



Овчинников Александр Сергеевич
*Доцент кафедры общей физики
Национального исследовательского
университета МИЭТ.*



Плис Валерий Иванович
*Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей физики Московского
физико-технического института.*

Решаем задачи по физике Международной олимпиады Phystech.International (выпускной класс, 2018–2019 учебный год)

С 2015 года Московский физико-технический институт проводит Международную олимпиаду школьников Phystech.International. Олимпиада для учащихся 9–11 классов (10–12 классов – по 12-летней форме обучения) средних общеобразовательных учреждений из любых стран проводится по двум предметам: физика и математика. Принять участие в олимпиаде может любой гражданин, обучающийся в выпускном или в двух предшествующих классах. Для этого необходимо зарегистрироваться на сайте phystech.international.

Олимпиада проходит в два этапа. Первый этап проводится в режиме on-line. Очный заключительный этап проходит на площадках в странах ближнего и дальнего зарубежья.

Все победители и призёры получают баллы индивидуальных достижений в портфолио абитуриента. Эти баллы учитываются при поступлении в МФТИ.

В 2018 году on-line этап прошёл в период с 25 сентября по 30 ноября. Участникам олимпиады по физике предлагались следующие задачи.



Задача 1. Автомобиль, двигаясь равнозамедленно по прямой, преодолел участок подъёма со средней скоростью $\langle V \rangle = 25$ м/с. Скорость автомобиля в конце подъёма меньше скорости в начале подъёма на $|\Delta V| = 14$ м/с. Найдите скорость $\tilde{V}$ автомобиля в середине участка подъёма.

Решение. По условию движение на подъёме равнопеременное, следовательно, скорость убывает со временем по линейному закону. Тогда средняя скорость на участке подъёма равна полусумме скоростей V_1 в начале и V_2 в конце подъёма. Действительно, длина L участка подъёма равна

$$L = \langle V \rangle \cdot T = 0,5 \cdot (V_1 + V_2) \cdot T,$$

отсюда

$$\langle V \rangle = 0,5 \cdot (V_1 + V_2).$$

По условию

$$V_1 - V_2 = |\Delta V|.$$

Из этих соотношений следует

$$V_1 = \langle V \rangle + 0,5 \cdot |\Delta V|,$$

$$V_2 = \langle V \rangle - 0,5 \cdot |\Delta V|.$$

При равнопеременном движении по прямой

$$V_x^2 - V_{0x}^2 = 2 \cdot a_x \cdot (x - x_0).$$

Для перемещений на первой половине подъёма и на всем подъёме это соотношение принимает вид

$$\tilde{V}^2 - V_1^2 = 2 \cdot a_x \cdot \left(\frac{L}{2} - 0 \right),$$

$$V_2^2 - V_1^2 = 2 \cdot a_x \cdot (L - 0).$$

Разделив первое соотношение на второе, приходим к ответу на вопрос задачи

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \sqrt{\langle V \rangle^2 + \left(\frac{|\Delta V|}{2} \right)^2} = \\ &= \sqrt{25^2 + \left(\frac{14}{2} \right)^2} \approx 26 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Задача 2. Мяч брошен под углом к горизонту из точки А (рис.1). Точка А находится на высоте $h = 8$ м. Расстояние от точки А бросания до точки В падения мяча на землю равно $l = 25$ м. Найдите минимальную начальную скорость $V_{0 \text{ MIN}}$ мяча. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

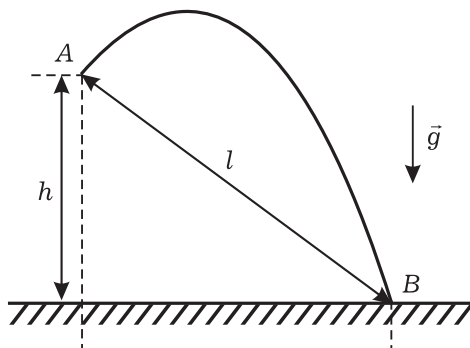


Рис. 1

Первое решение. В лабораторной системе отсчёта координаты летящего мяча (рис.2) изменяются со временем по законам

$$x(t) = V_0 \cos \alpha \cdot t,$$

$$y(t) = h + V_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \quad (1)$$

В момент падения на землю при $t = T$

$$x(T) = V_0 \cos \alpha \cdot T = \sqrt{l^2 - h^2} = s,$$

$$y(T) = h + V_0 \sin \alpha \cdot T - \frac{gT^2}{2} = 0.$$

Из приведенных соотношений находим зависимость дальности полёта в горизонтальном направлении от V_0 и α

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{l^2 - h^2} = x(T) = \\ &= \frac{V_0 \cos \alpha}{g} \left(V_0 \sin \alpha + \sqrt{(V_0 \sin \alpha)^2 + 2gh} \right). \end{aligned}$$

Дальнейшее «движение по этому пути», т.е. вывод и анализ зависимости $V_0 = f(l, \alpha)$, сопряжено с математическими трудностями. Проще воспользоваться следующим приёмом.

