**Ромашкевич Александр Иосифович**
*Старший преподаватель кафедры общей физики Московского государственного института электронной техники (технического университета). Автор ряда пособий для школы: «Механика», «Электродинамика», «Молекулярная физика», «Оптика», объединённых в серию «Учимся решать задачи».*

# Познакомимся с принципом виртуальных перемещений

В статье разбираются некоторые задачи, решение которых значительно упрощается при умении пользоваться «принципом виртуальных перемещений».

Первое знакомство с принципом виртуальных перемещений мы получаем в младших классах. Это так называемое «золотое правило механики», или правило рычага: «во сколько раз мы выигрываем в силе, во столько же раз проигрываем в расстоянии».

Рисунок 1 иллюстрирует правило. На первый взгляд всё просто. Но внимательный ученик заметит определённое отличие рисунка от реального рычага. Во-первых, при соотношении плеч рычага 1 : 3 соотношение сил $mg$ и $F$ не обязано быть 3 : 1, так как не учтена сила тяжести $Mg$ рычага.

Значит, с правилом можно согласиться, если считать рычаг невесомым? Но и при этом допущении не всё «чисто».

Рычаг по условию находился в положении равновесия. Чтобы груз $mg$ начал перемещаться, нужно увеличить силу $F$ на бесконечно малую величину, то есть сообщить системе начальный импульс, переводящий её из состояния покоя в состояние равномерного движения при том же силовом воздействии. Этот импульс вызовет очень медленное движение правого конца рычага. Теперь всё хорошо. Правда, процесс не реальный, а воображаемый (виртуальный). Но это не мешает производить расчёты!

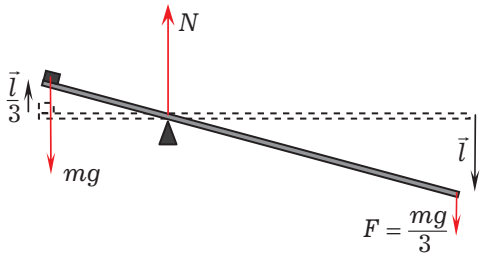


*Рис. 1*

Пусть для нашего рычага соблюдены все выше оговорённые допущения. Тогда на тело (рычаг) действуют три внешние силы: $mg$, $F$ и $N$ (реакция опоры равна силе нормального давления опоры на рычаг плюс сила трения). Под действием этих сил рычаг находится в равновесии. Пусть под действием силы $F$

правый конец рычага совершил виртуальное (воображаемое и очень малое) перемещение. На рисунке его условно замещает реальное перемещение вниз на величину $l$.

Посчитаем сумму работ всех внешних сил. Реакция опоры работы не совершает (точка приложения не перемещается). Остаётся:

$$A_{mg} = -mg\frac{l}{3}, \quad A_F = \frac{mg}{3}l, \quad A_N = 0,$$

и тогда

$$A_{mg} + A_F + A_N = 0.$$

Оказалось, что сумма работ всех внешних сил равна нулю. Полученный результат приближает нас к пониманию очень важного физического принципа – принципа виртуальных перемещений.

На отдельное тело (или целую конструкцию) всегда действуют внешние силы. Кроме того, движение частей тела (или частей конструкции) обычно ограничено механическими связями. Например, на движение концов $A$ и $B$ твёрдого стержня наложено ограничение: при любом перемещении стержня расстояние $AB$ не меняется.

Представим себе тело (или целую конструкцию), находящееся в положении равновесия под действием внешних сил и механических связей. Если мысленно переместить одну из точек конструкции на очень малое возможное (виртуальное) расстояние, то наличие связей вызовет перемещение других точек системы. При этом несколько сместятся точки приложения внешних сил, и каждая из них совершит работу. Можно показать, что необходимым и достаточным условием равновесия тела (или конструкции) является равенство нулю суммы этих работ:

$$\sum_{\text{вирт}} A_i = 0.$$

Последнее равенство отражает принцип виртуальных перемещений.

Правда, механические связи предполагаются не диссипативными, т. е. трение в связях отсутствует.

**Задача 1.** Конструкция, изображённая на рис. 2, собрана из трёх пар невесомых стержней, соединённых между собой идеальными шарнирами. Размеры стержней таковы, что после сборки образуются два подвижных ромба, которые всегда подобны, и коэффициент подобия равен двум. Шарнир $O$ прикреплён к стене, шарниры $A$ и $B$ соединены невесомой нерастяжимой нитью. Шарнир $B$ оттягивается горизонтально подвешенным через блок (без трения) грузом массой $m$. Найти натяжение нити, связывающей шарниры $A$ и $B$.

