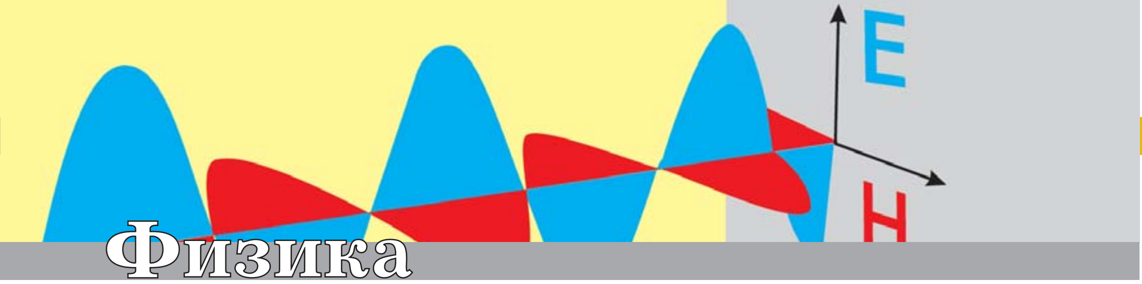

Ромашкевич Александр Иосифович
Старший преподаватель кафедры общей физики Московского государственного института электронной техники (технического университета). Автор ряда пособий для школы: «Механика», «Электродинамика», «Молекулярная физика», «Оптика», объединённых в серию «Учимся решать задачи».

Применение аналогий при решении физических задач

Что такое геометрический аналог, проще всего объяснить на примере стандартных задач, обычно решаемых с помощью интегрирования.

Задача 1. По тонкой диэлектрической полусфере равномерно распределён положительный заряд с поверхностной плотностью σ. Найти напряжённость электрического поля в центре сферической поверхности. Среда – вакуум.

Решение. Решим задачу по следующему алгоритму. Помещаем в центр сферической поверхности некоторый заряд $+Q$, находим силу $\vec{F}$, действующую на заряд $+Q$. После чего находим $E=\dfrac{F}{Q}$.

Соотношение записано в скалярном виде, так как направление силы $\vec{F}$, а следовательно, и напряжённости заранее известны из соображений симметрии (рис. 1).

Выделим на поверхности полусферы элементарную площадку Δs_i. Она несёт заряд $\Delta q_i=\sigma\Delta s_i$ и испытывает со стороны заряда $+Q$ действие силы $\vec{F}_i$ (закон Кулона):

$$\vec{F}_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\Delta s_i Q}{R^2}\frac{\vec{R}_i}{R}.$$

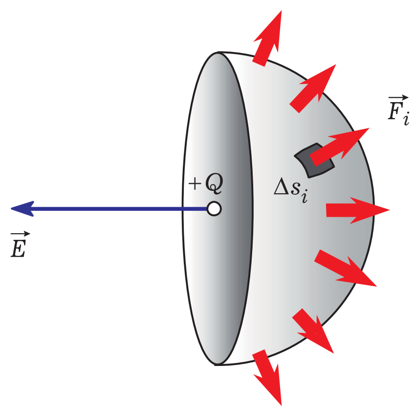

Рис. 1

Результирующая сила, действующая на всю полусферу, определится как векторная сумма сил $\vec{F}_i$, действующих на все фрагменты полусферы:

$$\vec{F}=\Sigma\vec{F}_i\,.$$

Введём величину

$$f=\frac{F_i}{\Delta s_i}=\frac{\sigma Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,,$$

имеющую смысл силы, действующей на единицу площади полусферы, причём направленной нормально к поверхности. Можно условно назвать эту величину «давлением поля заряда $+Q$ на поверхность полусферы».

А теперь небольшой мысленный эксперимент.

Представим себе сосуд в форме полусферы, наполненный газом при достаточном давлении. Для ясности закрепим его на легкоподвижной тележке, как показано на рисунке 2.

