Дроздов Виктор Борисович
Преподаватель физики Медицинского университета г. Рязани, кафедра физики. Почётная грамота Министерства просвещения СССР 1979 г.

Произвольный треугольник

Сюжет этой статьи возник при изготовлении рисунка треугольника к другой статье. Один раз произвольный треугольник случайно оказался почти равнобедренным, «лежащим» на боковой стороне, другой раз – весьма близким к прямоугольному.

Поскольку форма треугольника определяется двумя углами α и β (третий угол $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$), то найдём углы треугольника, который объективно максимально отличается от двух названных выше частных случаев, а также от вырожденного варианта – отрезка. Не умаляя общности, считаем, что $\alpha < \beta < \gamma$. Конечно, объективный критерий вряд ли может претендовать на единственность, но математическая разумность его обязательна.

Начнём с остроугольного треугольника. Введём следующую функцию его углов:

$$F = \alpha(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(90 - \gamma) =$$
$$= \alpha(\beta - \alpha)(180 - \alpha - 2\beta)(\alpha + \beta - 90). \quad (1)$$

Ясно, что каждый сомножитель в правой части формулы (1) неотрицателен и во всех частных случаях треугольника $F = 0$.

Естественно найти углы треугольника, при которых функция F принимает наибольшее значение, и считать такой треугольник «максимально произвольным». Двойные неравенства

$$0 < \alpha < \beta \text{ и } 90 - \alpha < \beta < 90 - \frac{\alpha}{2}$$

определяют заштрихованную на рис. 1 область изменения величин α и β – треугольник, на сторонах и в вершинах которого $F = 0$. Определить наибольшее (или наименьшее) значение функции двух переменных можно по аналогии с функцией одной переменной. В самом деле, мысленно зафиксируем произвольное допустимое значение переменной β. Эта операция правомерна именно в силу произвольности фиксируемого значения β. Тогда функция (1) как бы превращается в функцию одной переменной α.

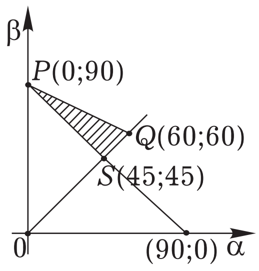

Рис. 1

Находим производную F'_α и приравниваем её к нулю (такая производная называется частной производной от функции $F(\alpha,\beta)$ по α и обозначается $\dfrac{\partial F(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}$). Затем делаем то же самое, фиксируя α. Произведение четырёх сомножителей удобнее здесь дифференцировать по формуле:

$$(U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdot U_4)' = (U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdot U_4)\times$$
$$\times\left(\frac{U'_1}{U_1}+\frac{U'_2}{U_2}+\frac{U'_3}{U_3}+\frac{U'_4}{U_4}\right).$$

В результате имеем систему уравнений

$$\begin{cases} F(\alpha,\beta)\cdot\left(\begin{array}{l}\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta-\alpha}-\dfrac{1}{180-\alpha-2\beta}+\\ +\dfrac{1}{\alpha+\beta-90}\end{array}\right)=0,\\ F(\alpha,\beta)\cdot\left(\begin{array}{l}\dfrac{0}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta-\alpha}-\dfrac{2}{180-\alpha-2\beta}+\\ +\dfrac{1}{\alpha+\beta-90}\end{array}\right)=0,\end{cases}$$

которая приводится к системе двух уравнений второй степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}\alpha^2-\beta^2+3\alpha\beta-270\alpha+90\beta=0,\\ 3\alpha^2-\beta^2+\alpha\beta-225\alpha+90\beta=0.\end{cases}$$

Система уравнений такого вида решается по общему правилу и в самом неблагоприятном случае сводится к уравнению четвёртой степени. А именно, исключаем квадрат любого неизвестного, например β^2, и из получившегося равенства выражаем β через α. Подставив найденное значение β в любое уравнение, получим уравнение четвёртой степени относительно α. Но в нашем случае решение гораздо проще: в обоих уравнениях есть одинаковое выражение $90\beta-\beta^2$. Воспользовавшись этим, увидим, что $\beta=\alpha+\dfrac{45}{2}$.

Тогда для определения α имеем квадратное уравнение

$$4\alpha^2-210\alpha+2025=0$$

с корнями $\alpha_{1,2}=\dfrac{105\pm15\sqrt{13}}{4}$. Подходит лишь один корень, соответствующий знаку «плюс», ибо другой корень вместе с найденным значением β даёт точку, лежащую вне области определения функции F. Приближённые значения искомых углов таковы:

$$\alpha\approx39{,}77^\circ,\quad \beta=62{,}27^\circ,\quad \gamma\approx77{,}96^\circ.$$

Поскольку по периметру области определения значение исследуемой функции равно нулю, то в обнаруженной точке достигается наибольшее значение функции F:

$$F_{\max}=\frac{455625}{32}\left(13\sqrt{13}-35\right)\approx169039.$$

Для тупоугольного треугольника решение принципиально похоже на предыдущее, поэтому обозначим только ключевые моменты. Критериальная функция

$$F_1=\alpha(\beta-\alpha)(90-\beta)(\gamma-90)=$$
$$=\alpha(\beta-\alpha)(90-\beta)(90-\alpha-\beta)$$

имеет область определения, задаваемую неравенствами $0<\alpha<\beta<90$ и $\alpha+\beta<90$, изображённую на рис. 2.

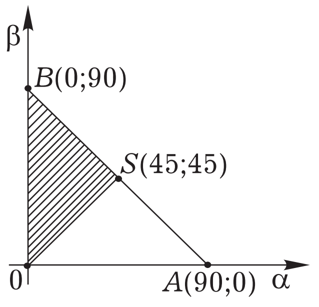

Рис. 2

Углы α и β определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta-\alpha}-\dfrac{1}{90-\alpha-\beta}=0, \\ \dfrac{1}{\beta-\alpha}-\dfrac{1}{90-\beta}-\dfrac{1}{90-\alpha-\beta}=0, \end{cases}$$

легко приводимой к виду

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2-4\alpha\beta+270\alpha-90\beta=0, \\ \alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta-360\alpha-180\beta+8100=0. \end{cases}$$

Далее применяем общий способ решения: $\beta=\dfrac{315\alpha-4050}{4\alpha-45}$ и из уравнения $8\alpha^2-540\alpha+6075=0$ находим:

$$\alpha=\frac{45\left(3-\sqrt{3}\right)^\circ}{4}\approx 14{,}26^\circ,$$

$$\beta=\frac{45\left(5-\sqrt{3}\right)^\circ}{4}\approx 36{,}76^\circ,$$

$$\gamma=\frac{45\left(4+\sqrt{3}\right)^\circ}{2}\approx 128{,}97^\circ.$$

При этом

$$F_{\max}=24\left(\frac{45}{4}\right)^4\sqrt{3}\approx 665859.$$

А теперь начертите оба треугольника и убедитесь зрительно, что они удовлетворяют Вашим ожиданиям. Попробуйте придумать иные критериальные функции и найти соответствующие им треугольники.