Орлянский Олег Юрьевич
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики Днепропетровского национального университета.

Резисторы, конденсаторы и пружины

Представьте себе следующую игру: на тетрадном листе в клеточку нарисован прямоугольник, который следует разбить на наименьшее число квадратов. Оказывается, именно к такой игре сводится один простой метод решения олимпиадных и прикладных задач по физике на соединения резисторов, конденсаторов и пружин.

В предлагаемой статье рассматривается данный метод, а его применение к пружинам напоминает настоящую детективную историю с неожиданным, но счастливым концом.

О резисторах, или Что делать, если имеешь не то, что надо...

Представьте, что вам срочно потребовался резистор сопротивлением 3,9 кОм, а у вас есть только резисторы сопротивлением 1,8 кОм. Как соединить имеющиеся резисторы и какое наименьшее их количество для этого понадобится?

Идея решения таких задач очень проста, и, если её знаешь, задачи не вызывают никаких трудностей. Суть идеи в следующем.

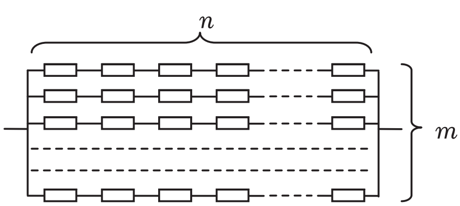


Рис. 1

Как известно, при последовательном соединении резисторов их сопротивления складываются. Значит, если взять n одинаковых резисторов сопротивлением R_0 каждый и соединить их последовательно, то получим общее сопротивление $R = nR_0$. При параллельном соединении складываются проводимости, то есть, обратные сопротивлениям величины. Поэтому, если взять m одинаковых резисторов сопротивлением R_0 каждый и соединить их параллельно, то получим $\frac{1}{R} = \frac{m}{R_0}$, или $R = \frac{R_0}{m}$. Рассмотрим теперь m параллельных цепочек по n одинаковых резисторов в каждой, которые на рис. 1 образуют прямоугольник $n \times m$. Общее сопротивление, очевидно, будет

$$R = \frac{nR_0}{m}. \qquad (1)$$

При $n = m$ резисторы на рисунке образуют квадрат, и тогда, независимо от размеров квадрата и количества резисторов в нём, общее сопротивление $R = R_0$. Это означает, что любой квадрат из одинаковых резисторов можно заменить одним резистором R_0.

Применим изложенные соображения к нашей задаче. По условию, $R = 3,9$ кОм, $R_0 = 1,8$ кОм. Выразим R через R_0, для чего разделим их друг на друга, избавившись при этом от размерностей: $\frac{R}{R_0} = \frac{3,9}{1,8} = \frac{13}{6}$, то есть $R = \frac{13R_0}{6}$. Сравнивая с (1), находим, что нужное нам сопротивление R обеспечат 6 параллельных цепочек по 13 последовательно соединённых резисторов R_0 в каждой – всего 78 резисторов. Однако в этом прямоугольнике 13×6 можно выделить квадраты, заменив каждый из них одним резистором и уменьшив таким образом их общее число. Это можно сделать разными способами. Наиболее простой путь требует выделения квадратов как можно больших размеров, поскольку это даёт максимальный выигрыш в количестве. На рис. 2 резисторы для удобства обозначены штрихами, и из них выделены два квадрата максимальных размеров 6×6. Эквивалентная схема представлена на рис. 3. Её общее сопротивление легко считается:

$$R = 2R_0 + R_0/6 = 13R_0/6 = 3,9 \text{ кОм}.$$

Но, выиграв на двух больших квадратах, мы проиграли на шести маленьких, каждый из которых включает лишь один резистор. Мы получили схему (рис. 3) из восьми резисторов, однако является ли это число минимальным? Как нетрудно убедиться, нет. На рис. 4 представлено другое разбиение на квадраты, обеспечивающее выполнение условия задачи всего шестью резисторами (эквивалентная схема на рис. 5). Возникает любопытная математическая задача: разбить произвольный прямоугольник $n \times m$ на минимальное количество квадратов.

