Паркевич Егор Вадимович
Студент 4 курса факультета проблем физики и энергетики МФТИ.

Принцип суперпозиции токов при расчёте параметров электрических схем

В данной работе на примерах решения задач показано, как можно использовать принцип суперпозиции токов при расчёте параметров электрических схем.

Сложную электрическую схему иногда удаётся представить в виде суперпозиции нескольких более простых схем, вычислить силу тока на каждом участке в каждой упрощённой схеме, а затем силу тока на каждом участке исходной схемы найти как суперпозицию токов на этих участках в каждой упрощённой схеме. Суперпозицию токов можно рассматривать как частный случай применения суперпозиции движений. Применяя принцип суперпозиции для расчёта токов, иногда удаётся избежать сложнейших расчётов и решить задачу в уме. В качестве примера рассмотрим решение следующей задачи.

Задача 1. Рассчитайте силу тока в каждом резисторе, если ЭДС источников тока $\mathscr{E}_1 = 2$ В, $\mathscr{E}_2 = 4{,}5$ В, их внутренние сопротивления $r_1 = 0{,}1$ Ом, $r_2 = 0{,}2$ Ом, сопротивления резисторов $R_1 = 0{,}3$ Ом, $R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 1{,}2$ Ом (рис. 1).

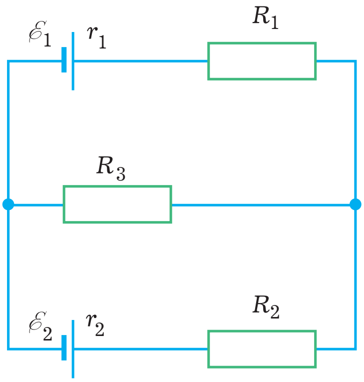


Рис. 1

Решение. Основная сложность данной задачи заключается в том, что в схеме имеются два источника тока. Такие задачи часто решают, используя правила Кирхгофа, изучение которых предусмотрено программами курсов углублённого изучения физики. Но в некоторых случаях более простым оказывается метод наложения, основанный на принципе суперпозиции токов. Чтобы не забывать учитывать внутренние сопротивления источников, сделаем их идеальными, а сопротивления резисторов, включённых последовательно с соответствующим источником тока, увеличим на значение внутреннего сопротивления этого источника (см. рис. 2 *а*).

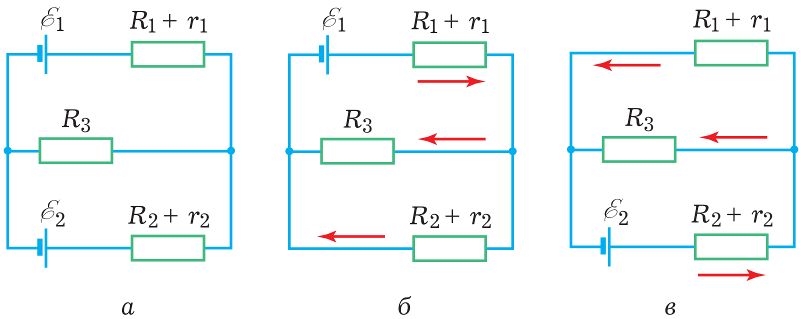


Рис. 2

Упростим данную схему: пусть ЭДС второго источника равна нулю, т. е. $\mathscr{E}_2 = 0$. Тогда схема примет вид, показанный на рис. 2 *б* (стрелками на схеме указано направление токов через резисторы). В этом случае токи через резисторы будут равны:

$$I_{11} = \frac{\mathscr{E}_1}{R_1 + r_1 + \dfrac{R_3(R_2 + r_2)}{R_3 + R_2 + r_2}} = 2 \text{ А},$$

$$I_{12} = \frac{\mathscr{E}_1 - I_{11}(R_1 + r_1)}{R_2 + r_2} = 1 \text{ А},$$

$$I_{13} = \frac{\mathscr{E}_1 - I_{11}(R_1 + r_1)}{R_3} = 1 \text{ А}.$$

Теперь рассмотрим вторую упрощённую схему, если допустить, что ЭДС первого источника $\mathscr{E}_1 = 0$ (см. рис. 2 *в*). В этом случае токи через резисторы будут равны:

$$I_{22} = \frac{\mathscr{E}_2}{R_2 + r_2 + \dfrac{R_3(R_1 + r_1)}{R_3 + R_1 + r_1}} = 3 \text{ А},$$

$$I_{21} = \frac{\mathscr{E}_2 - I_{22}(R_2 + r_2)}{R_1 + r_1} = 2,25 \text{ А},$$

$$I_{23} = \frac{\mathscr{E}_2 - I_{22}(R_2 + r_2)}{R_3} = 0,75 \text{ А}.$$

Заметим, что исходная схема является суперпозицией этих двух более простых схем, поэтому токи через каждый из резисторов будут являться суперпозицией соответствующих токов в упрощённых схемах. Таким образом, с учётом направления и числовых значений токов, получаем, что токи через резисторы будут равны:

$$I_1 = I_{21} - I_{11} = 0,25 \text{ А},$$

$$I_2 = I_{22} - I_{12} = 2 \text{ А},$$

$$I_3 = I_{13} - I_{23} = 1,75 \text{ А},$$

Ответ. $I_1 = 0,25$ А, $I_2 = 2$ А, $I_3 = 1,75$ А.

