Александров Дмитрий Анатольевич
Член жюри Всероссийских олимпиад школьников по физике, заместитель заведующего кафедрой общей физики Московского физико-технического института (МФТИ).

Про среднюю скорость

На примере задач на нахождение средней скорости простых движений обсуждаются стиль решения задач, методы анализа получаемых ответов и общие соображения, применяемые опытными решателями в борьбе с настоящими сложными задачами.

Введение

Эта статья посвящена нахождению средней скорости кусочно-равномерного движения, то есть движения, состоящего из нескольких последовательно проходимых участков, на каждом из которых движение равномерно. Невзрачная на первый взгляд тема даёт возможность продемонстрировать:

- необходимость умения считать, причём не только «в числах», но и «в буквах» (сразу очевидный ответ к «простой» задаче может оказаться неверным);
- после получения правильного ответа (формулы) полезно *понять*, что он означает;
- почему вычисления «в числах», как правило, хуже решения задачи в общем виде;
- как протестировать ответ на правильность с помощью соображений размерности и предельных случаев;
- как из тех же соображений иногда удаётся написать ответ к задаче, не решая её.

Для обсуждения затронутого круга вопросов никаких предварительных знаний не требуется (формулу $S = vt$ для равномерного движения знают все), что позволяет в самом начале изучения курса физики привить правильный стиль решения задач и анализа полученных результатов.

Средней скоростью называют скорость такого равномерного движения, при котором тот же путь проходится за то же время.

Попробуем решить

Задача 1. Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 40 км/ч, а вторую — со скоростью 60 км/ч. Какова средняя скорость автомобиля?

Решение. Кажется очевидным, что ответ к этой задаче 50 км/ч. Разве может быть как-нибудь иначе? Однако проверим. Пусть, например, весь путь был равен 240 км. Тогда на дорогу автомобиль затратил

$$\frac{120}{40}+\frac{120}{60}=3+2=5\ (\text{часов}),$$

а при скорости 50 км/ч он затратил бы

$$\frac{240}{50}=4{,}8\ (\text{часа}).$$

Не сходится!

Если не 50, то сколько? Разделив 240 километров на 5 часов, получаем 48 км/ч. Странно. Может это 240 такое неудачное число? Нет. Легко видеть, что ответ не зависит от длины пути. Увеличив, например, все расстояния вдвое, мы также увеличиваем вдвое и все времена, а средняя скорость при этом не изменится. Да и одного «неудачного» значения 240 достаточно для того, чтобы ответ 50 км/ч перестал быть правильным.

Можно и непосредственно проверить, что от расстояния ответ не зависит. Заодно и задачу решим. Обозначим весь путь через $2S$ и убедимся, что при вычислении средней скорости S сокращается:

$$v_{\text{ср}}=\frac{2S}{t}=\frac{2S}{\dfrac{S}{40}+\dfrac{S}{60}}=\frac{2}{\dfrac{1}{40}+\dfrac{1}{60}}=$$

$$=2\cdot\frac{120}{5}=48\ \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right).$$

Кстати, опять получилось 48. Почему же не 50?

Попробуем понять

Чтобы разобраться в этом, представим себе, что одновременно с выездом автомобиля мы выпустили ещё и птичку, летящую со скоростью 50 км/ч. Как мы уже знаем, она должна прилететь на 0,2 часа раньше автомобиля, затратив 4,8 часа вместо 5. Поначалу она действительно вырвется вперёд, так как её скорость на 10 км/ч больше, но потом, когда автомобиль проедет половину пути, птичка будет с такой же скоростью 10 км/ч терять набранную фору. Почему же она, тем не менее, прилетит раньше? Да потому, что со скоростью 40 км/ч автомобиль ехал *дольше*, чем со скоростью 60 км/ч. В полтора раза дольше.

Времена, затраченные автомобилем на прохождение половин пути, относятся как скорости, то есть 3 : 2. Для того, чтобы птичка прилетела одновременно с автомобилем, скорость, с которой он набирает фору, должна быть в полтора раза меньше скорости, с которой она её теряет.

Интересно, какое число в полтора раза ближе к 40, чем к 60, уж не 48 ли?

Сможете ли вы теперь дать ответ к следующей задаче?