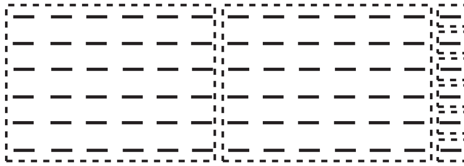


Рис. 2

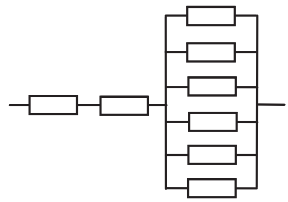


Рис. 3

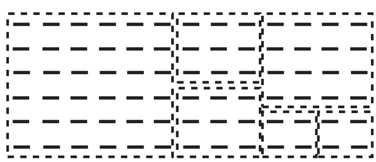


Рис. 4

Эта задача легко обобщается и на большее число пространственных измерений, например, на три: разбить параллелепипед на минимальное число кубов. Но вернёмся к физике.

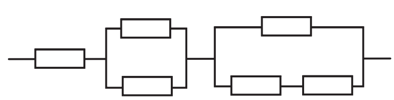


Рис. 5

О том, как соединить 6 одинаковых конденсаторов, чтобы изменить ёмкость в 1,2 раза

Подобно сопротивлениям резисторов вычисляются ёмкости конденсаторов с тем лишь различием, что ёмкости складываются при параллельном соединениях, а при последовательном складываются обратные ёмкостям величины. Это означает, что в формуле (1) следует заменить сопротивления на ёмкости и поменять местами число строк и столбцов: $C = \frac{mC_0}{n}$. Например, рассмотрим следующую задачу.

Можно ли в результате соединения шести одинаковых конденсаторов получить ёмкость в 1,2 раза большую (меньшую) ёмкости одного? Если можно, то как, если нет, объяснить почему.

Прежде всего заметим, что в общем случае при решении подобной задачи необходимо разбить прямоугольник $n \times m$ на квадраты. Предположим, что такое разбиение найдено, тогда его же можно использовать и для транспонированного прямоугольника со сторонами $m \times n$. Таким образом, если первый случай соответствует общей ёмкости $C_1 = \frac{mC_0}{n}$, то второй – $C_2 = \frac{nC_0}{m}$, и коль можно получить ёмкость в n/m раз большую, то, следовательно, и в n/m раз меньшую, как и наоборот. Рассмотрим соединение конденсаторов, которое приводит к общей ёмкости C в 1,2 раза меньшей ёмкости C_0 одного конденсатора. Тогда $C = \frac{C_0}{1,2} = \frac{5C_0}{6}$, и мы имеем 5 параллельных цепочек из 6 последовательно соединённых конденсаторов в каждой. Выделение одного большого квадрата сразу даёт нужный ответ: ёмкость $C = C_0/1,2$ в результате соединения шести одинаковых конденсаторов (см. рис. 6). Понятно, что простой перебор всех возможных соединений шести конденсаторов занял бы намного больше времени.

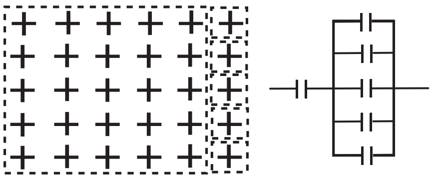


Рис. 6

Теперь попробуем транспонировать прямоугольник, изображённый на рис. 6. В нашем случае это равносильно его повороту на 90° (рис. 7). Непосредственная проверка полученного соединения подтверждает, что $C = 1,2C_0$.

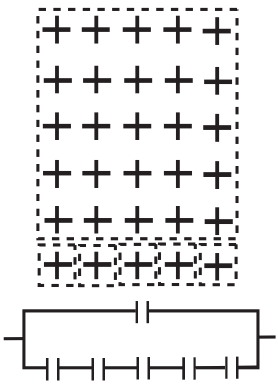


Рис. 7

Заметим, что получение нужного соотношения между C и C_0 путём соединения меньшего количества конденсаторов также формально удовлетворяет условию задачи, поскольку лишние конденсаторы можно подсоединить между точками равных потенциалов, и это никак не повлияет на общий результат.

В нашем случае ёмкость $C = 1{,}2C_0$ может быть получена с помощью пяти конденсаторов (рис. 8), и соединение при этом оказывается более надёжным, чем на предыдущей схеме (рис. 7), так как там верхний конденсатор максимально нагружен, что при нестабильном напряжении может привести к его пробою.