В процессе полёта мяч движется по параболе. Действительно, подстановка из (1) $t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$ в

формулу $y(t)$ с учётом равенства $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + tg^2 \alpha$ приводит к явному виду траектории

$$y(x) = h + x \cdot tg \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2V_0^2} (1 + tg^2 \alpha).$$

В момент падения

$$0 = h + s \cdot tg \alpha - \frac{g \cdot s^2}{2V_0^2} (1 + tg^2 \alpha).$$

Будем считать V_0 заданной величиной и поставим вопрос: под каким углом α к горизонту следует бросить мяч со скоростью V_0 так, чтобы мяч попал в точку с координатами $x = s$, $y = 0$? Ответ на этот вопрос дают решения полученного для $tg \alpha$ квадратного уравнения

$$tg \alpha_{1,2} = \frac{V_0^2}{gs} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{gs}{V_0^2} \right)^2 + \frac{2gh}{V_0^2}} \right),$$

которые существуют, если дискриминант больше нуля. Тогда таких траекторий, ведущих из A в B, две. По мере уменьшения скорости V_0 углы α_1 и α_2 сближаются и при некотором значении V_0 дискриминант обращается в ноль тогда $\alpha_1 = \alpha_2$. Траектория, ведущая в цель, единственная!

Минимальную начальную скорость найдем из равенства нулю дискриминанта

$$1 - \left(\frac{gs}{V_0^2} \right)^2 + \frac{2gh}{V_0^2} = 0.$$

Решение этого биквадратного уравнения с учётом равенства $s^2 = l^2 - h^2$ приводит к ответу $V_{0MIN} = \sqrt{g(l-h)} = \sqrt{10 \cdot (25-8)} \approx 13 \text{ м/с}.$



Второе решение. Дальность полёта в горизонтальном направлении мяча, брошенного со скоростью V_0 с высоты h под углом α к горизонту (рис.2), равна

$$s = x(T) = V_0 \cos \alpha \cdot T.$$

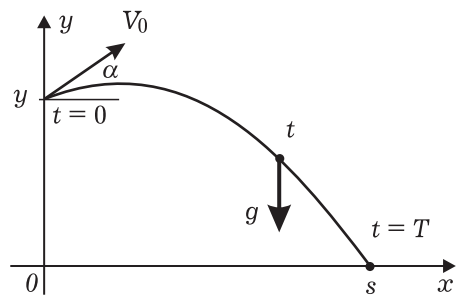


Рис. 2

Скорость V в момент падения не зависит от угла α и равна $V = \sqrt{V_0^2 + 2gh}$. Это следует из закона сохранения полной механической энергии.



Далее, в процессе полёта скорость мяча изменяется со временем по закону $\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{g}t$. В момент падения $\vec{V}(T) = \vec{V}_0 + \vec{g}T$. Обратимся к треугольнику скоростей (рис.3) и вычислим его площадь, которая равна половине произведения основания на высоту, или же половине произведения длин сторон на синус угла между ними

$$\frac{1}{2}gTV_0 \cos \alpha = \frac{1}{2}V_0V \sin \beta,$$

здесь β – угол поворота вектора скорости за время полета.

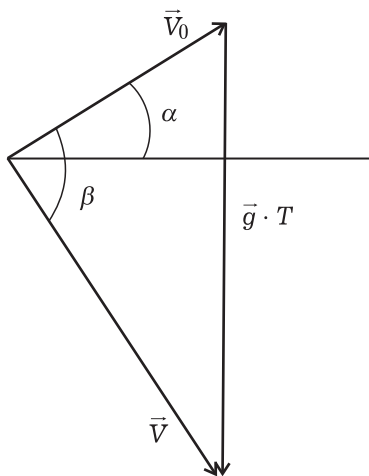


Рис. 3

Отсюда дальность полёта

$$s = \frac{1}{g}V_0V \sin \beta.$$

В полученном выражении только угол β зависит от α . Следовательно, максимальная дальность достигается в том случае, когда вектор скорости за время полёта поворачивается на угол $\beta = \frac{\pi}{2}$. Эта дальность равна

$$s = \frac{V_0 \sqrt{V_0^2 + 2gh}}{g}.$$

Отсюда следует, что минимальная скорость, с которой следует бросить мяч с высоты h на максимальную дальность s по горизонту, а значит и на максимальное расстояние $l = \sqrt{s^2 + h^2}$ от точки старта, равна

$$V_{0 \text{ MIN}} = \sqrt{g(l-h)} \approx 13 \text{ м/с}.$$

Заметим, что при таком броске

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{V_0}{\sqrt{V_0^2 + 2gh}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{h}{l}}{1 + \frac{h}{l}}} = \\ &= \sqrt{\frac{1 - \cos \delta}{1 + \cos \delta}} = \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Угол бросания равен половине угла δ , $\cos \delta = \frac{h}{l}$ (рис.1), который направление на цель составляет с вертикалью!

