

Шведов Олег Юрьевич

Кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник кафедры статистики и теории поля физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (МГУ). Лауреат премии Европейской Академии для молодых учёных СНГ и премии имени Н.Н. Боголюбова. Член методической комиссии и жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике.



Принцип Торричелли

Как решались задачи статики до появления ясных представлений о векторном характере сложения сил? Как Паскаль пришёл к своему знаменитому закону о давлении жидкости на дно и стенки сосуда? При ответе на эти вопросы выясняется, какую важную роль в становлении статики сыграл сформулированный Торричелли принцип минимума высоты центра тяжести (центра масс). Отголосками этого утверждения являются принцип минимума потенциальной энергии в механике и аналогичные принципы в термодинамике. Обо всём этом идёт речь в статье. Приведены и примеры решения задач механики с использованием принципа Торричелли.

1. Введение

В наши дни задачи статики решаются без каких-либо затруднений: вводятся обозначения для сил взаимодействия тел; для каждого из тел записывается условие равенства нулю векторной суммы сил, а при необходимости и суммы моментов сил; полученная система уравнений решается – получается ответ. Однако таким очевидным решение задач статики было не всегда. Достаточно отметить, что Архимед, с идеей которого и начиналась механика, так и не сформулировал ни понятия момента силы в общем случае, ни векторного закона сложения сил. Представление о силе как о векторной величине формировалось

достаточно долго, и на начальном этапе развития физики важным законом, позволявшим решать задачи на равновесие, был сформулированный Торричелли принцип минимума высоты центра масс¹, согласно которому *в состоянии устойчивого равновесия центр масс системы тел занимает наинизшее возможное положение*. Этот принцип, давая исчерпывающий ответ на вопрос о том, каким окажется равновесное состояние системы, имеет в то же время границы применимости: он может быть использован для систем с грузами, блоками, рычагами, жидкостями, но не может использоваться

¹ Понятию центра масс посвящена статья: Шведов О.Ю. Механика Архимеда // Потенциал. – 2008. – №9.

для систем с электрическими зарядами, пружинами, трением. В параграфе 2 статьи рассматривается вопрос о том, как можно прийти к принципу Торричелли на основе представления о невозможности вечных двигателей. Параграф 3 посвящён задачам статики, которые можно решить на основе принци-

па Торричелли; показано, как этот способ соотносится с современным. В параграфе 4 обсуждается применение принципа Торричелли к гидростатике: именно на основе этого принципа Паскаль пришёл к своему знаменитому закону. Параграф 5 посвящён дальнейшему развитию идей Торричелли.

2. Центр масс и его перемещение при работе простых механизмов

Напомним о понятии центра масс. Для системы n одинаковых точечных грузов каждая из трёх координат центра масс равна среднему арифметическому координат отдельных грузов. Например, z -координата центра масс z_c выражается через z -координаты $z_1 \dots z_n$ грузов:

$$z_c = \frac{z_1 + \dots + z_n}{n}.$$

А как быть в случае грузов разной массы? Представим себе, что груз массой 2 кг (то есть два груза по 1 кг) находится в точке с координатой z_1 , а груз массой 3 кг (то есть три груза по 1 кг) – в точке с координатой z_2 . Такую систему можно представить себе как совокупность пяти грузов с координатами z_1, z_1, z_2, z_2, z_2 , её центр масс имеет координату

$$z_c = \frac{z_1 + z_1 + z_2 + z_2 + z_2}{5} = \frac{2z_1 + 3z_2}{5}.$$

Обобщая данное рассуждение, получаем, что центр масс системы двух грузов с массами m_1 и m_2 в точках z_1 и z_2 находится в точке с координатой $z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$, а центр масс системы n грузов с массами $m_1 \dots m_n$, находящихся в точках с координатами $z_1 \dots z_n$, имеет z -координату

$$z_c = \frac{m_1 z_1 + \dots + m_n z_n}{m_1 + \dots + m_n};$$

x_c -координата и y_c -координата записываются аналогично.

Пусть ось z с началом на поверхности Земли направлена вертикально вверх. Как будет изменяться высота z_c центра масс тел при работе любого из простых механизмов? Сконструировать устройство, уменьшающее высоту любого из тел системы (а значит, и высоту центра масс), достаточно просто: тело можно положить на наклонную плоскость либо просто отпустить – оно будет двигаться вниз.