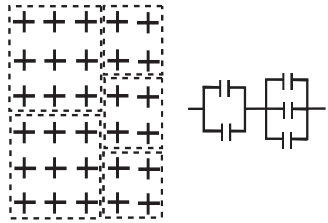


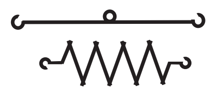
Рис. 8

О пружинах, или Куда ведёт проторённая дорога...

Поищем, какие ещё физические величины при параллельном и последовательном соединении вычисляются подобным образом. При последовательном соединении пружин складываются удлинения: $x = x_1 + {}$ ${}+x_2 + x_3 + \ldots$, что при одинаковой силе упругости вдоль цепочки пружин приводит к следующей формуле для коэффициентов жёсткости: $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \ldots$. При наличии n последовательно соединённых пружин жёсткостью k_0 каждая получаем $k = k_0/n$. При параллельном соединении m одинаковых пружин удлинение одинаково, а складываются силы, поэтому $k = mk_0$. Таким образом, жёсткости ведут себя подобно ёмкостям в электрических схемах.

Учитывая то, что большинство участников заключительного этапа республиканской олимпиады по физике знакомы с изложенным приёмом для резисторов, а ученики старших классов – и для ёмкостей, на 49-й Всеукраинской олимпиаде, которая проходила в марте 2012 г. во Львове, была предложена следующая задача.

Вам необходима пружина жёсткостью 300 Н/м, но в вашем распоряжении есть только пружины жёсткостью 500 Н/м и лёгкие проволочные стержни, которые можно использовать для соединения этих пружин. Предложите способ получения необходимой жёсткости, используя минимальное количество пружин. Стержни можно разрезать и делать на них петельки для соединения (см. рис.).



Портить пружины запрещается. Приведите расчёты и схематично изобразите конструкцию.

Обозначим жёсткость одной пружины через $k_0 = 500$ Н/м, а жёсткость искомой конструкции через $k = 300$ Н/м. Тогда $k = 3k_0/5$, что означает соединение из 3 параллельных цепочек по 5 пружин в каждой (см. рис. 9). Как видим, всего 15 пружин. Однако соединения одинаковых пружин, образующих квадраты, например, 3×3 или 2×2, имеют такую же жёсткость, что и одна пружина, и поэтому могут быть заменены, как показано на рис. 9 и рис. 10. Выходит, что достаточно всего четырёх пружин. Но попробуем представить, как под действием внешней силы растягивается система пружин на рис. 10. Появляются сомнения, не окажется ли нижний участок слабее верхнего и не станет ли он больше растягиваться? Для того чтобы прямоугольный фрагмент нашей конструкции не перекосило в трапецию с неминуемым дополнительным удлинением, следует обеспечить компенсацию моментов сил, а именно переместить крепления так, чтобы они делили вертикально изображённые на рис. 10 стержни в соотношении 1:2 (рис. 11).

Казалось бы всё, задача решена. И всё же идея перекоса, по-видимому, требует большего внимания. Действительно, отчего бы не рассмотреть трапециевидное изменение формы конструкции? Выполняется ли в этом случае закон Гука и можно ли использовать подобную конструкцию для решения нашей задачи?

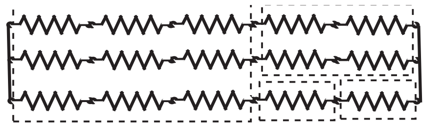


Рис. 9

Рис. 10

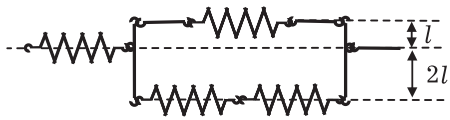


Рис. 11

О том, как срезать наискосок...