Задача 2. Определите показания амперметра и вольтметра в схеме, изображённой на рис. 3. Считать, что источники тока и измерительные приборы идеальные. Параметры схемы $\mathscr{E}$, R считать известными.

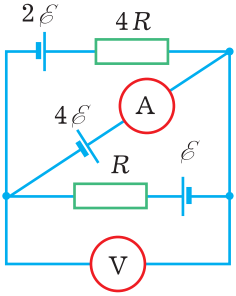


Рис. 3

Решение. Идеальные источники тока и идеальный амперметр не имеют электрического сопротивления. Идеальный вольтметр имеет бесконечно большое сопротивление. Для начала упростим схему, убрав идеальные измерительные приборы, см. рис. 4.

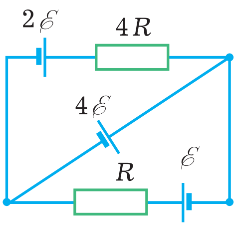


Рис. 4

Чтобы найти показания амперметра, необходимо найти силу тока через источник тока $4\mathcal{E}$. Для этого представим исходную схему как суперпозицию трёх более простых схем (см. рис. 5). На каждой из этих схем укажем направление тока на интересующем нас участке. Теперь легко получить соответствующие токи, создаваемые разными ЭДС; имеем:

$$I_1 = \frac{2\mathcal{E}}{4R} = 0{,}5 \cdot \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

$$I_3 = \frac{4\mathcal{E}}{0{,}8 \cdot R} = 5 \cdot \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

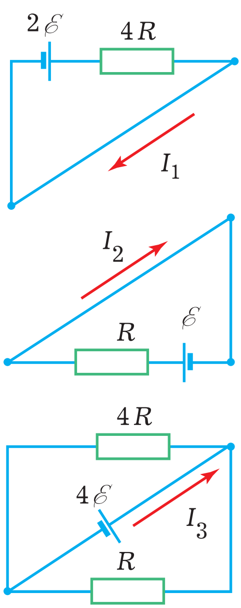


Рис. 5

Следовательно, ток через амперметр равен

$$I_A = I_2 + I_3 - I_1 = 5{,}5 \cdot \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Чтобы найти напряжение на вольтметре, достаточно рассмотреть ещё одну упрощённую схему (см. рис. 6). Откуда понятно, что вольтметр показывает напряжение $U_V = 4\mathcal{E}$.

Ответ. $I_A = 5{,}5 \cdot \frac{\mathcal{E}}{R}$, $U_V = 4\mathcal{E}$.

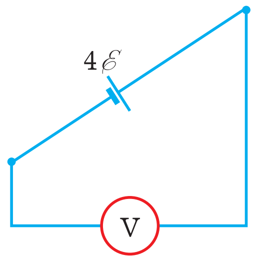
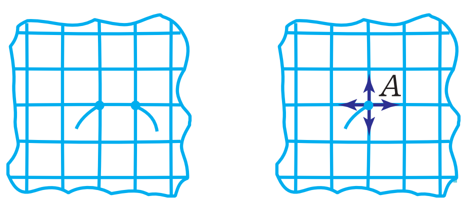


Рис. 6

Задача 3. Имеется решётка, состоящая из очень большого количества одинаковых квадратных ячеек, электрическое сопротивление каждого отрезка решётки, соединяющего её узлы, равно R. Чему будет равно сопротивление всей решётки, если подключить её к источнику тока двумя соседними узлами (см. рис. 7)?



а *б*

Рис. 7

Решение. Вспомним, что сопротивление равно отношению напряжения на данном участке цепи к току через него. Предположим, что на решётку подаётся от источника тока напряжение U_0, при этом ток в проводах, идущих от источника, равен I_0, тогда общее сопротивление решётки равно

$$R_0 = U_0/I_0.$$

Чтобы найти соотношение между общей силой тока и напряжением, необходимо разбираться с распределением токов во всех участках решётки. Сделать это для бесконечной решётки довольно сложно. Но можно заметить, что если бы ток был подведён только к одному узлу (узлу A), то дальше он симметрично распределялся по остальным участкам и уходил бы в бесконечность (см. рис. 8). При этом сила тока в первых четырёх отрезках решётки была бы $I_0/4$. И, наоборот, если бы ток стекался из бесконечности к узлу B, то через каждый из четырёх отрезков решётки, подходящих к узлу B, шёл ток в 4 раза меньший, чем общий ток в проводе, соединяющий узел B с источником тока. Если понять, что исходная схема подключения решётки к источнику тока является суперпозицией двух рассмотренных случаев (см. рис. 8.), то исходное решение становится элементарным. Очевидно, что между узлами A и B идёт ток $I_0/2$. Закон Ома этого отрезка решётки можно записать как

$$R = \frac{U_0}{0,5I_0} = \frac{2U_0}{I_0}.$$

Значит, $R = 2R_0$. Откуда получаем, что общее сопротивление решётки равно $R_0 = 0,5R$.

