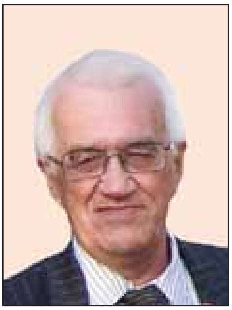

Дружинин Борис Львович
В 1968 году окончил МИФИ. С 1978 по 2008 г. являлся научным сотрудником Института теоретической и экспериментальной физики. Автор более 50 научных публикаций и более 150 статей для школьников в различных изданиях. Награждён почётным знаком «Ветеран атомной энергетики».

«Чай по-австралийски»

В статье рассматривается задача о вращении ведёрка с водой в вертикальной плоскости и разбираются тонкости и противоречия, обнаруженные автором в стандартном решении этой популярной задачи.

Чай, заваренный по-австралийски, нам как-то в походе предложил попробовать один товарищ. Получив наше восторженное согласие, он засыпал во вскипевшую воду положенное количество чая, привязал к дужке котелка верёвку и принялся раскручивать это сооружение в вертикальной плоскости. Точь-в-точь, как в задаче. Котелок такого к себе отношения не выдержал, дужка отскочила, но мы все успели увернуться. Надо заметить, что чай выплеснулся только после приземления.

Почему такой способ заварки называется «по-австралийски», товарищ не знал, но был уверен, что именно так заваривают чай аборигены Австралии. Впрочем, возможно, это была просто его шутка, а вот сама история имела неожиданные последствия, о которых хочется рассказать.

Наблюдение за вращением котелка навело на мысли об аналогичной задаче. «Ведро с водой равномерно вращается по окружности в вертикальной плоскости на верёвке, длина которой 1 метр. Какой должна быть минимальная угловая скорость вращения, чтобы вода не выливалась из ведра?».

Задача примерно такого содержания уже много лет кочует по школьным и вузовским задачникам. И все, не исключая автора, с энтузиазмом подсчитывают угловую скорость, при которой в верхней точке траектории вес тела будет равен нулю, или, что то же самое, центростремительное ускорение будет равно ускорению свободного падения.

Как-то раз мы разбирали решение данной задачи на занятии со школьниками. Сразу вспомнилась описанная выше история с «чаем по-австралийски» и для большей наглядности ребятам был показан видеоролик с процессом заваривания чая, благо весь соответствующий эпизод того похода был заснят.

О том, как развивались наши занятия после просмотра этого ролика, можно узнать по выдержкам из дневника, которые приведены ниже.

24 января.

– Нет, здесь на условие задачи что-то не похоже, – протянул Костя. – Ваш товарищ котелок неравномерно вращает, а в задаче сказано, что с постоянной скоростью.

Посмотрели видео ещё раз и согласились с Костей. Но после просмотра возник вопрос: а является ли тогда условие задачки о вращении ведёрка корректным? Возможно ли вращать ведёрко на верёвке в вертикальной плоскости с постоянной угловой скоростью или нет? Предложил ребятам нарисовать схему задачи. Почти у всех получилась примерно такая картинка, как на рисунке 1.

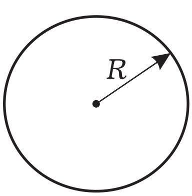

Рис. 1

Что ж, подавляющее большинство учеников и авторов задачников подразумевают, что схема задачи выглядит именно так. Поэтому запишем условие для этого варианта.

Ведро с водой равномерно вращается на верёвке по окружности радиусом 1 м в вертикальной плоскости. Один конец верёвки привязан к ведру, другой закреплён в центре окружности. Какой должна быть минимальная угловая скорость вращения, чтобы вода не выливалась из ведра?

Теперь приведём предполагаемое решение данной задачи. Из постоянства величины скорости следует, что центростремительное ускорение $a_ц$ всегда направлено к центру окружности и величина его не меняется и определяется по формуле:

$$a_ц = \omega^2 r.$$

На тело постоянно действуют две силы: сила тяжести mg и сила натяжения верёвки $F_н$, направление которой всё время меняется. Поскольку тело вращается равномерно, величина его скорости не меняется. Это значит, что тангенциальное ускорение отсутствует, и сумма этих сил определяет центростремительное ускорение по 2-му закону Ньютона:

$$\vec{a}_ц = \frac{m\vec{g} + \vec{F}_н}{m}.$$

В верхней точке всё просто, обе силы направлены вниз.

– Вода выльется из ведра, если центростремительное ускорение будет меньше ускорения свободного падения, – заметил Саша. – Тогда силы тяжести воды хватит, чтобы и саму воду повернуть, и заставить её падать.

– А если центростремительное ускорение будет больше ускорения свободного падения, – продолжил Костя, – то ведро с водой будет натягивать верёвку и вода не выльется.