Задача 3. Однородный диск катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности. Радиус диска $R = 30$ см, скорость центра диска $V_0 = 3$ м/с. На диске на расстоянии $r = 10$ см от центра сидит насекомое массой $m = 3$ г. Найдите максимальную силу F_{MAX} трения, удерживающую насекомое от падения в процессе движения. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Все движения происходят в одной вертикальной плоскости.

Решение. В подвижной системе отсчёта, поступательно движущейся со скоростью V_0 относительно лабораторной системы отсчёта (ЛСО), любая точка диска, находящаяся на произвольном расстоянии r от цен-

тра, равномерно движется по окружности со скоростью $U = \omega r$, здесь ω – угловая скорость вращения диска. Ускорение этой точки направлено к центру диска и равно $a_{отн} = \omega^2 r$. Качение происходит без проскальзывания, т.е. скорость нижней точки диска в ЛСО равна нулю, $\vec{V}_{HT} = \vec{0}$. По закону сложения скоростей $\vec{V}_{HT} = \vec{0} = \vec{V}_0 + \vec{U}_{HT}$. Из приведенных соотношений следует $\vec{U}_{HT} = -\vec{V}_0$, $\omega R = V_0$, $\omega = \frac{V_0}{R}$. Под-

вижная система движется равномерно относительно ЛСО. Следовательно, эта система отсчета инерциальная. В этой системе уравнение движения насекомого (второй закон Ньютона) принимает вид

$$m\vec{a}_{отн} = m\vec{g} + \vec{F}_{ТР}.$$

Отсюда $\vec{F}_{ТР} = m(\vec{a}_{отн} - \vec{g})$. Величина силы трения достигает наибольшего значения

$$F_{MAX} = m \left(g + \left(\frac{V_0}{R} \right)^2 r \right) = \\ = 3,0 \cdot 10^{-3} \cdot \left(10 + \left(\frac{3}{0,3} \right)^2 \cdot 0,1 \right) = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ Н.}$$

в тот момент, когда $\vec{g} \uparrow \downarrow \vec{a}_{отн}$.

В этот момент насекомое находится в нижней точке траектории.

Задача 4. Вагон массой $m_1 = 60$ т, движущийся по прямолинейному горизонтальному пути, догоняет другой вагон массой $m_2 = 40$ т и сцепляется с ним. В результате абсолютно неупругого столкновения механическая энергия вагонов уменьшается на $Q = 10$ кДж. С какой скоростью U сокращалось расстояние между вагонами перед сцепкой?

Решение. Столкновения, сопровождающиеся изменением внутреннего состояния тел, называются *неупругими*. Рассмотрим абсолютно неупругое соударение («слипание») вагонов в ЛСО. Считаем, что вагоны перед столкновением движутся в положительном направлении оси OX со скоростями соответственно $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$, по условию $V_1 > V_2$. В процессе абсолютно неупругого соударения импульс системы сохраняется (импульсом силы трения за время «слипания» пренебрегаем)

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V}.$$

Отсюда находим скорость, с которой движутся сцепленные вагоны,

$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2}.$$

Закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{m_1 \vec{V}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{V}_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot \vec{V}^2}{2} + Q.$$

Из приведенных соотношений находим убыль кинетической энергии

$$Q = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{1}{2} \mu (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)^2,$$

здесь $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – приведенная масса системы тел.

Итак, при абсолютно неупругом соударении тел во внутреннюю энергию переходит кинетическая энергия тела приведенной массы, движущегося с относительной скоростью.

В рассматриваемой задаче

$$U = V_1 - V_2 = \sqrt{\frac{2Q}{\mu}} = \sqrt{2Q \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} =$$



$$= \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot \frac{60 \cdot 10^3 + 40 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 10^3}} \approx 0,9 \text{ м/с.}$$

Задача 5. Идеальный газ находится в закрытом сосуде постоянного объёма. При нагревании на $\Delta T = 1 \text{ К}$ давление газа увеличивается на $\alpha = 0,4 \%$. Определите абсолютную температуру T_0 газа в начальном состоянии.