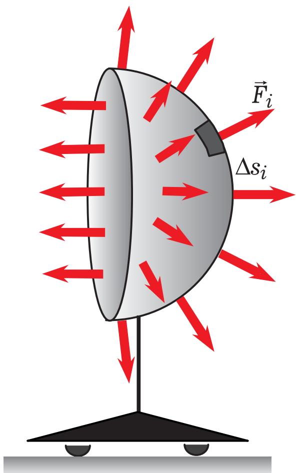

Рис. 2

Вряд ли кто-нибудь подумает, что тележка самопроизвольно поедет вправо или влево. Это означает, что векторная сумма сил давления $\vec{F}_i$, действующих на фрагменты Δs_i сферической поверхности, уравновешивается силой давления на плоскую часть поверхности сосуда. Таким образом,

$$\left|\Sigma\vec{F}_i\right| = p\cdot\pi R^2.$$

В нашем случае геометрическим аналогом давления p является величина f, поэтому результирующая сила, действующая на заряженную полусферу со стороны заряда Q, равна

$$F = f\cdot\pi R^2 = \frac{\sigma Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\pi R^2 = \frac{\sigma Q}{4\varepsilon_0}.$$

Такая же по величине сила действует на заряд Q, поэтому

$$E = \frac{F}{Q} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

Ответ. $E = \dfrac{\sigma}{4\varepsilon_0}$.

Рассмотренный пример позволяет без особых затруднений решить более сложную задачу.

Задача 2. Две одинаковые проводящие полусферы радиуса R укреплены с помощью подставок-изоляторов на легкоподвижных тележках. Полусферы приводят в соприкосновение и удерживают в таком положении с помощью фиксаторов. Затем на образовавшуюся сферу помещают заряд Q. Найти начальное ускорение тележки после удаления фиксаторов. Масса тележки с полусферой m.

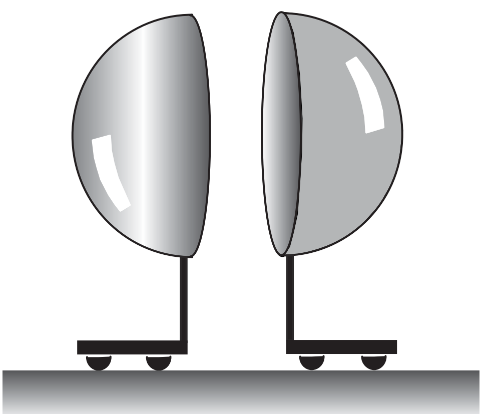

Рис. 3

Решение. Алгоритм решения ясен. Одноимённо заряженные полусферы отталкиваются. Если найти силу, с которой отталкиваются две половинки заряженной сферы, то начальное ускорение найдётся по закону Ньютона.

Считаем, что заряд, помещённый на соединённые полусферы, распределён по поверхности равномерно с поверхностной плотностью

$$\sigma = \frac{Q}{S_{\text{сф}}} = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

Выделим мысленно малый фрагмент Δs_i на заряженной сфере. Фрагмент достаточно мал, чтобы его поверхность можно было считать плоской, а поле его заряда в непосредственной близости равным

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$$

по обе стороны поверхности фрагмента (рис. 4).

Внутри равномерно заряженной сферы поле отсутствует:

$$\vec{E}_{\text{внутри сферы}} = 0.$$

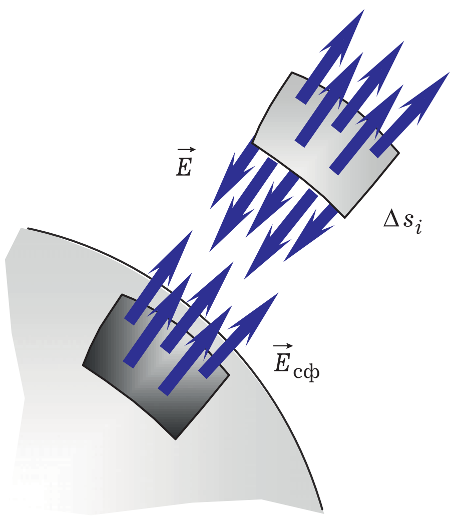

Рис. 4

Это значит, что поле фрагмента, направленное внутрь сферы $\vec{E}$, компенсирует поле, создаваемое зарядом всей сферы (без фрагмента) в месте расположения фрагмента $\vec{E}_{\text{сф}}$. Таким образом, фрагмент Δs_i (его заряд) находится в поле с напряжённостью

$$E_{\text{сф}} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Соответственно, на него действует сила отталкивания, направленная нормально к поверхности фрагмента:

$$F_i = \Delta q_i E_{\text{сф}} = \sigma \Delta s_i \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2},$$

