрисы не могут образовывать замкнутые поверхности. Этого достаточно, чтобы изобразить топологическую структуру поля (рис. 4 а). На рис. 4 б показаны силовые линии, рассчитанные на компьютере.



б) $q_1 = +2q$, $q_2 = +q$, $q_3 = +q$

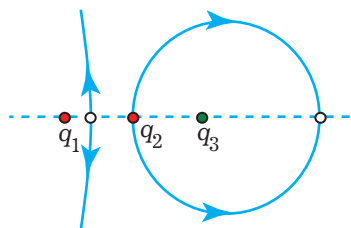
Рис. 4. а) Топология поля зарядов $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, $q_3 > 0$, б) картина силовых линий поля зарядов $2q$ (слева), q и q

Проанализируем теперь случай, когда заряды имеют разные знаки. Для определённости будем считать, что два заряда положительные, а один отрицательный. Отрицательный заряд может находиться с краю цепочки зарядов или между положительными зарядами.

Если отрицательный заряд находится с краю цепочки зарядов, то всегда имеются две нулевые точки, расположенные на оси симметрии X . Одна из этих точек расположена между положительными зарядами, а вторая у «отрицательного края» цепочки, если суммарный заряд си-

стемы положительный (рис. 5, 6), или у «положительного края» цепочки, если суммарный заряд отрицательный (рис. 7). Положение этих точек можно определить из уравнения $E_x = 0$. Заметим, что даже при одинаковом расположении нулевых точек картина силовых линий может

существенно различаться (сравните рис. 5 и 6), если сепаратрисы имеют различную форму. При построении замкнутых сепаратрисных поверхностей необходимо учитывать указанное выше свойство: суммарный заряд внутри поверхности равен нулю.



а)

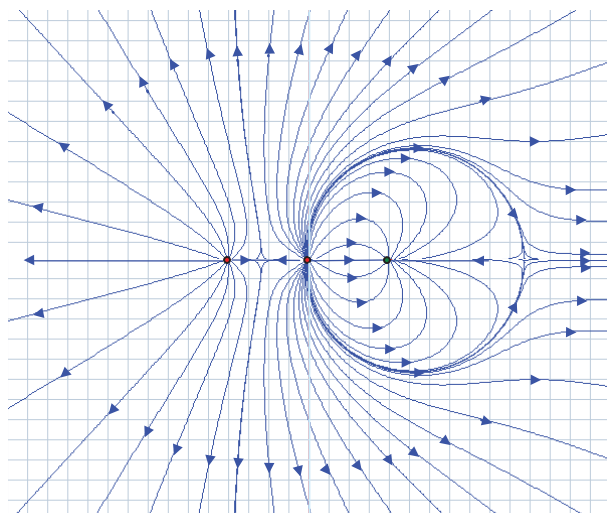
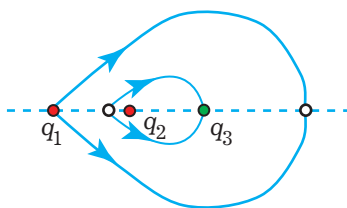
б) $q_1 = +q, q_2 = +2q, q_3 = -q$

Рис. 5. а) Топология поля зарядов $q_1 > 0, q_2 > 0, q_3 < 0$ для случая $|q_3| < q_2$, б) картина силовых линий поля зарядов q (слева), $2q$ и $-q$



а)

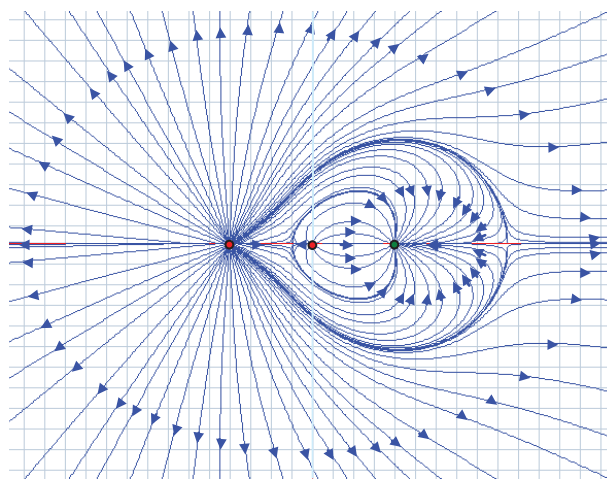
б) $q_1 = +10q, q_2 = +q, q_3 = -2q$

Рис. 6. а) Топология поля зарядов $q_1 > 0, q_2 > 0, q_3 < 0$ для случая $q_2 < |q_3| < q_1 + q_2$, б) картина силовых линий поля зарядов $10q$ (слева), q и $-2q$