Хорошо известны механизмы, позволяющие поднять один из грузов за счёт компенсации – уменьшения высоты другого груза. Однако и при их работе центр масс системы опускается. В качестве примера рассмотрим закреплённый в точке O невесомый равноплечий рычаг, к концам которого прикреплены грузы массами m и $M > m$ (рис. 1). При повороте рычага

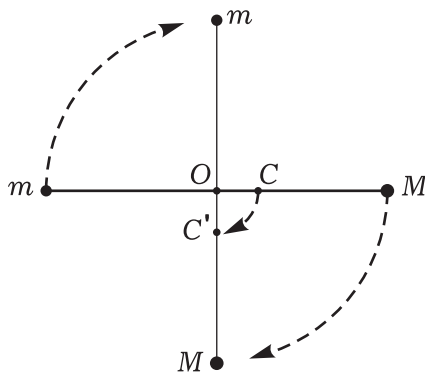


Рис. 1

центр масс C системы будет смещаться вниз. Если массы грузов приближённо совпадают (1 кг и 1,001 кг), смещение центра масс вниз оказывается пренебрежимо малым по сравнению со смещением каждого из грузов; с помощью подобного механизма можно поднять груз массой 1 кг на 1 м за счёт опускания груза массой 1,001 кг на 1 м (или опускания груза массой 1 кг на 1,001 м).

Возможен ли механизм, поднимающий центр масс системы грузов без какой-либо компенсации? Представим себе, что такое устройство сконструировано: пусть, к примеру, в результате его работы первый из трёх одинаковых грузов массой 1 кг опускается на 1 м (рис. 2 а), второй груз – поднимается на 5 м, а третий – опускается на 2 м. Подобный механизм можно использовать для создания вечного двигателя, цикл работы которого начинается именно с данного процесса. Следующая стадия цикла вечного двигателя – возврат грузов 1, 2 и 3 в прежние состояния за счёт изменения высоты ещё одного груза 4 также массой 1 кг (рис. 2 б):

- поднять груз 1 на 1 м можно, опустив груз 4 на 1,001 м;
- опустив груз 2 на 5 м, можно поднять груз 4 на 4,999 м;
- поднять груз 3 на 2 м можно, опустив груз 4 на 2,001 м.

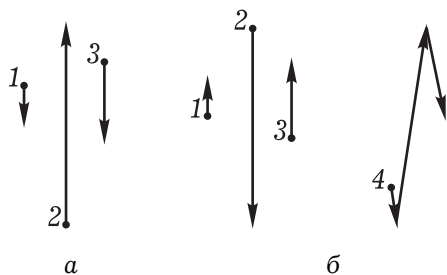


Рис. 2

По окончании цикла грузы 1, 2 и 3 возвращаются в прежние положения, а груз 4 поднимается на высоту 1,997 м. Подобные механизмы, поднимающие груз (совершающие положительную работу) без какой-либо компенсации, следует относить к *вечным двигателям*.

Вечные двигатели пытались изобрести с давних времён, однако никому это так и не удалось сделать. Не-



возможность вечных двигателей – надёжно установленный опытный факт. Многие количественные соотношения физики появились именно из анализа работы воображаемых вечных двигателей. Применительно к статике невозможность вечного двигателя приводит к утверждению о том, что центр масс системы не может подниматься без какой-либо компенсации. Пока равновесие в системе ещё не достигнуто, центр масс опускается до тех пор, пока не окажется в наини́зшем возможном положении. Так мы приходим к принципу Торричелли.

3. Решение задач статики на основе принципа Торричелли

Задача 1. К концам нити, перекинутой через неподвижный блок, прикреплены грузы массами m_1 и m_2 (рис. 3). Грузы отпускают. Как они будут двигаться?

Решение. Пусть первый груз поднялся на h , второй – опустился на то же расстояние. (Перемещения грузов показаны стрелками.) Поскольку изменения z -координат грузов равны $\Delta z_1 = h$, $\Delta z_2 = -h$, изменение z -координаты центра масс равно:

$$\Delta z_c = \frac{m_1 h + m_2 (-h)}{m_1 + m_2}.$$

Оно отрицательно при $m_2 > m_1$ и положительно при $m_2 < m_1$. Перемещение центра масс системы из точки C в точку C' показано на рис. 3. Поскольку центр масс системы не может подниматься без компенсации, процесс, в результате которого первый груз поднимается, а второй – опускается, возможен при $m_2 > m_1$ и невозможен при $m_2 < m_1$. Противоположный процесс будет возможен при обратном соотношении масс.

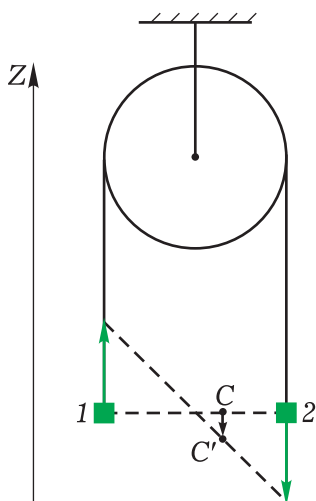


Рис. 3

Ответ. Груз с большей массой будет опускаться, с меньшей массой – подниматься.