Отсюда следует вывод, что минимальная угловая скорость, при которой в верхней точке вода не будет выливаться из ведра, соответствует центростремительному ускорению, равному ускорению свободного падения:

$$a_{ц} = \omega^2 r = g.$$

Отсюда находим искомое выражение для угловой скорости:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

При этом сила натяжения верёвки в верхней точке равна нулю.

Итак, угловая скорость вращения найдена, а значит, задача вроде бы решена. Но мы решили пойти дальше и посмотреть, а какой должна быть при таком движении ведёрка сила натяжения нити, действующая на ведёрко в других точках траектории.

В нижней точке всё ясно. Так как движение по окружности равномерное, то центростремительное ускорение продолжает оставаться по величине равным ускорению свободного падения и направлено вверх. По 2-му закону Ньютона:

$$\vec{a}_{ц} = \frac{m\vec{g} + \vec{F}_{н}}{m} = -\vec{g}.$$

С учётом направления векторов получим:

$$a_{ц} = g = \frac{F_{н} - mg}{m}.$$

Отсюда можно легко подсчитать величину силы натяжения верёвки:

$$F_{н} = 2mg.$$

Теперь оставалось посмотреть, что происходит в какой-нибудь промежуточной точке, например в крайней правой точке траектории ведёрка (рис. 2).

Ведро с водой по-прежнему движется по окружности с постоянной скоростью, это значит, что центростремительное ускорение и центростремительная сила всегда должны быть направлены к центру окружности. Для задачи, которую мы решаем, центростремительное ускорение $a_{ц} = g$. Центростремительная сила получается в результате сложения силы тяжести и силы, действующей на тело со стороны верёвки. Мы знаем направление и величину силы тяжести и центростремительной силы. Найдём направление и величину силы $F_{н}$, с которой верёвка действует на ведро.

Чтобы сила $F_{н}$ действовала в показанном на рисунке 2 направлении, верёвка должна «изогнуться», и расстояние от тела до центра вращения уже будет меньше заданной длины верёвки.

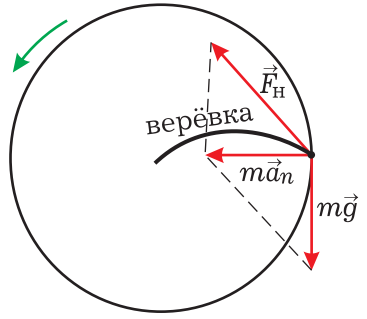

Рис. 2

На все эти рассуждения и рисунки у нас ушло не менее получаса.

– Получается, что в условии задачи уже кроется ошибка? – спросил Миша.

– Точно, – согласилась Катя. – Ведро не может двигаться по окружности.

Вроде бы всё всем понятно.

– Но Ваш товарищ котелок вращает по окружности, – заметил Саша. – Это ясно видно на видео.

– Да и верёвка совсем не изгибается, – поддержала его Катя.

Посмотрели ещё раз фильм и договорились продолжить обсуждение на следующем занятии.

31 января.

Сначала формулирую условие задачи.

Тело вращается на верёвке по окружности в вертикальной плоскости. Как изменяется его скорость в процессе вращения?

Я предложил ребятам рассмотреть динамику вращения в нескольких точках.

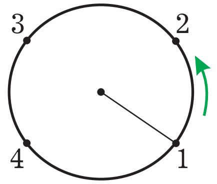

Рис. 3

Начинаем с точки 1 (см. рис. 3). Так как тело движется по окружности, верёвка всё время натянута, и сила её натяжения $F_н$ действует на тело точно в сторону центра вращения (рис. 4). Это относится и к другим точкам.

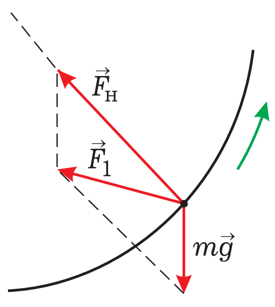

Рис. 4

В результате векторного сложения силы тяжести и силы натяжения имеем силу F_1:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_н + m\vec{g}.$$

По второму закону Ньютона получаем ускорение, с которым движется тело:

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m} = \frac{\vec{F}_н + m\vec{g}}{m}$$

Ускорение $\vec{a}_1$ надо разложить на нормальное $\vec{a}_{n1}$ и тангенциальное $\vec{a}_{t1}$. Нормальное ускорение направлено к центру вращения, а тангенциальное – по касательной к окружности (рис. 5).