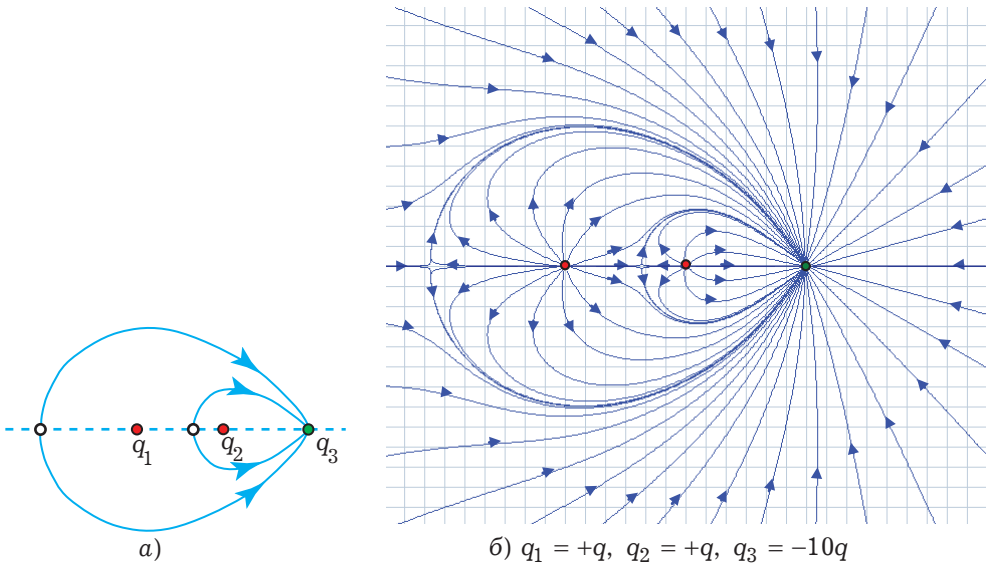


Рис. 7. а) Топология поля зарядов $q_1 > 0, q_2 > 0, q_3 < 0$ для случая $q_1 + q_2 < |q_3|$, б) картина силовых линий поля зарядов q, q и $-10q$

Если отрицательный заряд расположен между двумя положительными, то анализ уравнения $E_x = 0$ показывает, что на оси X имеются две нулевые точки, если суммарный заряд отрицательный (рис. 8), и нет ни

одной нулевой точки, если суммарный заряд положительный. В последнем случае нулевые точки имеются вне оси X , причём этих точек бесконечно много – они расположены на окружности радиуса r_0 (рис. 9).

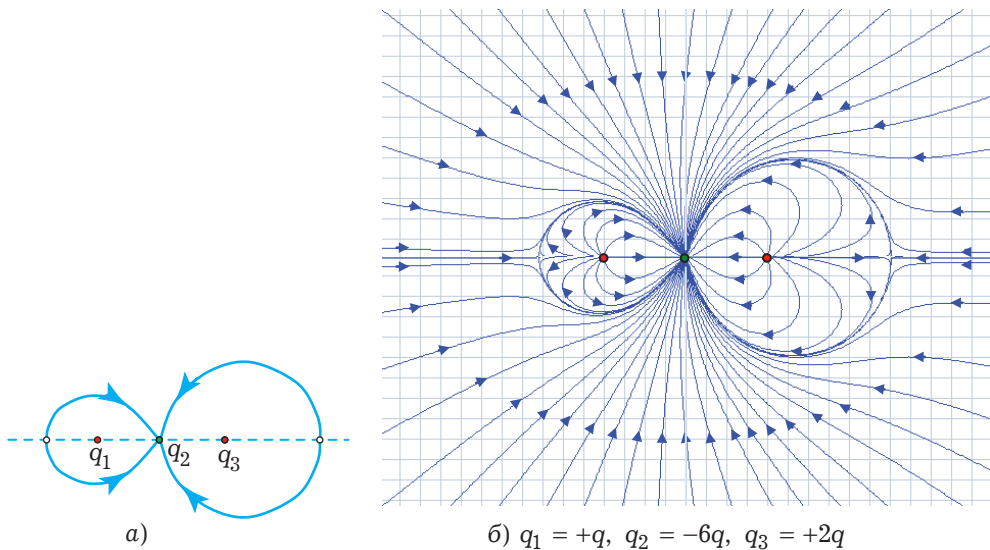
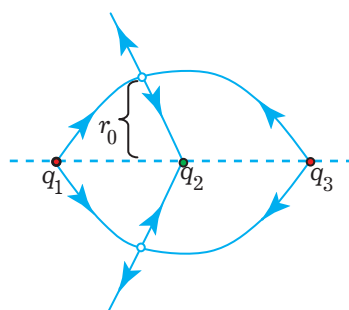