Задача 2. Изображённая на рис. 4 система состоит из неподвижного и подвижного блоков и двух грузов массами m_1 и m_2 . Систему отпускают. Как будут двигаться грузы?

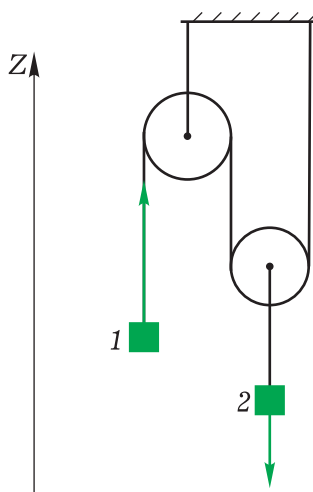


Рис. 4

Решение. Пусть груз 1 поднялся на расстояние h_1 , а груз 2 опустился на h_2 (перемещения грузов показаны стрелками); тогда изменения z -координат грузов равны $\Delta z_1 = h_1$, $\Delta z_2 = -h_2$. Длины отдельных вертикальных участков нити изменились на h_2 , h_2 и $-h_1$; поскольку длина нити не изменилась, то $h_1 = 2h_2$. Следовательно, изменение высоты центра масс системы равно

$$\Delta z_c = \frac{m_1 \cdot 2h_2 + m_2 \cdot (-h_2)}{m_1 + m_2}.$$

Данный процесс возможен ($\Delta z_c < 0$) при $m_2 > 2m_1$. Противоположный процесс исследуется аналогично.

Ответ. При $m_2 > 2m_1$ груз 2 будет двигаться вниз, груз 1 – вверх; при $m_2 < 2m_1$ грузы будут двигаться в обратных направлениях.

Современный метод решения задач 1 и 2, основанный на сложении сил, приводит к такому же ответу.

Задача 3. К перекинутой через блок нити прикреплены два груза 1 и 2 (рис. 5) массами m_1 и m_2 . Первый из них может скользить по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, второй – свободно свисает. Систему отпускают. Как будут двигаться грузы?

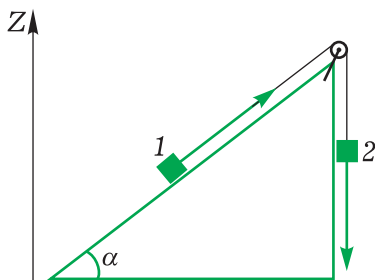


Рис. 5

Решение. Если груз 2 опустится на h , то груз 1 сместится на то же расстояние h вдоль наклонной плоскости (показано стрелками). Изменения z -координат грузов равны $\Delta z_2 = -h$, $\Delta z_1 = h \sin \alpha$, а изменение высоты центра масс оказывается равным

$$\Delta z_c = \frac{m_1 \cdot h \sin \alpha + m_2 \cdot (-h)}{m_1 + m_2}.$$

Рассматриваемый процесс возможен ($\Delta z_c < 0$) при $m_2 > m_1 \sin \alpha$. Обратный процесс рассматривается аналогично.

Ответ. При $m_2 > m_1 \sin \alpha$ груз 2 будет двигаться вниз, груз 1 – вверх вдоль наклонной плоскости, при $m_2 < m_1 \sin \alpha$ грузы будут двигаться в обратных направлениях.

Замечание. История открытия условия равновесия грузов $m_2 =$



$= m_1 \sin \alpha$, полученная в этой задаче, достаточно поучительна. Хотя опыты с наклонной плоскостью проводились ещё в Древней Греции, первое теоретическое обоснование соотношения для масс было дано в работе голландского исследователя С. Стевина в 1580-е годы. Хотя Стевин прямо и не исследовал изменение высоты центра масс, его мысль развивалась в похожем направлении: он рассмотрел устройство, работающее как вечный двигатель при нарушении условия равновесия грузов. Дальнейший анализ этого условия привел к представлению о силах, которые складываются, как векторы.

Задача 4. В системе, изображённой на рис. 6, груз 1 (масса m_1) мо-

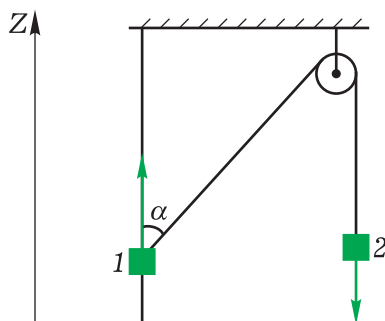


Рис. 6



жет свободно скользить вдоль гладкого вертикального стержня, груз 2 (масса m_2) свободно свисает. Систему отпускают. В каком направлении будут двигаться грузы? Наклонный участок нити составляет угол α со стержнем.