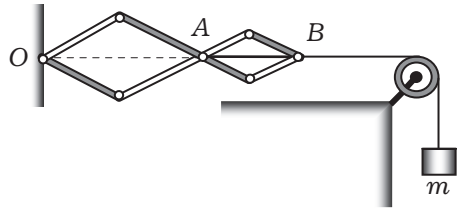


*Рис. 2*

**Решение.** Равновесие конструкции обеспечивается связями и внешними силами $\vec{N}$, $\vec{T}'$, $\vec{T}$, $m\vec{g}$ (рис. 3). Нить, соединяющая шарниры $A$ и $B$, прикладывает к конструкции две силы натяжения. Они противоположно направлены и равны по величине:

$$T' = T.$$

Мысленно переместим вправо на малое расстояние $\Delta l$ шарнир $B$. При этом переместятся все шарниры, кроме шарнира $O$. Нас интересуют только точки приложения внешних сил (шарниры $A$ и $B$).

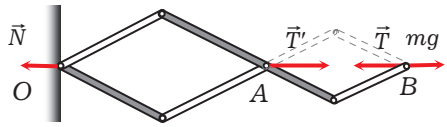


*Рис. 3*

Геометрия системы позволяет установить, что шарнир $A$ переместится вправо на расстояние $2/3\Delta l$.

Сумма работ внешних сил на виртуальных перемещениях должна равняться нулю:

$$N \cdot 0 + T'\frac{2}{3}\Delta l - T\Delta l + mg\Delta l = 0,$$

$$-T\frac{1}{3}\Delta l + mg\Delta l = 0,$$

$$T = 3mg.$$

**Ответ.** $T = 3mg$.

Ещё одна задача на тему «подвижная решётка».

**Задача 2.** На гладком горизонтальном столе лежит конструкция, состоящая из шести одинаковых стержней, соединённых идеальными шарнирами, как показано на рис. 4 (вид сверху). Шарнир $O$ закреплён и не может перемещаться. К шарниру $B$ приложена горизонтальная сила $\vec{F}$, а между шарнирами $A$ и $C$ вставлена распорка (рис. 5), препятствующая дальнейшему «складыванию» системы. Длина распорки $AC$ в два раза меньше диагонали $DE$ ромба $DCEA$. С какой силой распорка действует на шарнир $A$?

**Решение.** Конструкция находится в равновесии под действием внешних сил: распределённой по конструкции силы тяжести $m\vec{g}$, также распределённой по конструкции силы реакции опоры плоскости $\vec{N}'$, силы реакции стенки $\vec{N}$ и сил $\vec{F}_A$, $\vec{F}_C$ и $\vec{F}$ (рис. 6). При виртуальном малом смещении вправо шарнира $B$ шарнир $O$ остаётся на месте, силы $m\vec{g}$, $\vec{N}'$ и $\vec{F}_C$ перпендикулярны перемещениям, поэтому только две силы $\vec{F}_A$ и $\vec{F}$ совершают виртуальные работы.

Прежде чем записывать уравнение для виртуальных работ,

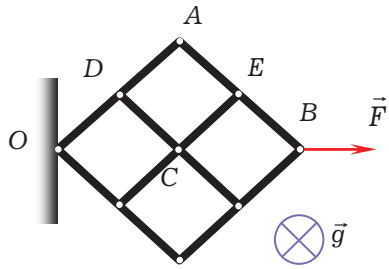


*Рис. 4*

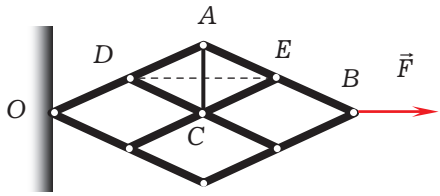


*Рис. 5*

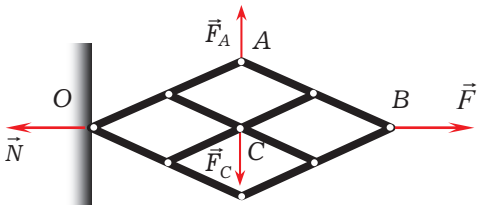


*Рис. 6*

установим связь перемещений шарниров $B$ и $A$.

Пометим начало координат $XY$ в точку $C$. В этой системе $x$ – координата шарнира $A$, $y$ – координата шарнира $B$.