Решение. В начальном состоянии $PV = \nu RT_0$, в конечном

$$P(1 + \alpha)V = \nu R(T_0 + \Delta T),$$

здесь $\alpha = 0,004$. Из этих соотношений следует

$$T_0 = \frac{\Delta T}{\alpha} = \frac{1,0}{4 \cdot 10^{-3}} = 250 \text{ К.}$$

Задача 6. Теплопроводящий цилиндр лежит на горизонтальном столе. Поршень массой $M = 8 \text{ кг}$ и площадью $S = 30 \text{ см}^2$ делит объём цилиндра на две равные части. Если цилиндр установить вертикально, то отношение объёмов устанавливается равным $\alpha = 1,5$. Найдите давление P_0 воздуха в цилиндре в начальном состоянии. Поршень скользит в цилиндре без трения. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Решение. Введём обозначения: $2V_0$ — объём цилиндра, V_1 — объём газа под поршнем, P_1 — давление газа под поршнем, V_2 — объём газа над поршнем, P_2 — давление газа над поршнем. В конечном состоянии поршень находится в покое, трения нет, тогда

$$P_1 S = Mg + P_2 S.$$

$$\text{Отсюда } P_1 - P_2 = \frac{Mg}{S}.$$

С учётом равенства температур в начальном и конечном состояниях и уравнений состояния $P_0 V_0 = P_1 V_1 = P_2 V_2$ последнее равенство перепишем в виде

$$P_0 \left(\frac{V_0}{V_1} - \frac{V_0}{V_2} \right) = \frac{Mg}{S}.$$

Далее

$$2V_0 = V_1 + V_2, \quad \frac{V_2}{V_1} = \alpha.$$

Отсюда находим отношения объёмов и их разность

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{1 + \alpha}{2}, \quad \frac{V_0}{V_2} = \frac{1 + \alpha}{2\alpha},$$

$$\left(\frac{V_0}{V_1} - \frac{V_0}{V_2} \right) = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}.$$

Тогда

$$P_0 = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \frac{Mg}{S} = \frac{2 \cdot 1,5}{1,5^2 - 1} \cdot \frac{8 \cdot 10}{30 \cdot 10^{-4}} = 6,4 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

Задача 7. В сосуд объёмом $V = 4 \text{ дм}^3$, наполненный сухим воздухом при давлении $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и температуре $t_0 = 0^\circ \text{ С}$, вводят $m = 2,6 \text{ г}$ воды. Сосуд нагревают до температуры $t_1 = 100^\circ \text{ С}$. Найдите давление P влажного воздуха в сосуде при этой температуре. Давление насыщенного водяного пара при $t_1 = 100^\circ \text{ С}$ равно $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$ молярная масса воды $\mu = 18 \text{ г/моль}$, универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.

Решение. Выясним, будет ли пар в конечном состоянии насыщенным? Плотность насыщенного водяного пара при $T_1 = 373 \text{ К}$ равна

$$\rho_{\text{НАС}} = \frac{P_0 \cdot \mu}{R \cdot T_1} =$$

$$= \frac{1,0 \cdot 10^5 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 373} \approx 0,58 \text{ кг/м}^3, \text{ т.е.}$$

$$\rho_{\text{НАС}} \approx 0,58 \text{ г/дм}^3.$$

В объёме $V = 4 \text{ дм}^3$ масса насыщенного пара

$$m_{\text{ПАРА}} = \rho_{\text{НАС}} \cdot V = 0,58 \cdot 4 = 2,32 \text{ г} \\ < m = 2,6 \text{ г.}$$

Следовательно, пар будет насыщенным, давление влажного воздуха в конечном состоянии равно сумме парциальных давлений сухого воздуха и водяного пара

$$P = P_0 \frac{T_1}{T_0} + P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \cdot \frac{373}{273} + 1,0 \cdot 10^5 \approx \\ \approx 2,37 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Задача 8. По трём параллельным пластинам однородно распределены заряды с поверхностной плотностью $\sigma_1 = \sigma = 1,77 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2$, $\sigma_2 = 2\sigma$ и $\sigma_3 = -3\sigma$ (рис. 4). Найдите разность $(\varphi_1 - \varphi_3)$ потенциалов пластин 1 и 3. Расстояния между соседними пластинами одинаковы и равны $d = 1 \text{ см}$. Размеры пластин велики по сравнению с расстоянием между ними. Электрическая постоянная

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2).$$

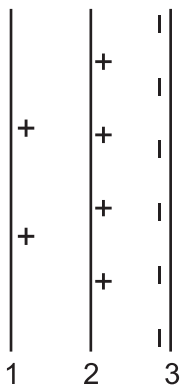


Рис. 4

Решение. Известно, что вблизи однородно заряженной плоскости электрическое поле однородное, напряженность такого электрического

поля по величине равна $E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}$,