а на единицу площади действует «сила давления поля»

$$f = \frac{\sigma Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

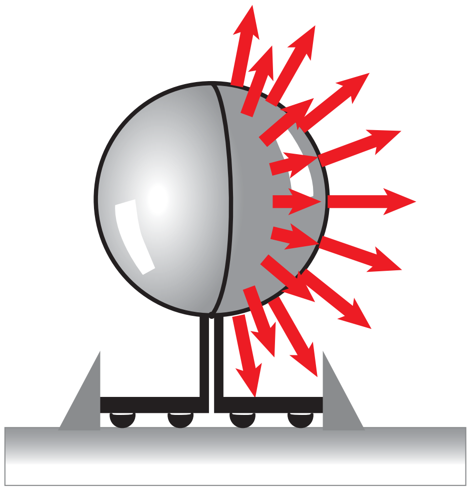

Рис. 5

Таким образом, на полусферу действует «ёжик» сил, которые надо векторно сложить (рис. 5). А эту операцию мы уже проделывали в предыдущей задаче, используя «газовую» аналогию:

$$F = \left|\Sigma \vec{F}_i\right| = f\pi R^2 = \frac{\sigma Q}{8\varepsilon_0}.$$

Наконец, заменив σ через заряд и площадь сферы, находим

$$F = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Начальное ускорение тележки

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2 m}.$$

Ответ. $a = \dfrac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2 m}.$

Следующую задачу без геометрического аналога было бы решить совсем непросто.

Задача 3. На поверхности тонкой диэлектрической сферы вырезан участок («лоскут») площадью 1/8 поверхности сферы. «Лоскут» ограничен двумя взаимно перпендикулярными на полюсе «меридианами» и «экватором». Форма участка показана на рисунке 6. По поверхности участка равномерно распределён заряд Q. Найти напряжённость электрического поля в центре сферической поверхности. Радиус сферы R.

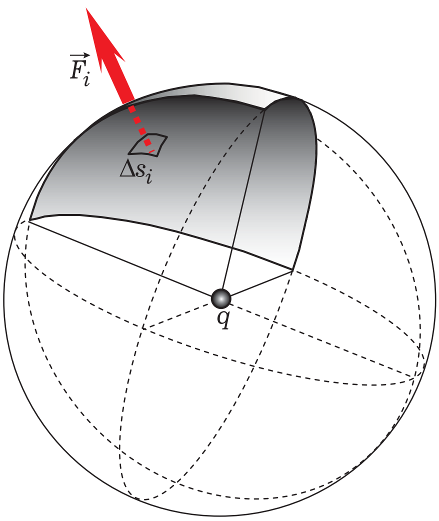

Рис. 6

Решение. Повторяя алгоритм первой задачи, поместим в центр сферической поверхности некоторый заряд q и найдём силу его взаимодействия с зарядом Q, распределённым по выделенному участку сферы.

Поверхностная плотность заряда на участке

$$\sigma = \frac{Q}{S} = Q : \left(\frac{1}{8}4\pi R^2\right) = \frac{2Q}{\pi R^2}.$$

По закону Кулона величина силы $\vec{F}_i$, действующей на фрагмент Δs_i заряженной поверхности:

$$F_i = k\frac{\Delta Qq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\Delta s_i q}{R^2} = \frac{Q\Delta s_i q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^4}.$$

Величина силы, действующей на единицу площади заряженной поверхности (аналог давления):

$$f = \frac{Qq}{2\varepsilon_0\pi^2 R^4}.$$

Если представить себе сосуд в форме соответствующей «восьмушки» шара, становится понятным, что сила давления, действующая на сферическую поверхность такого сосуда, уравновешивается тремя силами давления $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, действующими на плоские грани (рис. 7). Они взаимно перпендикулярны и равны по величине:

$$F_{\text{пл.грани}} = \left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}_3\right| = fS_{\text{грани}} =$$
$$= f\frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{Qq}{2\varepsilon_0\pi^2 R^4}\frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{Qq}{8\varepsilon_0\pi R^2}.$$