Задача 2. Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 60 км/ч, а вторую — со скоростью 30 км/ч. Какова средняя скорость автомобиля?

Требуется не написать решение с формулами, а именно дать ответ.

Решение. Поскольку 60 в два раза больше, чем 30, то нужно найти число, которое в два раза ближе к 30, чем к 60. Это 40.

Заметьте, что если мы не просто решили задачу, а действительно *поняли*, что происходит, то следующую такую же задачу можно решить сразу *из общих соображений*. Без понимания пришлось бы решать заново, повторяя все вычисления.

Решение задач в общем виде

Задача 2 отличается от задачи 1 только численными значениями скоростей. Можно сразу решить все такие задачи, сделав это, как говорят, в общем виде.

Обозначим весь путь $2S$, скорость на первой половине — v_1, скорость на второй половине — v_2 и повторим вычисление средней скорости в этих обозначениях:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2S}{t} = \frac{2S}{\dfrac{S}{v_1} + \dfrac{S}{v_2}} = \frac{2}{\left(\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2}\right)} = \\ = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}. \qquad (1)$$

Мы решили сразу все такие задачи-близнецы, но это не единственное и не главное преимущество такого метода. Результат, записанный в общем виде, показывает закономерности, которые совершенно незаметны при взгляде на просто число (например, независимость величины средней скорости от расстояния S). Кроме того, такая запись позволяет проверять себя на предмет вычислительных и идейных ошибок.

Анализ ответа

Доведя решение задачи до ответа, возникает естественное желание как-то себя проверить, особенно если пришлось проводить громоздкие вычисления, в которых нетрудно было ошибиться. Школьники обычно заглядывают в конец задачника на страничку с ответами, но в реальной жизни правильный ответ заранее неизвестен, и эта привычка на самом деле является вредной. Оказывается, существуют методы тестирования полученного ответа на предмет его правильности, исходя из него самого. Обсудим на примере только что решённой задачи два основных способа, позволяющих в случае ошибочного решения заподозрить неладное.

Во-первых, любой результат должен иметь правильную размерность. В нашем случае всё хорошо: в числителе — квадрат скорости, в знаменателе — скорость. Делим — получается скорость.

Во-вторых, ответ должен правильно описывать так называемые предельные случаи, то есть такие частные значения параметров, при которых ответ очевиден сам собой без всяких вычислений. Например, если $v_1 = v_2 = v$, то есть автомобиль просто проехал всё расстояние с постоянной скоростью, то и средняя скорость у него будет такая же. Наш ответ эту проверку выдерживает:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2vv}{v+v} = \frac{2v^2}{2v} = v.$$

Приятно, что ответ симметричен: если поменять местами индексы 1 и 2, ничего не изменится. Из условия ясно, что так и должно быть: половинки пути одинаковые.

Если $v_1 = 0$ или $v_2 = 0$ наш ответ тоже даёт 0, и это хорошо, так как в этом случае пришлось бы ждать, пока автомобиль проедет половину пути с нулевой скоростью, а этого никогда не произойдёт. Кстати, из этого предельного случая сразу (ничего не решая) ясно, что ответ $v_{\text{ср}} = (v_1 + v_2)/2$ правильным быть не может.

Рассмотрим теперь более тонкий случай: $v_1 \gg v_2$. Подумаем сначала, что *должно* получиться. Автомобиль очень быстро, практически мгновенно пролетает половину пути, а затем ползёт с черепашьей скоростью v_2 (самолёт сломался, и они пошли пешком). Средняя скорость получается $2v_2$, так как за время, за которое со скоростью v_2 проходится половина пути, автомобиль преодолел весь путь (или, более формально, это можно получить, разделив весь путь $2S$ на всё время S/v_2). Наша формула (1) даёт то же самое, если в знаменателе пренебречь v_2 по сравнению с v_1:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} \approx \frac{2v_1v_2}{v_1+\cancel{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1} = 2v_2.$$

Синтез ответа

Конечно, рассмотрение даже большого количества предельных случаев не может гарантировать правильность ответа на все 100%. Оно может лишь помочь, хотя и весьма существенно, не пропустить неправильный ответ. Но, с другой стороны, наличие достаточного количества предельных случаев позволяет спрогнозировать правильный ответ. Попробуйте, например, придумать выражение из двух переменных a и b, удовлетворяющее следующим условиям:

1. если $a = b$, то и всё выражение равно a;
2. выражение симметрично, то есть, если поменять местами a и b, оно не изменится;
3. если какая-либо из величин a и b равна нулю, то и всё выражение равно нулю;
4. если $a \gg b$, то выражение равно $2b$;
5. и, наконец, оно правильно по размерности, это значит, в частности, что если и a и b одновременно увеличить в n раз, то и всё выражение увеличится в n раз. Так должно быть, потому что результат не должен зависеть от выбора единиц измерения для скорости. Если выразить те же скорости не в км/ч, а в м/с, то все числа станут в 3,6 раза меньше (40 км/ч $= 11\frac{1}{9}$ м/с, 60 км/ч $= 16\frac{2}{3}$ м/с), но и получить мы должны не 48 км/ч, а $13\frac{1}{3}$ м/с.

Выбора почти не остаётся. Из условия 3 ясно, что a и b должны входить множителями, но выражение ab не годится по размерности (условие 5). Нужно разделить на что-то, не испортив симметрию (условие 2). Напрашивается $\frac{ab}{a+b}$, что для выполнения условия 1 придётся умножить на 2. Как видите, правильный ответ $\dfrac{2ab}{a+b}$ удалось получить даже без условия 4.

Выражение $\dfrac{ab}{a+b}$ — самый простой способ удовлетворить условиям 2, 3, 5 и, конечно, не единственно возможный. Можно предложить, например, $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или того круче, но разумно попробовать обойтись самым простым подходящим вариантом. Тут работает соображение типа: «если я начну решать честно систему достаточно простых уравнений, то как смогут получиться такие сложные комбинации?». Можно, однако, и непосредственно убедиться, что подправленное условием 1 выражение $\dfrac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ не удовлетворяет условию 4.

Подобные рассуждения, часто воспринимаемые поначалу как простой подгон, — не такая уж пустая игра. Хорошо нам решать задачи из разделов физики, где все законы уже давно открыты и многократно проверены. А что делать физику, работающему на переднем крае науки, о котором он ещё почти ничего не знает? Тут может оказаться, что написанная впервые из неких соображений формула сама по себе является большим достижением. Если сравнение с экспериментом покажет, что формула верна, ею будут пользоваться независимо от того, каким способом она было получена.

Задача 3. Первую половину времени автомобиль ехал со скоростью v_1, а вторую половину — со скоростью v_2. Какова была средняя скорость автомобиля?

Решение. Ну уж здесь-то будет $(v_1+v_2)/2$? Да, так как времена теперь одинаковы по условию. Это легко получить непосредственно. Если весь путь S, а всё время $2t$, то

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{2t} = \frac{v_1t + v_2t}{2t} = \frac{v_1+v_2}{2}.$$

Задача 4. Треть всего пути автомобиль проехал со скоростью v_1, а остальное — со скоростью v_2. Какова была средняя скорость автомобиля?

Решение. Попробуем сначала «угадать» (синтезировать) ответ. Симметричным он быть уже не обязан, но, по-прежнему, если хотя бы одна из скоростей равна нулю, то и средняя скорость — ноль. Поэтому ответ скорее всего имеет вид:

$$v_{\text{ср}} = \frac{Av_1v_2}{\alpha v_1 + \beta v_2}, \qquad (2)$$

где A, α и β — некоторые числа. Ясно, что $A = \alpha+\beta$, иначе не сойдётся при $v_1 = v_2$. Также ясно, что если эти числа одновременно умножить на какое-нибудь число, ответ не изменится. Поэтому достаточно найти отношение $\alpha : \beta$.

При $v_1 \gg v_2$ получается, что мгновенно пролетается треть пути, а затем, со скоростью v_2 проходятся две трети. Это значит, что средняя скорость в этом случае должна быть равна $3v_2/2$ (в полтора раза больший путь за то же время). Формула (2) даёт $v_{\text{ср}} = Av_2/\alpha$, следовательно $A/\alpha = 3/2$.