здесь σ – поверхностная плотность заряда на плоскости. По принципу суперпозиции находим напряженность суммарного однородного электрического поля в области между пластинами 1 и 2

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - 2\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + 3\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

и в области между пластинами 2 и 3

$$\tilde{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + 2\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + 3\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 3\frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

По определению вектор напряженности электрического поля указывает направление наискорейшей убыли потенциала, а его величина – это скорость убыли потенциала при смещении вдоль силовой линии на единицу длины. В рассматриваемой задаче при смещении от пластины 1 к пластине 2 потенциал падает со скоростью E , а при смещении от пластины 2 к пластине 3 потенциал падает со скоростью $\tilde{E}$. Тогда разность потенциалов пластин 1 и 3 равна

$$(\varphi_1 - \varphi_3) = Ed + \tilde{E}d = \frac{\sigma}{\epsilon_0}d + 3\frac{\sigma}{\epsilon_0}d = \\ = 4\frac{\sigma}{\epsilon_0}d = 4 \cdot \frac{1,77 \cdot 10^{-9}}{8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot 0,01 = 8 \text{ В.}$$

Задача 9. К батарее подключен резистор сопротивлением $R = 16 \text{ Ом}$. Напряжение на зажимах батареи $U_1 = 10 \text{ В}$. Если к батарее подключить второй такой же резистор, то напряжение на зажимах батареи



станет равным $U_2 = 7$ В. Найдите внутреннее сопротивление r батареи.

Решение. Закон Ома для полной цепи $E = Ir + IR$, перепишем в виде

$$E = \frac{U}{R}r + U,$$

здесь $U = IR$ — напряжение на зажимах батареи. Тогда в первом случае

$$E = \frac{U_1}{R}r + U_1.$$

Во втором случае два одинаковых резистора соединены параллельно, их эквивалентное сопротивление равно $\frac{R}{2}$. Следовательно, в этом случае

$$E = \frac{2U_2}{R}r + U_2.$$

Из приведенных соотношений следует

$$\frac{U_1}{R}r + U_1 = 2 \frac{U_2}{R}r + U_2.$$

Отсюда

$$r = \frac{U_1 - U_2}{2U_2 - U_1}R = \frac{10 - 7}{2 \cdot 7 - 10} \cdot 16 = 12 \text{ Ом}.$$

Задача 10. На горизонтальной пластине лежит груз. Пластина, оставаясь горизонтальной, совершает гармонические колебания по вертикали с амплитудой смещения $X_{\text{MAX}} = 16$ см. Силы, с которыми груз действует на пластину в точках остановки, отличаются по величине в $\alpha = 4,5$ раза. Найдите V_{MAX} — амплитуду колебаний скорости пластины с грузом. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Решение. В процессе гармонических колебаний амплитуды скорости и смещения связаны соотношением

$V_{\text{MAX}} = \omega X_{\text{MAX}}$. Для ответа на вопрос задачи найдём циклическую частоту ω , с которой пластина и груз совершают гармонические колебания. Для этого обратимся к уравнению движения груза

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N},$$

здесь $\vec{N}$ — сила нормальной реакции, с которой пластина действует на груз в процессе движения. Перейдем к проекциям сил и ускорения на вертикальную ось ЛСО

$$ma_x = -mg + N_x.$$

Следовательно, в любой точке $N_x = mg + ma_x$. При гармонических колебаниях ускорение груза в точках остановки максимально $a_{\text{MAX}} = \omega^2 X_{\text{MAX}}$ и направлено к положению равновесия. Тогда в нижней точке остановки

$$N_1 = mg + m\omega^2 X_{\text{MAX}},$$

в верхней

$$N_2 = mg - m\omega^2 X_{\text{MAX}}.$$

С учетом третьего закона Ньютона

$$\alpha = \frac{N_1}{N_2} = \frac{mg + m\omega^2 X_{\text{MAX}}}{mg - m\omega^2 X_{\text{MAX}}}.$$

Отсюда находим циклическую частоту

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{g}{X_{\text{MAX}}}}$$

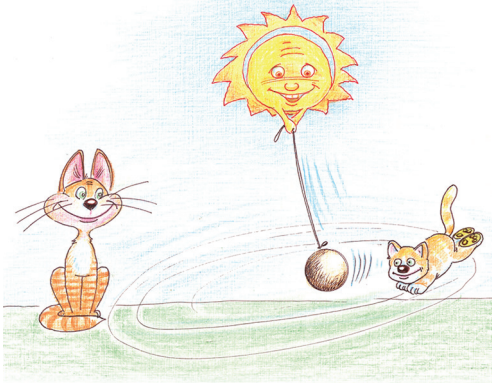
и амплитуду колебаний скорости пластины с грузом

$$\begin{aligned} V_{\text{MAX}} &= \omega X_{\text{MAX}} = \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} g X_{\text{MAX}}} = \\ &= \sqrt{\frac{4,5 - 1}{4,5 + 1}} \cdot 10 \cdot 0,16 \approx 0,1 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Обратимся к задачам финального этапа, прошедшего в декабре 2018 года более чем на сорока пло-

щадках в странах Европы, Азии, Африки и Америки. Рассмотрим один из вариантов.