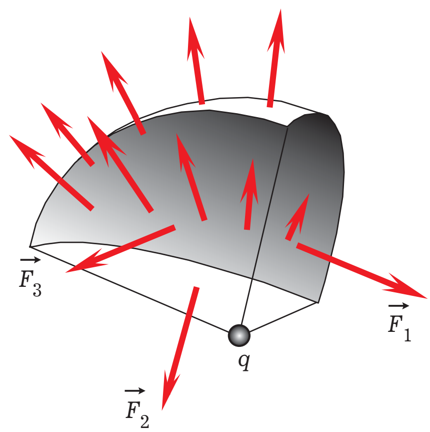

Рис. 7

Результирующая $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ легко находится по рисунку 8:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = \frac{Qq}{8\varepsilon_0\pi R^2}\sqrt{3}.$$

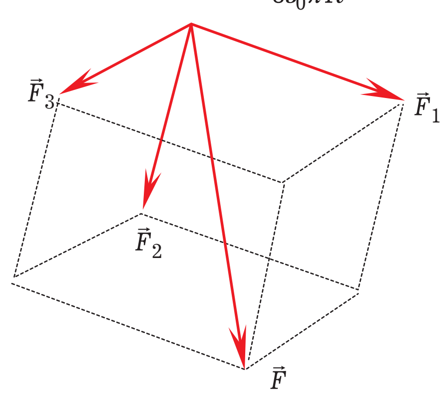

Рис. 8

Мы нашли электрическую силу, действующую на распределённый по участку сферы заряд Q. Такая же сила действует на заряд q. Теперь легко найти напряжённость поля в центре сферической поверхности:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{\sqrt{3}Q}{8\varepsilon_0 \pi R^2}.$$

Ответ. $E = \dfrac{\sqrt{3}Q}{8\varepsilon_0 \pi R^2}$.

Задача 4. По проводу, изогнутому в форме плоской кривой, пропускают ток I. Плоскость провода расположена перпендикулярно однородному магнитному полю с индукцией B.

Концы провода закреплены в точках (узлах) D и C, расстояние между которыми d (рис. 9). С какой силой провод с током действует на каждый из узлов крепления?

Решение. На элементарный фрагмент Δl_i провода действует сила Ампера

$$F_{Ai} = BI\Delta l_i \sin(B, \Delta l_i) = BI\Delta l_i \sin 90^\circ = BI\Delta l_i.$$

Она, согласно правилу левой руки, лежит в плоскости провода и перпендикулярна соответствующему фрагменту Δl_i.

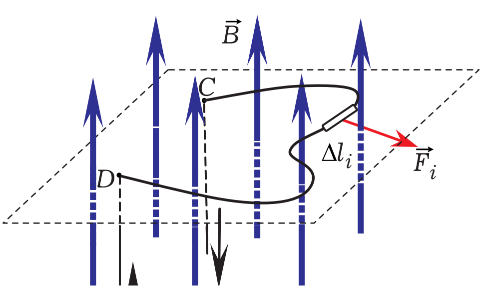

Рис. 9

Нам предстоит найти результирующую всех сил $\vec{F}_{Ai}$:

$$\vec{F}_A = \Sigma \vec{F}_{Ai}.$$

Величина силы, действующей на единицу длины провода, $f_A = BI$.

Обратимся снова к геометрическому аналогу. Представим себе сосуд в форме пластины, боковая поверхность которой повторяет кривую провода. Боковая сторона DC – плоская (рис. 10). Пусть давление газа в сосуде p. На малый фрагмент боковой поверхности сосуда со стороны газа будет действовать сила, перпендикулярная площадке фрагмента и равная $F_i = ph\Delta l_i$, здесь h – ширина ленты боковой поверхности, Δl_i – длина фрагмента.