Рис. 8. а) Топология поля зарядов $q_1 > 0, q_2 < 0, q_3 > 0$ для случая $q_1 + q_3 < |q_2|$, б) картина силовых линий поля зарядов q (слева), $-6q$ и $2q$



а)

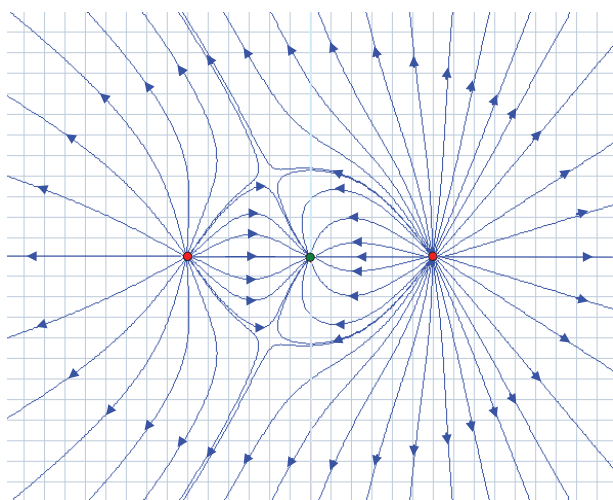
б) $q_1 = +q, q_2 = -q, q_3 = +4q$

Рис. 9. а) Топология поля зарядов $q_1 > 0, q_2 < 0, q_3 > 0$ для случая $|q_2| < q_1 + q_3$, б) картина силовых линий поля зарядов q (слева), $-q$ и $4q$

Заключение

1) Рассматривая случаи, когда заряды расположены на одной прямой, мы имеем дело с «плоскими» силовыми линиями, то есть линиями, лежащими в одной плоскости. Если заряды не лежат на одной прямой, то картина поля будет трёхмерной. И в этом случае особые точки и сепаратрисные поверхности играют ключевую роль, но отображение полей при помощи двумерных картинок становится менее наглядным.

2) Силовые линии электрического поля являются частным случаем линий тока произвольного векторного поля. Например, в гидродинамике линии тока – это линии, в каждой точке которой касательная совпадает по направлению со скоростью жидкости в данной точке пространства в определённый момент времени. При установившемся движении линии тока остаются неизменными во времени и совпадают с траекториями частиц жидкости. Другим примером линий тока являются магнитные линии, видимо, известные читателю. Их

характерной особенностью является отсутствие источников и стоков линий, то есть точек, из которых «вытекают» или в которые «стекаются» магнитные линии. Особые точки и сепаратрисные поверхности определяют топологические особенности любых векторных полей.

3) Построение картины линий тока сводится, вообще говоря, к решению системы дифференциальных уравнений. Но можно «задачу перевернуть» и говорить о том, что системы дифференциальных уравнений тесно связаны с векторными полями. Исследуя топологические особенности линий тока этих полей, можно делать выводы о некоторых особенностях решений систем дифференциальных уравнений.

4) Электростатическое поле принадлежит к особому классу векторных полей – потенциальных. Для таких полей можно ввести потенциальную функцию $\varphi(x, y, z)$. Замечательно, что эта скалярная функция координат позволяет рассчитывать

векторное поле, то есть, зная $\varphi(x, y, z)$ в некоторой пространственной области, всегда можно рассчитать компоненты векторного поля $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$ и $E_z(x, y, z)$ в той же области. Для графического

отображения поля в этом случае наряду с силовыми линиями удобно использовать поверхности равного потенциала, так называемые эквипотенциальные поверхности. Но это уже другая тема.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Привидения в природе

Некоторые люди, оказывавшиеся около одного из озёр в Турции, могли увидеть устрашающее зрелище: в прибрежных камышах этого озера иногда (но регулярно) возникала огненная фигура человека двухметрового роста, который покачивался и издавал какие-то невнятные звуки, а потом пропадал. После того как жители окрестных деревень узнали об огненном «привидении», они перестали из-за страха даже приближаться к озеру.

Когда же о «привидении» проведали учёные, их заинтересовало, что это может быть. Были организованы дежурства наблюдателей, которые регистрировали моменты появления и исчезновения таинственной фигуры, а также точные сведения о местах её нахождения, метеорологических условиях (прежде всего о движении воздуха) и пр.

И тут выяснилось, что «огненный человек» – это факел горящего болотного газа (метана). По мере его выгорания факел угасает, а после накопления воспламеняется от горячей золы.