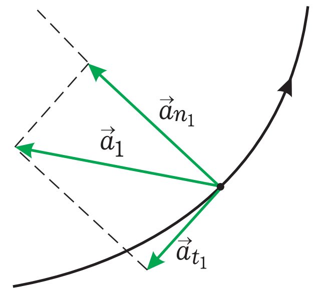

Рис. 5

Нормальное, или центростремительное ускорение изменяет направление движения, а тангенциальное ускорение изменяет величину скорости. Из рисунка видно, что $\vec{a}_{t1}$ направлено в сторону, противоположную направлению вращения, значит, величина скорости будет уменьшаться.

Точно так же рассматриваем точки 2, 3 и 4. Формулы силы и ускорения в этих точках ничем не отличаются от соответствующих формул в точке 1. Зато отличаются рисунки.

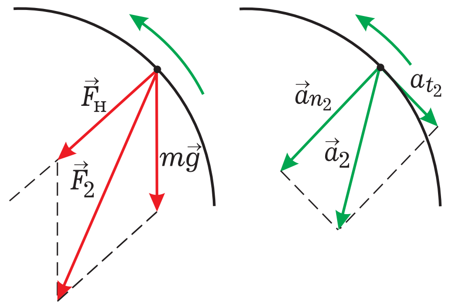

Рис. 6

Рассмотрим точку 2. Из рисунка 6 видно, что ускорение $\vec{a}_{t2}$ направлено в сторону, противоположную направлению вращения, значит, величина скорости будет уменьшаться.

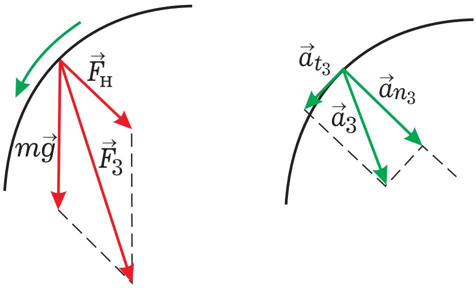

Рис. 7

Рассмотрим точку 3. Из рисунка 7 видно, что ускорение $\vec{a}_{t3}$ направлено в сторону вращения, значит, величина скорости будет возрастать.

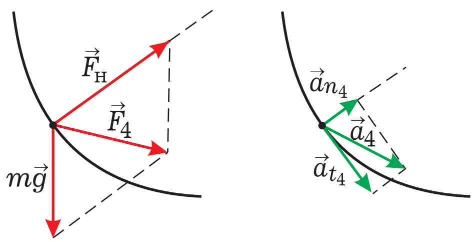

Рис. 8

Рассмотрим точку 4. Из рисунка 8 видно, что ускорение $\vec{a}_{t4}$ направлено в сторону вращения, значит, величина скорости будет возрастать.

На эти рассуждения и рисунки у нас ушло почти всё занятие. Я попросил ребят подвести итоги.

– Если тело на верёвке вращается в вертикальной плоскости, – первым начал Дима, – то величина скорости всё время меняется. Когда тело поднимается, то скорость уменьшается, а когда опускается, то увеличивается.

– Естественно, – добавил Саша, – было бы странно, если наоборот.

– А если мы захотим, чтобы угловая скорость вращения была постоянной, – вспомнила Катя, – то окружности не получится.

– Получится, – неожиданно заявил Костя, – если вместо верёвки ведро прикрепить к какой-нибудь палке или металлическому стержню. Тогда вращение будет и равномерное, и по окружности.

– И что? – удивилась Оля. – Наши рассуждения в этом случае не годятся?

Мы обсудили замену верёвки на металлический стержень и согласились, что все наши рассуждения и вычисления остаются в силе. Просто деформация металла настолько маленькая, что рассмотреть её невооружённым глазом невозможно.

– А почему мы изменили условие задачи? – спросил кто-то.

– Чтобы условие задачи соответствовало картинке, которую вы нарисовали в самом начале. Если конец верёвки зажать в кулаке, то, подрабатывая кистью или всей рукой, можно добиться, чтобы ведро вращалось в вертикальной плоскости по окружности и с постоянной скоростью. Только тогда конец верёвки не будет находиться в центре окружности, а будет перемещаться вместе с рукой. Сделать это непросто, но в принципе можно.

– А задачка-то не такой простой оказалась, – замечает Дима. – Её ещё надо решать и решать.

– Это можно сказать практически о любой задаче. У вас в задачах на движение предлагается пренебрегать сопротивлением воздуха. Стреляет пушка. Без учёта сопротивления воздуха снаряд улетает на сорок километров. А если сопротивление воздуха учитывать, то снаряд упадёт существенно ближе. Такая вот разница.

– А что же тогда нам голову морочат? – удивляется Саша.

– Никто никому ничего не морочит. Любая проблема сначала изучается в самом простом варианте. Потом добавляются всё новые и новые параметры, от которых зависит поведение системы. Случается так, что окончательное решение не имеет ничего общего с первым ответом. Но это нормально, всё надо делать постепенно.