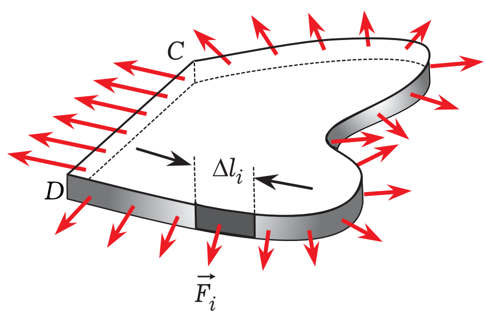

Рис. 10

Соответственно, на единицу длины боковой поверхности будет действовать сила $f = ph$.

Как и раньше, сосуд будет неподвижен на гладкой горизонтальной поверхности. Это значит, что веер фрагментарных сил давления $\vec{F}_i$, распределённых по боковой поверхности справа (см. рисунок 11), уравновешивается силой давления на плоскую часть боковой поверхности:

$$F' = F = \left|\Sigma \vec{F}_i\right| = fd = Phd.$$

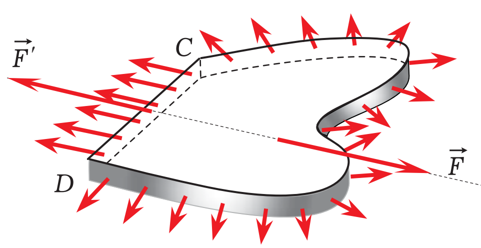

Рис. 11

Равнодействующая $\vec{F}'$ фрагментарных сил давления $\vec{F}_i'$, равномерно распределённых по плоской стороне DC, приложена к середине отрезка DC и перпендикулярна ему.

Равнодействующая $\vec{F}$ фрагментарных сил давления $\vec{F}_i$, распределённых по искривлённой боковой поверхности, направлена вдоль той же прямой, только в противоположную сторону. В случае провода с током фрагментарные силы Ампера $\vec{F}_{Ai}$ образуют аналогичную картину сил, поэтому результирующая сила Ампера, действующая на провод, равна

$$F = \left|\Sigma \vec{F}_{Ai}\right| = f_A d = BId,$$

параллельна плоскости провода, перпендикулярна отрезку DC, а линия действия силы проходит через его середину.

Теперь ясно, что на узлы D и C со стороны провода с током действуют одинаковые силы $F_D = F_C = \frac{1}{2}BId$, параллельные $\vec{F}$.

Ответ. $F_D = F_C = \frac{1}{2}BId$.

Частным случаем рассмотренной задачи можно считать следующую.

Задача 5. По проводящему кольцу радиуса R пропускают ток I. Перпендикулярно плоскости кольца включено однородное магнитное поле с индукцией B (направление поля и тока согласованы правилом буравчика). Определить силу натяжения кольца (рис. 12).

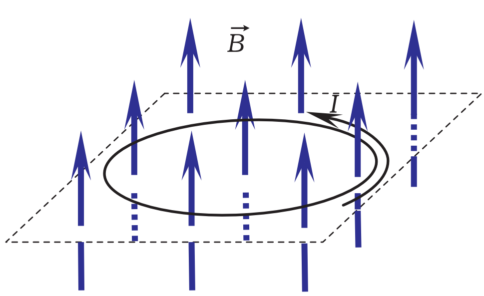

Рис. 12

Решение. Мысленно выделим половину кольца и рассмотрим условия её равновесия. Как и в предыдущей задаче, величина силы Ампера, действующей на единицу длины полукольца:

$$f_A = BI,$$

а величина результирующей силы Ампера

$$F = \left|\Sigma \vec{F}_{Ai}\right| = f_A 2R = 2BIR.$$

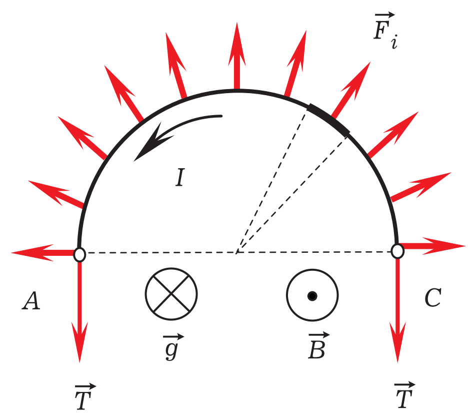

Рис. 13

Она уравновешивается двумя равными силами натяжения T (рис. 13), поэтому $T = IBR$.