Аналогично, при $v_1 \ll v_2$, получаем $A/\beta = 3$. Таким образом $\alpha : \beta = 2 : 1$ и ответ принимает вид

$$v_{\text{ср}} = \frac{3v_1v_2}{2v_1+v_2}.$$

Теперь можно и решить. Пусть весь путь — $3S$, а всё время — t. Тогда:

$$v_{\text{ср}} = \frac{3S}{t} = \frac{3S}{\dfrac{S}{v_1}+\dfrac{2S}{v_2}} = \frac{3v_1v_2}{2v_1+v_2}.$$

Сошлось.

Задача 5. Треть всего времени автомобиль проехал со скоростью v_1, а остальное — со скоростью v_2. Какова была средняя скорость автомобиля?

Решение. Обозначим весь путь S, всё время $3t$. Тогда

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{3t} = \frac{v_1 t + v_2 2t}{3t} = \frac{v_1 + 2v_2}{3}.$$

Получившаяся средняя скорость в два раза ближе к v_2, чем к v_1, потому что со скоростью v_2 автомобиль двигался вдвое больше времени, чем с v_1. Решив следующие две задачи, можно найти общий вид выражений, обладающих подобным свойством.

Задача 6. Пусть даны два положительных числа a и b. Найдите лежащее между ними число x, которое в n раз ближе к a, чем к b.

Задача 7. Пусть даны два положительных числа a и b. Найдите число x, делящее отрезок числовой прямой ab в отношении $n : m$.

Задача 8. Первую треть пути автомобиль проехал со скоростью v_1, вторую треть — со скоростью v_2, остальное — со скоростью v_3. Какова была средняя скорость автомобиля?

Попробуйте написать ответ из общих соображений. Только не

$$\frac{3v_1v_2v_3}{v_1+v_2+v_3},$$

это заведомо неправильно из-за размерности. А теперь решите.

Задачи посложнее

Задача 9. Треть всего пути автомобиль ехал со скоростью v_1, затем четверть всего времени — со скоростью v_2, остальное — со скоростью v_3. Какова была средняя скорость автомобиля?

Решение. Обозначим весь путь через S, всё время — через t. Можно составить уравнение, выражающее весь путь как сумму трёх участков:

$$S = \frac{S}{3} + v_2\frac{t}{4} + v_3\left(t - \frac{t}{4} - \frac{S/3}{v_1}\right),$$

здесь в скобках стоит время, потраченное на последний участок.

Отсюда надо найти $v_{\text{ср}} = S/t$. Для этого нужно привести подобные члены, раскрыть скобки, перенести всё, что содержит S на одну сторону от знака равенства, а всё, что содержит t, на другую, вынести S и t за скобки и затем найти S/t. Приступим:

$$\frac{2}{3}S = v_2\frac{t}{4} + v_3\left(\frac{3}{4}t - \frac{S}{3v_1}\right),$$

$$\frac{2}{3}S + \frac{Sv_3}{3v_1} = v_2\frac{t}{4} + \frac{3}{4}v_3 t,$$

$$S\frac{2v_1+v_3}{3v_1} = t\frac{v_2+3v_3}{4},$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{v_2+3v_3}{4}\cdot\frac{3v_1}{2v_1+v_3} = \frac{3v_1(v_2+3v_3)}{4(2v_1+v_3)}.$$

Протестируем полученный ответ. Во-первых, он правилен по размерности. Затем, если $v_1 = v_2 = v_3 = v$, то

$$v_{\text{ср}} = \frac{3v(v+3v)}{4(2v+v)} = \frac{3v\cdot 4v}{4\cdot 3v} = v.$$

При $v_3 = v_2$ получается уже решённая ранее задача 4. Наш ответ даёт:

$$v_{\text{ср}} = \frac{3v_1(v_2+3v_2)}{4(2v_1+v_2)} =$$

$$= \frac{3v_1 \cdot 4v_2}{4(2v_1+v_2)} = \frac{3v_1v_2}{2v_1+v_2}.$$

При $v_3 = v_1$ получается задача, аналогичная 5. И здесь наш ответ хорош:

$$v_{\text{ср}} = \frac{3v_1(v_2+3v_1)}{4(2v_1+v_1)} =$$

$$= \frac{3v_1(v_2+3v_1)}{4\cdot 3v_1} = \frac{3v_1+v_2}{4}.$$

Если $v_1 = 0$, то получается ноль и это хорошо. Ведь если автомобиль будет стоять на месте, пока не проедет треть всего пути, он не проедет его никогда. Средняя скорость в этом случае должна равняться нулю. А вот если v_2 или v_3 равны нулю, то ноль не получается, и это тоже правильно (простоять четверть времени, а затем поехать и достичь финиша вполне возможно).