Рассмотрим общий случай параллельного соединения двух различных пружин, которые растягивают, приложив силы к точкам, делящим боковые стержни в заданном соотношении $l_1 : l_2$ (рис. 12, 13). При этом удлинение первой пружины равно x_1, второй – x_2, а общее удлинение (удлинение, которое отслеживает внешняя сила) – x. Из подобия треугольников находим связь между удлинениями $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{x_2 - x_1}{l_1 + l_2}$ (рис. 13). Записываем условия статического равновесия бокового стержня: для сил $kx = k_1x_1 + k_2x_2$, для моментов сил $k_1x_1l_1 = k_2x_2l_2$ (плечи сил пропорциональны длинам соответствующих наклонных участков) и решаем полученную систему относительно k:

$$k = \frac{k_1k_2(l_1 + l_2)^2}{k_1l_1^2 + k_2l_2^2}. \quad (2)$$

В найденную формулу для k вошли только постоянные, не зависящие от величины внешней силы. Следовательно, приложенная сила пропорциональна удлинению

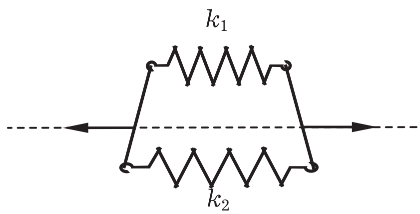


Рис. 12

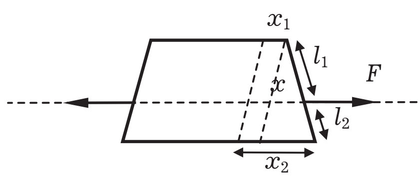


Рис. 13

($F = kx$), и закон Гука выполняется. Проверим формулу (2) для соединения, изображённого на рис. 11. Подставим $k_1 = k_0$, $k_2 = k_0/2$, $l_1 = l$, $l_2 = 2l$ в (2) и получим $k = \frac{3}{2}k_0$, что в последовательном соединении с k_0 (рис. 11) и даёт требуемый результат $\frac{3}{5}k_0 = \frac{3}{5} \cdot 500$ Н/м $= 300$ Н/м. Но теперь у нас возникает возможность использовать в параллельном участке изображённого на рис. 11 соединения не три, а только две пружины, сместив линию приложения силы. Для двух одинаковых параллельно соединённых пружин формула (2) упрощается:

$$k = k_0 \frac{(l_1 + l_2)^2}{l_1^2 + l_2^2} = k_0 \frac{(n+1)^2}{n^2+1}, \quad (3)$$

где для удобства введено обозначение $l_1/l_2 = n$. Для $k = \frac{3}{2}k_0$ получаем $n = l_1/l_2 = 2 \pm \sqrt{3}$. Поскольку $2+\sqrt{3} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$, это означает, что не имеет значения, от какой пружины отсчитывать l_1 и l_2, что очевидно в силу симметрии. Итак, выходит, что можно обойтись всего тремя пружинами. Последовательно к первой пружине присоединить параллельное соединение двух пружин в точках, которые делят боковые стержни этого соединения в соотношении $\left(2+\sqrt{3}\right) : 1 = 3{,}73 : 1$. При растяжении прямоугольник из двух параллельных пружин будет деформироваться в трапецию, но это не приводит к каким-либо неудобствам.

Нельзя ли тогда вообще ограничиться двумя параллельно соединёнными пружинами? Проверим. Согласно условию, необходимо обеспечить $k = 3k_0/5$.

Подставив в формулу (3), получим уравнение $\frac{3}{5} = \frac{(n+1)^2}{n^2+1}$, которое имеет два отрицательных корня: $n = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2} < 0$. Поскольку $n = l_1/l_2$, это может означать как то, что ограничиться двумя пружинами не удастся, это просто невозможно, так и то, что сделать это всё же можно, если одно из расстояний отложить в другую сторону, что-то вроде отрицательной координаты на координатной оси. Чтобы разобраться, сделаем рисунок, где попробуем отложить l_1 от верхней пружины в другую сторону (в деформированном состоянии конструкция имеет вид, изображённый на рис. 14). Непосредственное вычисление жёсткости данной системы подтверждает правильность догадки. Оказывается, в формулах (2) и (3) достаточно поменять l_1 на $-l_1$.