Их связывает теорема Пифагора:

$$x^2 + y^2 = AB^2.$$

Приравняв дифференциалы правой и левой частей уравнения

$$2x\Delta x + 2y\Delta y = 0,$$

получаем искомое соотношение возможных малых перемещений шарниров $B$ и $A$ относительно шарнира $C$:

$$\Delta x = -\frac{y}{x}\Delta y.$$

Знак «–» означает, что диагональ $AC$ малого ромба уменьшается при увеличении диагонали $CB$.

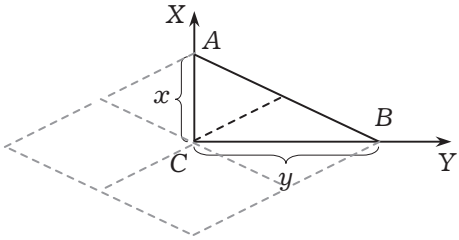


*Рис. 7*

В лабораторной системе отсчёта смещение $\Delta B$ шарнира $B$ в два раза больше смещения шарнира $C$: $\Delta B = 2\Delta C$. Но по правилу сложения скоростей, а значит, и малых перемещений $\Delta B = \Delta C + \Delta y$, $2\Delta C = \Delta C + \Delta y$, $\Delta C = \Delta y$.

Поэтому перемещение шарнира $B$ относительно стола $\Delta B = 2\Delta y$. Шарнир $A$ тоже перемещается вправо на $\Delta y$, но это перемещение перпендикулярно силе $\vec{F}_A$, и работа силы $\vec{F}_A$ на виртуальном перемещении будет равна

$$A_A = F_A \Delta x.$$

И согласно принципу виртуальных работ

$$-F_A \frac{y}{x} \Delta y + F \cdot 2\Delta y = 0.$$

Учитывая условие $y = 2x$, находим

$$F_A = F.$$

**Ответ.** $F_A = F$.

А теперь давайте сравним различные варианты решения следующей задачи.

**Задача 3.** Через гладкий горизонтально расположенный цилиндр радиуса $R$ переброшен канат длины $L$ и массы $M$. Концы каната находятся на одном уровне, благодаря чему канат находится в равновесии. Найти силу натяжения в середине каната (точка $C$).

*Способ 1.* Уберём мысленно левую половину каната, а её действие на правую половину заменим силой натяжения $\vec{T}_C$ (рис. 9). В точке $A$ (первое касание каната с цилиндром) сила натяжения равна силе тяжести конца $AB$:

$$T_A = \rho g l_{AB} = \frac{M}{L} g \left( \frac{L - \pi R}{2} \right),$$

здесь $\frac{M}{L} = \rho$ – линейная плотность каната, а выражение в скобках $\left( \frac{L - \pi R}{2} \right) = l_{AB}$ – длина части каната $AB$.

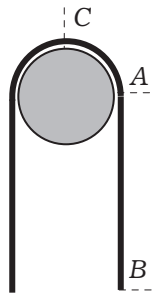


*Рис. 8*

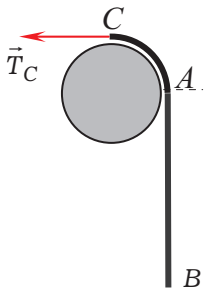


*Рис. 9*

Разобьём оставшуюся часть каната (четверть окружности) на очень маленькие фрагменты и рассмотрим силы, под действием которых $i$-ый фрагмент находится в равновесии (рис. 10): $\vec{T}_{1i}$ и $\vec{T}_{2i}$ – силы натяжения каната в сечениях, ограничивающих фрагмент, $\vec{N}_i$ – реакция опоры, $\Delta m_i \vec{g}$ – сила тяжести фрагмента.

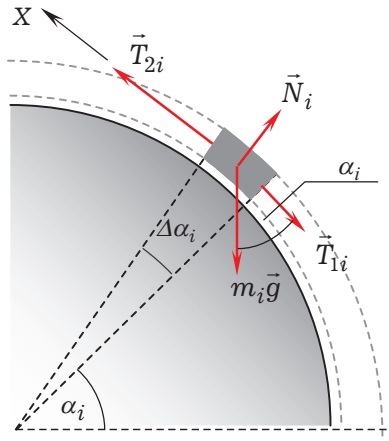


*Рис. 10*

Запишем условие равновесия выделенного фрагмента:

$$\vec{T}_{1i} + \vec{T}_{2i} + \Delta m_i \vec{g} + \vec{N}_i = 0.$$

В проекции на касательную к окружности (ось $X$) имеем:

$$T_{2i} - T_{1i} - \Delta m_i g \cos\alpha_i + 0 = 0,$$

$$\Delta m_i = \rho \Delta l_i = \rho R \Delta\alpha_i.$$

Произведём замену:

$$\Delta T_i = \rho R g \cos\alpha_i \Delta\alpha_i.$$

Суммируя уравнение по всем фрагментам (интегрируя), получаем:

$$\int_{T_A}^{T_C} dT = \rho R g \int_0^{\pi/2} \cos\alpha d\alpha,$$

$$T_C - T_A = \rho R g \left( \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 \right),$$

$$T_C = T_A + \rho R g \sin\frac{\pi}{2} =$$

$$= \rho g \left( \frac{L - \pi R}{2} \right) + \rho g R =$$

$$= \rho g \left( \frac{L - \pi R}{2} + R \right) =$$

$$= \frac{M}{L} g \left( \frac{L - \pi R}{2} + R \right).$$

*Способ 2.* Воспользуемся вторым необходимым условием равновесия тела:

$$\sum M_i = 0,$$

то есть сумма механических моментов внешних сил, действующих на тело, равна нулю, если тело находится в равновесии.

Для расчёта удобно мысленно разделить канат на две части: дугу $CA$ и свисающую часть $AB$.

Внешние силы, действующие на рассматриваемую половину каната: $T_C$ – сила натяжения каната в сечении $C$, $m_1 g$ – сила тяжести части $CA$ каната, $m_2 g$ – сила тяжести свисающей части каната $AB$, $N$ – распределённая реакция опоры (рис. 11).

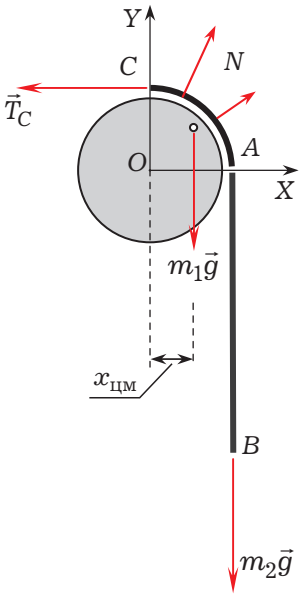


*Рис. 11*

Составим уравнение моментов относительно центра $O$ сечения цилиндра:

$$M_T + M_1 + M_2 = 0.$$

$M_T = T_C R$ – момент силы натяжения,

$$M_1 = -m_1 g \left( \frac{2}{\pi} R \right) = -\rho \frac{\pi R}{2} g \left( \frac{2}{\pi} R \right) = -\rho g R^2$$

есть момент силы тяжести дуги $AC$. Считаем при этом, что её координата $x_{цм} = \frac{2}{\pi} R$ (а она равна плечу силы $m_1 g$) известна.

$$M_2 = -\rho l_{AB} g R = -\rho \left( \frac{L - \pi R}{2} \right) g R =$$

$$= -\frac{M}{L} \left( \frac{L - \pi R}{2} \right) g R.$$

Мы посчитали момент силы, вращающей против часовой стрелки, положительным, а моменты сил, вращающих по часовой стрелки, – отрицательными. Сокращая выкладки, сразу переносим $M_1$ и $M_2$ в правую часть равенства:

$$T_C R = \rho g R^2 + \rho g R\left(\frac{L-\pi R}{2}\right),$$

или окончательно

$$T_C = \frac{M}{L} g\left(\frac{L-\pi R}{2} + R\right).$$

*Способ 3.* А теперь решим эту же задачу с помощью «принципа виртуальных перемещений». Вернёмся к рисунку 9. Подтянем мысленно конец $C$ на малое расстояние $\Delta l$ силой $T_C$ (рис. 12).

На нашу половинку каната действуют три внешние силы: искомая сила натяжения $\vec{T}_C$, сила тяготения $\vec{T}_т = \frac{M}{2}\vec{g}$ и распределённая по четверти окружности реакция опоры $\vec{N}$.

Сумма работ внешних сил на виртуальных перемещениях равняется нулю:

$$A_{T_c} + A_N + A_т = 0.$$

Здесь $A_{T_C} = T_C \Delta l$ – работа силы натяжения $T_C$, работа сил реакции опоры $A_N = 0$, так как реакция опоры в любой точке перпендикулярна перемещению.