Задача 1. Шарик массой $m = 0,2$ кг подвешен на лёгкой нити. Шарик отводят в сторону так, что нить принимает горизонтальное положение и отпускают. В дальнейшем шарик движется в вертикальной плоскости по дуге окружности с нулевой начальной скоростью. Найдите наименьшую величину $a_{\min}$ ускорения шарика. Найдите величину $T_{\max}$ наибольшей силы натяжения нити. Найдите величину $\tilde{T}$ силы натяжения нити в тот момент, когда ускорение шарика направлено горизонтально. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².



Решение. Найдём зависимость силы T натяжения нити и модуля $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$ ускорения от угла φ , который нить образует с вертикалью. Для этого запишем второй закон Ньютона для шарика $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$ и перейдем к проекциям сил и ускорения на нормальное и

тангенциальное направления. Получим (рис.5).

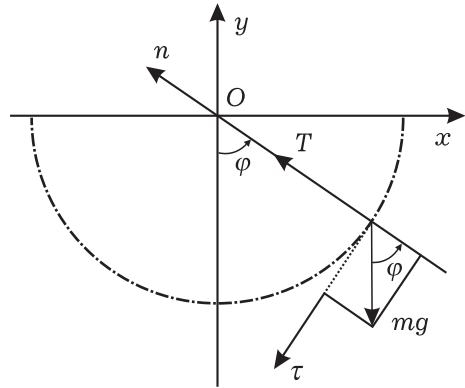


Рис. 5

$$m \frac{V^2}{l} = T - mg \cos \varphi, \quad m a_\tau = mg \sin \varphi.$$

Далее обратимся к энергетическим соображениям. Рассеяния энергии нет, сила натяжения перпендикулярна скорости, работа этой силы нулевая. Тогда на любом перемещении шарика приращение кинетической энергии равно убыли потенциальной

$$m \frac{V^2}{2} = mgl \cos \varphi.$$

Из приведенных соотношений находим

$$T(\varphi) = 3mg \cos \varphi,$$

$$a_n(\varphi) = \frac{V^2}{l} = 2g \cos \varphi, \quad a_\tau(\varphi) = g \sin \varphi.$$

Величина вектора ускорения в рассматриваемый момент времени

$$a(\varphi) = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(2g \cos \varphi)^2 + (g \sin \varphi)^2} = g \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}.$$

Отсюда следует: величина ускорения наименьшая $a_{\min} = g = 10$ м/с²



при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т.е. в момент старта, в свою очередь, сила натяжения нити наибольшая по величине $T_{\max} = 3mg = 3 \cdot 0,2 \cdot 10 = 6 \text{ Н}$ при $\varphi = 0$, т.е. в момент прохождения положения равновесия.

Вертикальная проекция ускорения равна нулю в тот момент, когда сумма сил в проекции на вертикаль равна нулю,

$$T \cos \varphi = mg, \quad 3mg \cos^2 \varphi = mg, \\ \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

В этот момент

$$T = \frac{mg}{\cos \varphi} = \sqrt{3}mg \approx 1,73 \cdot 0,2 \cdot 10 = 3,46 \text{ Н}.$$

Задача 2. В цилиндре с гладкими стенками под покоящимся поршнем находятся вода и влажный воздух при температуре $t_1 = 8^\circ \text{C}$. Площадь поперечного сечения сосуда $S = 120 \text{ см}^2$, масса M поршня такова, что $Mg = 0,4P_0S$, здесь $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$ — давление в окружающей атмосфере, $g = 10 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения. Высота поршня над поверхностью воды $h = 8 \text{ см}$. Найдите массу M_1 сухого воздуха в цилиндре. Давление пара воды при температуре $t_1 = 8^\circ \text{C}$ считайте пренебрежимо малым. Температуру в цилиндре медленно увеличивают до $t_2 = 100^\circ \text{C}$, часть воды испаряется. На каком расстоянии H от поверхности воды остановится поршень? Универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$. Молярная масса воздуха $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