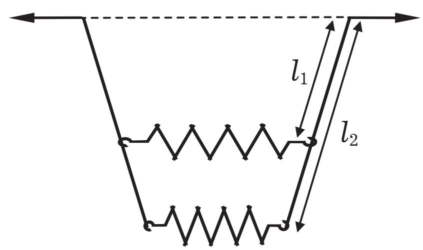


Рис. 14

Итак, для получения жёсткости 300 Н/м можно взять только две пружины по 500 Н/м и соединить их стержнями так, как показано на рис. 14, обеспечив при этом $l_2/l_1 = \left(5+\sqrt{21}\right)/2 \approx 4{,}8$. Другой вопрос, насколько удобно использовать подобную конструкцию? Во-первых, в силу её больших размеров, возможных изгибов стержней со всеми вытекающими последствиями и, во-вторых, учитывая сжатие нижней пружины при растяжении верхней, а это приводит к необходимости следить, чтобы конструкция оставалась в одной плоскости. Тем не менее, две пружины – это несомненный рекорд. Меньше – только одна. Кстати, а нельзя ли попробовать использовать одну(!) пружину для достижения нашей цели? На олимпиаде нашлись участники, которым это сделать удалось. Мы же приведём авторский вариант решения. Представим перевёрнутую букву А с двумя наклонными стержнями, соединёнными в нижней точке петельками, и горизонтальной пружиной-перекладиной, которая делит стержни в некотором отношении (рис. 15). Как известно, чем больше плечо, тем меньше сила. Поэтому можно ожидать, что $l_2 : (l_2 - l_1) = 5 : 3$, поскольку искомое отношение жёсткостей $k : k_0 = 3 : 5$. В действительности в который раз всё оказывается немножко хитрее. В отличие от равновесия тел в поле сил тяжести, сила упругости пружины при смещениях меняется, а не остаётся прежней. Поэтому моменты сил, действующих на наклонный стержень (рис. 15), будут пропорциональны не плечам сил, а квадратам плеч. Из равенства моментов сил относительно нижней точки соединения стержней находим, что $l_2/(l_2 - l_1) = \sqrt{5/3}$. Это же выражение можно получить и как предельный случай формулы (2), в которой сделана замена $l_1 \to -l_1$:

$$k = \frac{k_1 k_2 (l_2 - l_1)^2}{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}. \qquad (4)$$

Формула (4) не зависит от первоначальных длин пружин и, оказывается, может быть использована для широкого класса случаев. Представим, что вторая пружина (рис. 14) не деформируется, например, заменена кусочком стержня. Это означает, что она имеет бесконечно большой коэффициент жёсткости k_2. Если к тому же длина этого воображаемого кусочка стержня равна нулю, получаем конструкцию, изображённую на рис. 15 с одной пружиной, жёсткость которой $k_1 = k_0$. Подставим это значение в формулу (4) и рассмотрим предел при $k_2 \to \infty$:

$$k \to \frac{k_0 k_2 (l_2 - l_1)^2}{k_2 l_2^2} = \frac{k_0 (l_2 - l_1)^2}{l_2^2}.$$

Учитывая, что $k = 3k_0/5$, находим:

$$l_2/(l_2 - l_1) = \sqrt{5/3}.$$

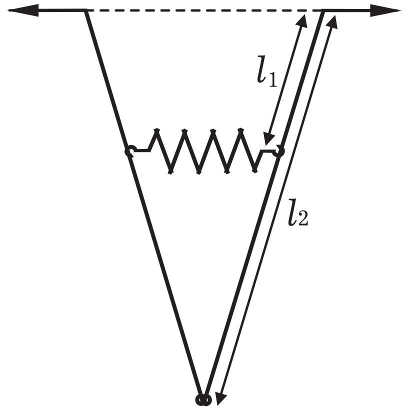


Рис. 15

Оказывается, из одной пружины и двух стержней в принципе можно сконструировать простой механизм, имитирующий пружину любой другой жёсткости. Если требуется жёсткость меньшая, чем у пружины, необходимо прикладывать внешние силы выше точек закрепления пружины (как на рис. 15), если большая, – соответственно, ниже, и в этом случае для расчёта пользоваться формулой $k = k_0 \left(1 + l_1/l_2\right)^2$. Понятно, что для резисторов и конденсаторов подобное решение невозможно.

По замыслу автора, на олимпиаде главной целью данной задачи было раскрепостить мышление подготовленных олимпийцев и отдать приоритет тем из них, кто найдёт нестандартные подходы к решению.

Цель же данной статьи – расширить кругозор читателя, познакомить с интересными методами решения задач и дать пищу для размышления об общих чертах и отличиях математического описания физических явлений.