Решение. Пусть груз 2 опустился на малое расстояние h_2 , а груз 1 поднялся на малое расстояние h_1 . Тогда изменения координат грузов $\Delta z_2 = -h_2$, $\Delta z_1 = h_1$. Перемещения грузов показаны стрелками на рис. 6. Изменения длин отдельных прямолинейных участков нити составили h_2 и $-h_1 \cos \alpha$; учитывая нерастяжимость нити, имеем: $h_2 = h_1 \cos \alpha$; Следовательно, изменение высоты центра масс равно:

$$\Delta z_c = \frac{m_1 h_1 + m_2 (-h_1 \cos \alpha)}{m_1 + m_2}.$$

Рассматриваемый процесс возможен ($\Delta z_c < 0$) при $m_2 \cos \alpha > m_1$; аналогично рассматривается и обратный процесс.

Ответ. При $m_2 \cos \alpha > m_1$ груз 2 будет двигаться вниз, груз 1 – вверх; при $m_2 \cos \alpha < m_1$ грузы будут двигаться в обратные стороны.

Результат этой задачи подтверждает векторную природу сил: в равновесии к грузу 1 приложены сила натяжения нити, равная $m_2 g$ и направленная под углом α к стержню вверх, направленная вниз сила тяжести $m_1 g$ и сила реакции, перпендикулярная стержню.

4. Гидростатические приложения принципа Торричелли

Основываясь на принципе Торричелли, Б. Паскаль теоретически обосновал свой знаменитый закон о давлении жидкости на дно и стенки сосуда. Для этого он рассмотрел систему, приведённую в задаче 5.



Задача 5. В системе, изображённой на рис. 7 а, высота столба жидкости над лёгким поршнем равна H ,

плотность жидкости ρ , площадь поршня S , масса груза, прикреплённого к противоположному концу нити, равна m . Груз отпускают. В какую сторону он станет двигаться? (Сосуд закреплён.)

Решение. Обозначим через M общую массу груза и воды. Пусть груз массой m опустился на малое расстояние h ($h \ll H$); тогда поршень поднимется на h (новые положения поршня и свободной поверхности воды изображены на рисунке пунктиром). Объём воды Sh «исчезнет» вниз и «появится» на поверхности жидкости, «поднявшись» на высоту H . Следовательно, изменение высоты центра масс равно

$$\Delta z_c = \frac{m \cdot (-h) + \rho Sh \cdot H}{M}.$$

Рассматриваемый процесс возможен ($\Delta z_c < 0$) при $m > \rho SH$. Обратный процесс рассматривается аналогично.

Ответ. Вне зависимости от формы сосуда при $m > \rho SH$ груз массой m будет двигаться вниз, поршень – вверх; при $m < \rho SH$ груз и поршень будут двигаться в обратных направлениях.

Рассуждения Паскаля примени-

мы и в том случае, когда поршень расположен не горизонтально, а под произвольным углом к горизонту (рис. 7 б). Таким образом, сила, действующая со стороны столба жидкости высотой H на малый участок стенки площадью S , равна ρgHS .

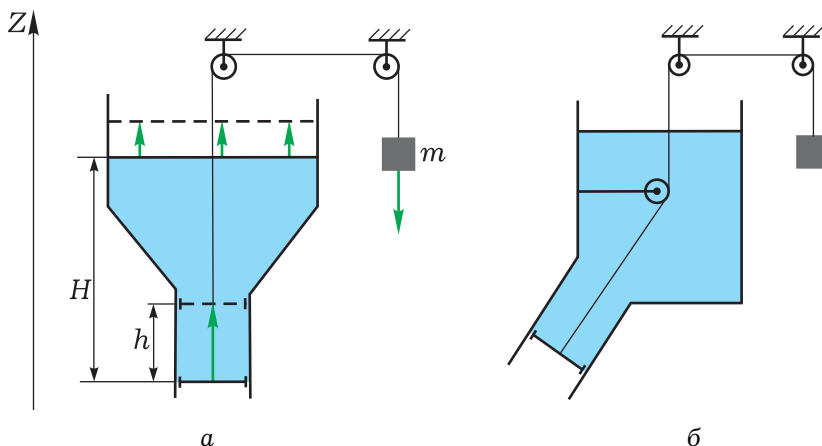


Рис. 7

В качестве ещё одного гидростатического применения принципа Торричелли рассмотрим задачу Паскаля о гидравлическом прессе.