Ответ. $T = IBR$.

Эту же задачу можно встретить и в других вариантах. Например, взять равномерно заряженное кольцо (заряд q), а в центр кольца поместить заряд Q (одноимённый с q). И снова искать силу натяжения кольца. В предположении $Q \gg q$ (чтобы не учитывать отталкивание фрагментов кольца друг от друга) легко находим по закону Кулона силу отталкивания фрагмента кольца единичной длины от заряда Q:

$$f_K = k\frac{Q\sigma}{R^2},$$

здесь σ – линейная плотность заряда кольца $\sigma = \frac{q}{2\pi R}$, R – радиус кольца.

Равнодействующая сил отталкивания

$$F = \left|\Sigma \vec{F}_{Ki}\right| = f_K 2R = k\frac{2Q\sigma}{R}$$

уравновешивается двумя силами натяжения, как и в предыдущей задаче:

$$T = \frac{F}{2} = k\frac{Q\sigma}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{2\pi R^2} = \frac{1}{8\pi^2\varepsilon_0}\frac{Qq}{R^2}.$$

Геометрический аналог облегчает в некоторых случаях нахождение центра масс тела. Приведём несколько полезных примеров.

Задача 6. Найти положение центра масс тонкого провода, изогнутого в форме полуокружности радиуса r (рис. 14).

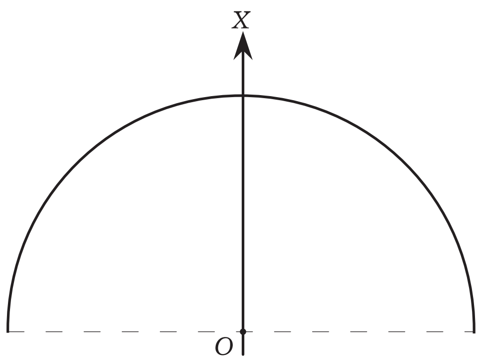

Рис. 14

Решение. Из соображений симметрии ясно, что центр масс провода должен лежать на оси X, проходящей через центр окружности O перпендикулярно диаметру, стягивающему проволочную дугу.

Воспользуемся формулой для радиус-вектора центра масс:

$$M\vec{r}_{\text{цм}} = \Sigma m_i \vec{r}_i,$$

где M – масса системы материальных точек (или тел), m_i – масса i-той материальной точки (или тела), $\vec{r}_i$ – радиус-вектор i-той материальной точки (или центра масс i-того тела).

Мысленно разрежем проволоку на маленькие (точечные) фрагменты m_i (рис. 15). Обозначим через λ линейную плотность проволоки, тогда $m_i = \lambda \Delta l_i$. Если взять фрагменты единичной длины, то $m_i = \lambda$, и правая часть исходного уравнения принимает вид $\Sigma \lambda \vec{r}_i$. Совместим начало координат с центром окружности. На рисунке 15 изображён «веер» равных изотропно распределённых векторов с модулем $f = \lambda r$. Чтобы картинка приняла более привычный вид, вынесем векторы $\lambda \vec{r}_i$ «наружу» (рис. 16), благо от этого их векторная сумма не меняется, а такое сложение мы уже делали:

$$\left|\Sigma \lambda \vec{r}_i\right| = f \cdot 2r = \lambda r \cdot 2r = 2\lambda r^2.$$

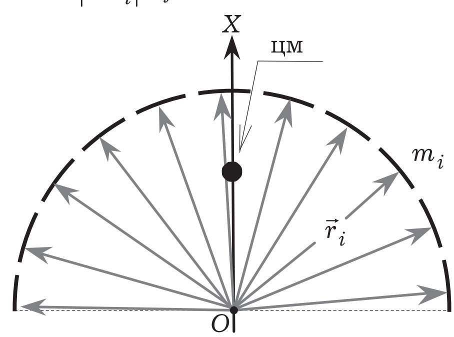

Рис. 15

Левая часть исходного уравнения преобразуется просто:

$$\left|M\vec{r}_{\text{цм}}\right| = \lambda \pi r x_{\text{цм}},$$

с учётом того, что центр масс расположен на оси X.