Решение. Следуя условию задачи, считаем, что в начальном состоянии давление P_1 в цилиндре — это давление сухого воздуха. Из условия покоя поршня $P_1S = Mg + P_0S$ с учётом равенства $Mg = 0,4P_0S$ следует $P_1 = 1,4P_0$. Массу сухого воздуха в цилиндре найдём из уравнения состояния идеального газа

$$1,4P_0Sh = \frac{M_1}{\mu}RT_1, \quad M_1 = \frac{1,4P_0Sh\mu}{RT_1} = \\ = \frac{1,4 \cdot 10^5 \cdot 0,012 \cdot 0,08 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 281} \approx \\ \approx 1,67 \cdot 10^{-3} \text{ кг},$$

В конечном состоянии давление влажного воздуха в цилиндре по прежнему равно $1,4P_0$. Парциальное давление насыщенного водяного пара при $t_2 = 100^\circ \text{C}$ равно $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$, тогда парциальное давление сухого воздуха в конечном состоянии $0,4P_0$. Из уравнения состояния для сухого воздуха

$$\frac{1,4P_0Sh}{T_1} = \frac{0,4P_0SH}{T_2},$$

приходим к ответу на вопрос задачи

$$H = \frac{7}{2} \frac{T_2}{T_1} h = \frac{7 \cdot 373}{2 \cdot 281} \cdot 8 \approx 37 \text{ см}.$$

Задача 3. Электрическая цепь (рис.6) состоит из батарейки с ЭДС E и внутренним сопротивлением r , конденсатора ёмкостью C и резистора сопротивлением $R = 2r$. Ключ K замыкают, а затем размыкают в тот момент, когда тепловая мощность, рассеиваемая в резисторе R , в два раза меньше мощности, рассеиваемой на внутреннем сопротивлении батареи.

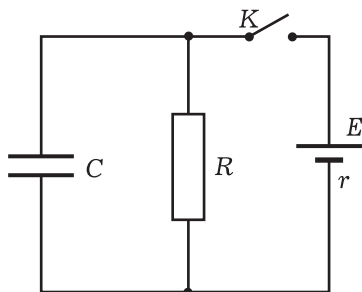


Рис. 6

С какой скоростью I_0 растёт заряд конденсатора сразу после замыкания ключа? Найдите напряжение U_C на конденсаторе перед размыканием ключа. Какое количество Q теплоты выделится на резисторе R после размыкания ключа?

Решение. Сразу после замыкания ключа конденсатор не заряжен. Тогда напряжение на параллельно соединённых конденсаторе и резисторе R нулевое. Ток через резистор R не течёт. В контуре, состоящем из батарейки и конденсатора, течёт ток $I_0 = \frac{E}{r}$. Это и есть скорость, с которой растёт заряд конденсатора сразу после замыкания ключа.

По условию за мгновение до размыкания

$$I_R^2 2r = 0,5 \cdot (I_R + I_C)^2 r, \text{ отсюда } I_R = I_C.$$

В этот момент

$$E = I_R R + (I_R + I_C) r = 2I_R R + 2I_R r,$$

$$U_R = I_R 2r = \frac{E}{2} = U_C.$$

Сразу после размыкания ключа заряд на конденсаторе не изменится. Далее по закону сохранения энергии в процессе разрядки конденсатора на резисторе R выделится количест-

во теплоты, равное энергии, запасённой в электрическом поле конденсатора к моменту размыкания ключа,

$$Q = \frac{C}{2} \left(\frac{E}{2} \right)^2 = \frac{CE^2}{8}.$$

Задача 4. Протон, ускоренный разностью потенциалов $U = 500$ кВ, влетает в поперечное однородное магнитное поле, вектор скорости $\vec{V}_0$ перпендикулярен плоскости границы поля (рис.7). Ширина области поля $d = 20$ см. За время движения в магнитном поле вектор скорости протона поворачивается на угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Масса протона $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, элементарный заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

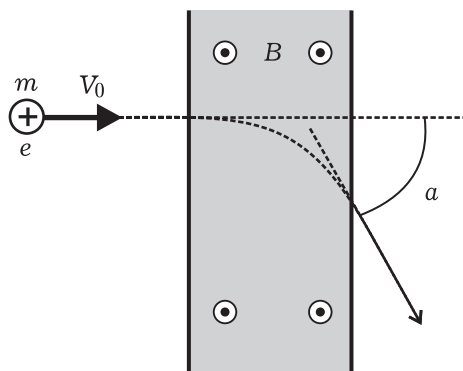


Рис. 7

За какое время τ протон пролетает область поля? Найдите величину B вектора индукции однородного магнитного поля.