Задача 10. Треть всего времени автомобиль ехал со скоростью v_1, затем четверть всего пути — со скоростью v_2, остальное — со скоростью v_3. Какова была средняя скорость автомобиля?

Решение. Поступая аналогично предыдущей задаче, из уравнения

$$S = \frac{t}{3}v_1 + \frac{S}{4} + v_3\left(t - \frac{t}{3} - \frac{S/4}{v_2}\right)$$

находим

$$v_{\text{ср}} = \frac{4v_2(v_1+2v_3)}{3(3v_2+v_3)}.$$

Можно было записать уравнение не для пути, а для времени:

$$t = \frac{t}{3} + \frac{S/4}{v_2} + \left(S - v_1\frac{t}{3} - \frac{S}{4}\right)/v_3.$$

Из него получается, естественно, то же самое, но чуть дольше. Проведите эти выкладки самостоятельно.

Задача 11. Треть всего пути автомобиль ехал со скоростью v_1, затем четверть оставшегося времени — со скоростью v_2, остальное — со скоростью v_3. Какова была средняя скорость автомобиля?

Решение. Из уравнения

$$S = \frac{S}{3} + v_2\cdot\frac{1}{4}\left(t - \frac{S/3}{v_1}\right) + v_3\cdot\frac{3}{4}\left(t - \frac{S/3}{v_1}\right)$$

находим

$$v_{\text{ср}} = \frac{3v_1(v_2+3v_3)}{8v_1+v_2+3v_3}.$$

Проверьте этот ответ на предельные случаи самостоятельно.

Эту задачу можно решить и по-другому.

Средняя скорость на двух последних участках $u = (v_2+4v_3)/5$. Если заменить реальное движение автомобиля на этих участках на равномерное движение с этой скоростью, общее время не изменится, значит, не изменится и общая средняя скорость. Но после этого мы получаем уже решённую задачу 4, в ответ которой вместо v_2 нужно подставить u.

Задача 12. Треть всего времени автомобиль ехал со скоростью v_1, затем четверть оставшегося пути — со скоростью v_2, остальное — со скоростью v_3. Какова была средняя скорость автомобиля?

Решение. Здесь намного удобнее писать уравнение для времени:

$$t = \frac{t}{3} + \frac{\frac{1}{4}\left(S - v_1\frac{t}{3}\right)}{v_2} + \frac{\frac{3}{4}\left(S - v_1\frac{t}{3}\right)}{v_3},$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{8v_2v_3 + 3v_1v_2 + v_1v_3}{3(3v_2+v_3)}.$$

Решите задачу другим способом и проверьте ответ на размерность и предельные случаи.

Задачи для самостоятельного решения

Требуется не просто решить задачу и получить ответ, но и *обоснованно* убедить себя, что он правильный.

Задача 13. Четверть всего пути автомобиль ехал со скоростью v_1, затем треть всего времени — со скоростью v_2, остальное — со скоростью v_3. Какова была средняя скорость автомобиля?

Задача 14. Четверть всего времени автомобиль ехал со скоростью v_1, затем треть всего пути — со скоростью v_2, остальное — со скоростью v_3. Какова была средняя скорость автомобиля?

Задача 15. Четверть всего пути автомобиль ехал со скоростью v_1, затем треть оставшегося времени — со скоростью v_2, остальное — со скоростью v_3. Какова была средняя скорость автомобиля?

Задача 16. Четверть всего времени автомобиль ехал со скоростью v_1, затем треть оставшегося пути — со скоростью v_2, остальное — со скоростью v_3. Какова была средняя скорость автомобиля?

Задача 17*. Треть всего пути автомобиль проехал с постоянной скоростью v_1. Затем треть всего времени он ехал с постоянной скоростью v_2. Найдите среднюю скорость на всём пути, если она оказалась равна средней скорости на оставшемся участке.