Таким образом:

$$\lambda \pi r x_{\text{цм}} = 2\lambda r^2,$$

$$x_{\text{цм}} = \frac{2}{\pi} r.$$

Ответ. $x_{\text{цм}} = \dfrac{2}{\pi} r$.

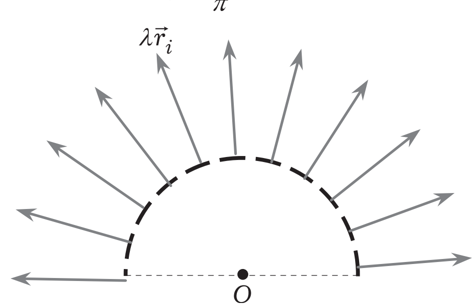

Рис. 16

Задача 7. Найти положение центра масс полудиска радиуса r, вырезанного из однородной пластины.

Результат предыдущей задачи

упрощает нахождение центра масс полудиска.

Разрежем мысленно полукруг на равные малые секторы (рис. 17). Настолько малые, что дугу, стягивающую сектор, можно считать отрезком прямой, а сектор – равнобедренным треугольником. Центр масс каждого такого треугольника находится на высоте h на расстоянии $\frac{2}{3}h$ от вершины.

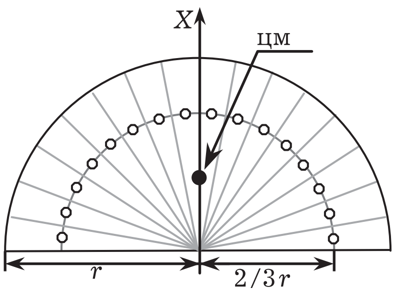

Рис. 17

При увеличении числа секторов треугольники становятся «тоньше», а их высота h стремится к радиусу. Становится понятным, что центры масс секторов формируют полукольцо с радиусом $\frac{2}{3}r$. Центр масс этого полукольца совпадает с центром масс однородного полудиска радиуса r.

Таким образом,

$$x_{\text{цм полудиска}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{3}r\right) = \frac{4}{3\pi}r.$$

Ответ. $x_{\text{цм полудиска}} = \frac{4}{3\pi}r.$

Задача 8. Найти положение центра масс:

1) тонкой однородной полусферы,
2) однородного полушара.

Решение. Как и в предыдущей задаче, из соображений симметрии следует, что центр масс тонкой полусферы находится на оси симметрии (ось X).

Мысленно разрезаем сферу на малые фрагменты единичной площади (рис. 18). Определения «малые» и «единичной площади» не противоречат друг другу. За единичную площадку можно принять и 1 мм^2 и 1 Мк^2. Массу такого фрагмента обозначим, как и ранее, через σ (поверхностная плотность). Совместим начало системы координат с центром сферической поверхности. Правая часть уравнения для радиус-вектора центра масс $M\vec{r}_{\text{цм}} = \Sigma m_i \vec{r}_i$ является векторной суммой изотропно распределённых, радиально направленных векторов («ёжик»). Они равны по модулю (рис. 19): $f = \sigma r$.

В задаче 1 мы уже складывали такую систему векторов (рис. 2) с той лишь разницей, что теперь все векторы начинаются из одной точки (начало координат). Но это не влияет на векторную сумму, поэтому

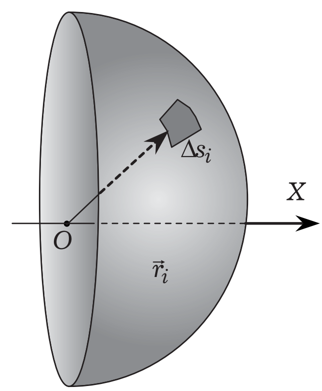

Рис. 18

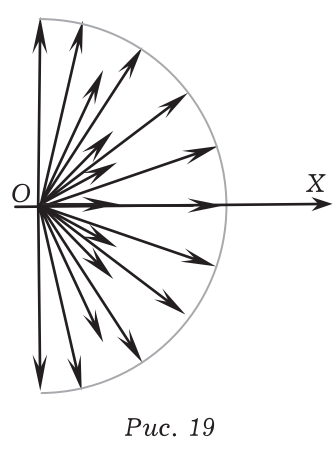

Рис. 19

$$\left|\Sigma m_i \vec{r}_i\right| = f\cdot\pi r^2 = \sigma r\cdot\pi r^2 = \pi\sigma r^3,$$