Задача 6. В системе, показанной на рис. 8, на поршне 1 (площадь S_1 , высота H_1) стоит груз массой m_1 , на поршне 2 (площадь S_2 , высота H_2) – груз массой m_2 . Систему отпускают. Как будут двигаться грузы?

Решение. Пусть первый груз поднялся на малую высоту $\Delta z_1 = h_1$, то-

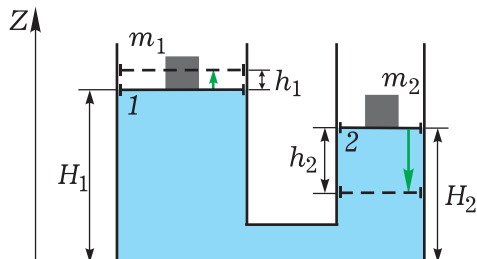


Рис. 8

гда второй опустится на малое расстояние $h_2 : \Delta z_2 = -h_2$. Заметим, что h_1 и $h_2 \ll H_1$ и H_2 . Объём жидкости $V = S_1 h_1 = S_2 h_2$ перетекает из правого сосуда в левый: он «исчезает» на высоте H_2 и «появляется» на высоте H_1 . Обозначая массу грузов и воды через M , рассчитаем изменение высоты центра масс системы:

$$\begin{aligned} \Delta z_c &= \frac{\rho V \cdot (H_1 - H_2)}{M} + \\ &+ \frac{m_1 \cdot V / S_1 + m_2 \cdot (-V / S_2)}{M} = \\ &= \frac{V}{M} \left[\left(\frac{m_1}{S_1} + \rho H_1 \right) - \left(\frac{m_2}{S_2} + \rho H_2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Данный процесс возможен

$$(\Delta z_c < 0) \text{ при } \frac{m_2}{S_2} + \rho H_2 > \frac{m_1}{S_1} + \rho H_1;$$

обратный процесс рассматривается аналогично.

Ответ. При $\frac{m_2}{S_2} + \rho H_2 > \frac{m_1}{S_1} + \rho H_1$
поршень 2 будет двигаться вниз,

поршень 1 – вверх; при противоположном неравенстве поршни будут двигаться в обратных направлениях.

5. Заключение

При переходе к более сложным системам принцип Торричелли нуждается в серьёзной модификации. В самом деле, если в системе имеются пружины или электрические заряды, то растяжение и сжатие пружины



или изменение расстояния между зарядами можно рассматривать как компенсацию для процесса подъёма груза. Если учесть эту компенсацию

количественно, принцип Торричелли о минимуме высоты центра масс перейдёт в *принцип минимума потенциальной энергии* в состоянии устойчивого равновесия.

Однако при наличии сил трения и этот принцип нельзя использовать для исследования равновесия: система может находиться в покое и в состояниях с неминимальной потенциальной энергией. Здесь для решения задач подходит только способ рассмотрения сил, действующих на тела.

Идея о том, что состояние устойчивого равновесия характеризуется минимальным значением некоторой функции, переносится и на термодинамические системы: именно так получают условия равновесия в системах «жидкость–газ», в неоднородных системах во внешнем поле и в смесях при наличии химических реакций в вузовских курсах термодинамики.

Новости Новости Новости Новости Новости

«Шапка-невидимка»

Группа учёных одного из университетов штата Индиана (США), возглавляемая российским физиком В. Шалаевым, разработала теоретическую концепцию «шапки-невидимки» XXI в., подкреплённую математическим моделированием. Эта «шапка» должна делать невидимым накрытый ею предмет. Нужного эффекта учёные добиваются применением материала, электромагнитные характеристики которого меняются в пределах «шапки» от места к месту. Та-кой «материал» они конструируют в виде полого стеклянного цилиндра с тол-стыми стенками, внутри которых перпендикулярно вертикальной оси цилинд-ра расположены чрезвычайно мелкие (наноразмера) золотые или серебряные «иголки». При некотором распределении «наноигло-ков» (электромагнитных ха-рактеристик) падающий на такой «материал» свет определённых длин волн, не отражаясь, начинает его «обтекать» – «шапка» становится невидимой в этом диапазоне длин волн. От размера «наноигло-ков» и их распределения в стенках цилиндра зависит, от каких именно волн «шапка» скроет находящийся под ней предмет. Чтобы довести эту разработку до реального устройства (в «стекле» и «металле»), необходимо создать ещё конструкцию, обеспечивающую эффект невидимости