Решение. Скорость V_0 протона при вылете из ускоряющего электрического поля найдем по теореме

об изменении кинетической энергии

$$\frac{mV_0^2}{2} = eU. \text{ Отсюда}$$

$$V_0 = \sqrt{2 \frac{e}{m} U} = \sqrt{2 \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{1,67 \cdot 10^{-27}} \cdot 5 \cdot 10^5} \approx 9,8 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

В области, где создано однородное магнитное поле, протон движется по дуге окружности. В любой точке дуги скорость перпендикулярна радиусу. Следовательно, угловая мера дуги равна углу поворота вектора скорости протона за время движения в магнитном поле. Отсюда $\sin \alpha = \frac{d}{R}$, $R = \frac{d}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2d = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м.}$

Продолжительность движения протона в магнитном поле равна длине дуги, делённой на скорость,

$$\tau = \frac{R\alpha}{V_0} = \frac{0,4 \cdot 3,14}{6 \cdot 9,8 \cdot 10^6} \approx 2,1 \cdot 10^{-8} \text{ с.}$$

Далее, по второму закону Ньютона при движении протона в магнитном поле $\frac{mV_0^2}{R} = eV_0 B$. Отсюда

$$B = \frac{mV_0}{eR} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9,8 \cdot 10^6}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,4} \approx 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ Тл.}$$

Задача 5. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 15 \text{ см}$ создаёт на экране изображение стрелки, перпендикулярной главной оптической оси линзы, с увеличением $\Gamma_1 = 3$. Линзу перемещают в направлении главной оптической оси. Стрелка и экран неподвижны.

Найдите перемещение S линзы к моменту, когда на экране вновь наблюдается четкое изображение.

Найдите увеличение Γ_2 , с которым изображается стрелка после перемещения линзы.

Решение. Ход лучей, формирующих изображение, показан на рис. 8.

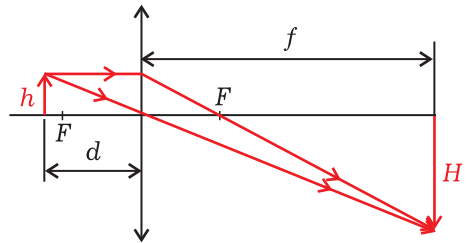


Рис. 8

По условию задачи линза собирающая, расстояние от предмета до экрана фиксировано. В общем случае из формулы линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ и равенства $d + f = L$, здесь L – расстояние между предметом и экраном, получаем квадратное уравнение для определения расстояния d от предмета до линзы

$$d^2 - dL + FL = 0,$$

корни которого

$$d_{1,2} = \frac{L}{2} \pm \sqrt{\frac{L^2}{4} - FL}$$

будут действительными числами при $L \geq 4F$. Из решения квадратного уравнения следует: при фиксированном $L > 4F$ существуют два положения линзы, при которых на экране наблюдается действительное изображение. Эти положения симметричны относительно середины

отрезка, на концах которого расположены предмет и экран. Впрочем, все это следует из обратимости хода световых лучей.

В рассматриваемой задаче в первом случае

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}, \quad \Gamma_1 = \frac{H}{h} = \frac{f_1}{d_1},$$

отсюда
$$d_1 = F \frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1}.$$

Далее
$$L = d_1 + f_1 = F \frac{(\Gamma_1 + 1)^2}{\Gamma_1},$$

перемещение линзы

$$S = L - 2d_1 = F \frac{\Gamma_1^2 - 1}{\Gamma_1} = 15 \cdot \frac{3^2 - 1}{3} = 40 \text{ см.}$$

Во втором случае $f_2 = d_1$, $d_2 = f_1$,

тогда
$$\Gamma_2 = \frac{f_2}{d_2} = \frac{d_1}{f_1} = \frac{1}{\Gamma_1} = \frac{1}{3}.$$



Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Физтехи создали флуоресцентный белок с уникальными свойствами

Биофизики из МФТИ в сотрудничестве с учеными из Института структурной биологии (Гренобль, Франция), Исследовательского центра г. Юлих (Германия) и Рейнско-Вестфальского технического университета Ахена (Германия) обнаружили



в клетках термофильной бактерии белок, принадлежащий к семейству так называемых LOV-доменов (light oxygen voltage). Изучив его, ученые сконструировали новый хорошо кристаллизующийся флуоресцентный белок беспрецедентно малого размера и невиданной прежде термостабильности. Этот белок, по мнению создателей, позволит открыть новые горизонты в изучении функционирования клеток раковых опухолей – исследовании процессов их размножения, роста и

метастазирования – или, например, термофильных бактерий. Работа опубликована в журнале Photochemical & Photobiological Sciences.

Свелящиеся бактерии *Escherichia coli* с флуоресцентным белком из *Chloroflexus aggregans* на чашке Петри в форме символа МФТИ. Предоставлено авторами исследования.

https://mipt.ru/news/fiztekhi_sozdali_fluorestsentyy_belok_s_unikalnyimi_svoystvami