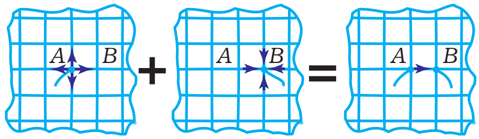


Рис. 8

Ответ. $R_0 = 0,5R$.

Задача 4. Определите сопротивление полубесконечной цепи между точками A и B, если сопротивление каждого звена равно R (рис. 9).

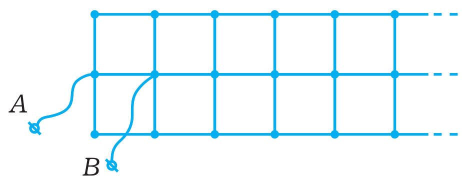


Рис. 9

Решение.

1-й способ. Из симметрии схемы, изображённой на рис. 9, относительно линии, соединяющей точки A и B, следует, что потенциалы всех точек, симметричных относительно этой линии, равны, то есть схемы на рис. 10 эквивалентны.

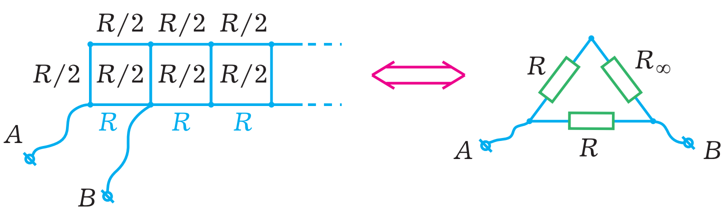


Рис. 10

Рассчитать сопротивление схемы на рис. 10 уже легко:

$$R_\infty = \frac{\frac{R}{2}\left(R_\infty + \frac{3R}{2}\right)}{R_\infty + \frac{3R}{2} + \frac{R}{2}},$$

откуда

$$R_\infty = \frac{\left(\sqrt{21} - 3\right)R}{4}.$$

Таким образом,

$$R_{AB} = \frac{(R_\infty + R)R}{R_\infty + 2R} = \frac{\sqrt{21} + 1}{\sqrt{21} + 5} \cdot R \approx 0,58R.$$

2-й способ. Если действовать так же, как в предыдущей задаче, то заметим, что из точки A, в силу одинакового сопротивления всех проводников, ток через каждый проводник будет равен $I/3$, т. к. от этой точки отходит ровно 3 проводника. В точке B будет стекаться ток $I/4$, т. к. число проводников, сходящихся в этой точке равно 4. Здесь I – суммарный ток, который подаётся на данную схему. Следовательно, применяя принцип суперпозиции токов, суммарный ток через проводник, соединяющий точки A и B, равен

$$I/3 + I/4 = \frac{7}{12}I \approx 0,58I.$$

Считая сопротивление всей цепи равное R_{AB} и применяя закон Ома для всей цепи, получим

$$R_{AB} = \frac{U}{I},$$

где U – разность потенциалов между точками A и B, и для участка между точками A и B:

$$R = \frac{U}{0,58I},$$

найдём, что $R_{AB} = 0,58R$.

Ответ. $R_{AB} = 0,58R$.

Задача 5. Из бесконечной квадратной сетки с сопротивлением каждого ребра R = 1 Ом удалили часть проводников – так, как показано на рис. 11.

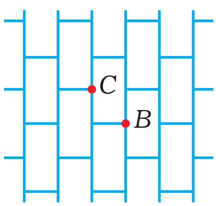


Рис. 11

Найти сопротивление между точками B и C (на рисунке помечены красным), если суммарный ток I, подаваемый на схему равен 1 А.

Решение. Заметим, что данная схема эквивалентна схеме на рис. 12.

Аналогично предыдущим задачам, находим, что ток через один из трёх проводников, исходящих от точки B, равен $I/3$, где I – суммарный ток, подаваемый на эту схему. Тонкость данной задачи заключается в следующем – в точке A (помечена синим) происходит ещё одно разделение схемы на два проводника, следовательно, в силу одинаковости их сопротивлений, ток, идущий от точки A к точке C, равен $I/6$. Теперь можно воспользоваться принципом суперпозиции, т. е. суммарный ток на участке между точками B и C равен

$$2 \cdot (I/6 + I/3).$$

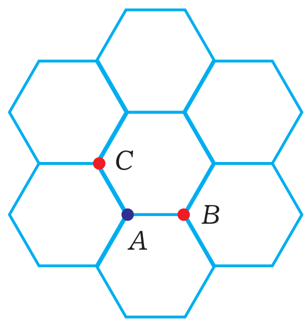


Рис. 12

Далее воспользуемся законом Ома для участка цепи между точками A и B:

$$U_{BC} = 2 \cdot \left(\frac{I}{3} + \frac{I}{6}\right)R.$$

Подставляя численные значения, получим $U_{BC} = 1$ В.

Ответ. $U_{BC} = 1$ В.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

«Целью настоящего курса электродинамики, – сказал лектор, – является углубление и развитие трудностей, лежащих в основе современной теории.»