$$\left|M\vec{r}_{\text{цм}}\right| = Mx_{\text{цм}} = \sigma\cdot S_{\text{полусферы}}x_{\text{цм}} = \sigma\cdot 2\pi r^2 x_{\text{цм}}.$$

Приравнивая полученные выражения, получаем:

$$\sigma 2\pi r^2 x_{\text{цм}} = \pi\sigma r^3,$$

$$x_{\text{цм}} = \frac{r}{2}.$$

Нахождение центра масс полушара после всего сказанного не представляет труда.

Мысленно разрезаем полушар на малые равные по объёму пирамидки с вершинами в центре (рис. 20). Центр масс каждой из них лежит на расстоянии $(3/4)h$ от вершины. При уменьшении площади основания пирамидки $h \to r$.

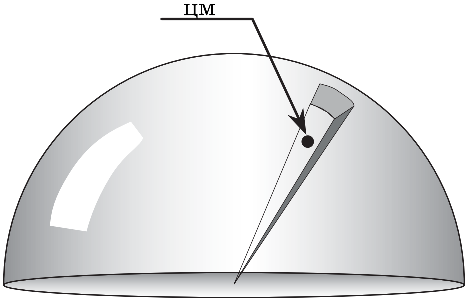

Рис. 20

Таким образом, центры масс пирамид формируют полусферу радиуса $(3/4)r$. Центр масс полушара совпадает с центром масс этой полусферы (рис. 21), поэтому

$$x_{\text{цм полушара}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}r = \frac{3}{8}r.$$

Ответ. Центр масс полусферы лежит на оси симметрии на расстоянии половины радиуса от центра: $x_{\text{цм}} = (1/2)r$, центр масс полушара лежит на оси симметрии на расстоянии 3/8 радиуса от центра:

$$x_{\text{цм полушара}} = (3/8)r.$$

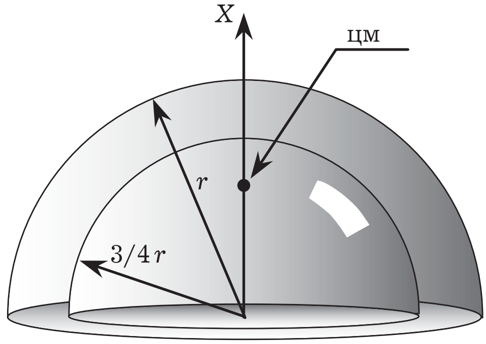

Рис. 21

Использование геометрических аналогов позволяет решить ряд задач по нахождению центра масс тел определённой формы, не прибегая к интегрированию. Например (рис. 22):

а) тонкий провод в форме дуги окружности,

б) пластина в форме кругового сектора,

в) пластина в форме кругового сегмента,

г) тонкая плёнка в форме сферического сектора.

Желающие могут рассмотреть эти примеры в качестве самостоятельного упражнения.

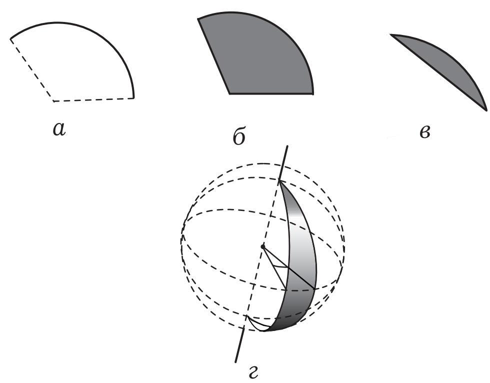

Рис. 22

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

На конечной станции кондуктор осматривает вагоны и в одном видит на лавочке заснувшего студента, а рядом лежит книжка Ландау «Теория поля». Кондуктор будит студента:

– Ну вставай, агроном, приехали!