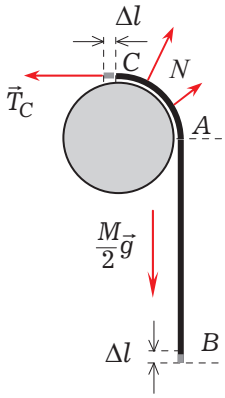


*Рис. 12*

Работа силы тяжести $A_т$ (как и любой консервативной силы) равна убыли потенциальной энергии: $A_т = П_1 - П_2$. В нашем случае изменение потенциальной энергии половинки каната эквивалентно переносу фрагмента $\Delta l$ с нижнего конца $B$ наверх к концу $C$ на высоту $(l_{AB} + R)$. Поэтому

$$A_т = -\rho \Delta l g (l_{AB} + R).$$

Подставим $A_{T_c} = T_C \Delta l$, $A_N = 0$ и $A_т = -\rho \Delta l\, g (l_{AB} + R)$ в исходное уравнение:

$$T_C \Delta l - \rho \Delta l\, g (l_{AB} + R) = 0,$$

откуда

$$T_C = \rho g\left(\frac{L-\pi R}{2} + R\right) = \frac{M}{L} g\left(\frac{L-\pi R}{2} + R\right).$$

**Ответ.** $T_C = \frac{M}{L} g\left(\frac{L-\pi R}{2} + R\right).$

Разумеется, выбор варианта решения – это дело вкуса, но третий вариант представляется наиболее простым и красивым.

Время от времени на олимпиадах разного уровня появляется задача, в которой рассматривается подвешенная в двух точках цепочка (гибкая нерастяжимая нить, пролёт линии электропередачи и др.). Трудность обусловлена неординарностью (на первый взгляд) алгоритма решения.

**Задача 4.** Цепочка, состоящая из большого количества звеньев, подвешена за концы в точках, находящихся на одном уровне. Длина цепочки $L$, масса $M$, провис $d$. Найти натяжение $T$ цепочки в точке подвеса, минимальное натяжение и угол $\alpha$ между $T$ и вертикалью в точке подвеса (рис. 13).

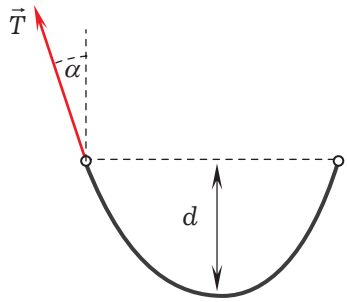


*Рис. 13*

**Решение.** Прежде чем приступать к решению самой задачи, исследуем некоторые свойства цепочки. Подвешенная за концы мягкая нерастяжимая нить (цепочка) принимает такую форму, при которой отсутствуют поперечные напряжения. Это означает, что сила натяжения $\vec{T}$ в любом сечении направлена по касательной к нити. Выделим мысленно произвольный фрагмент $AB$ цепочки (рис. 14). Его равновесие обеспечивают силы $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ и $m\vec{g}$ фрагмента.

Подтянем мысленно конец $B$ силой $\vec{T}_2$ вдоль линии нити на малый отрезок $\Delta l$. Одновременно опустим конец $A$ (вдоль линии нити) на такой же отрезок $\Delta l$. Сумма работ сил натяжения привела к увеличению потенциальной энергии $\Delta U$ фрагмента $AB$, что равносильно изменению потенциальной энергии кусочка $\Delta l$, если его перенести с конца $A$ на конец $B$ фрагмента:

$$T_2\Delta l - T_1\Delta l = \Delta U,$$

$$T_2\Delta l - T_1\Delta l = \Delta mgh.$$

Масса $\Delta m$ отрезка $\Delta l$

$$\Delta m = \frac{m}{l}\Delta l = \rho\Delta l,$$

$l$ – длина фрагмента $AB$, $\rho$ – линейная плотность цепочки. Отсюда

$$T_2 - T_1 = \rho gh.$$

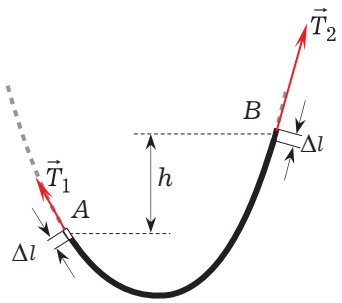


*Рис. 14*

Разность сил натяжения цепочки в двух разных сечениях однозначно определяется разностью высот $h$ этих сечений.

Разложим силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ на вертикальные и горизонтальные составляющие (рис. 15). Равновесие фрагмента означает, что

$$T_{1в} + T_{2в} = mg,$$

$$T_{1г} = T_{2г}.$$

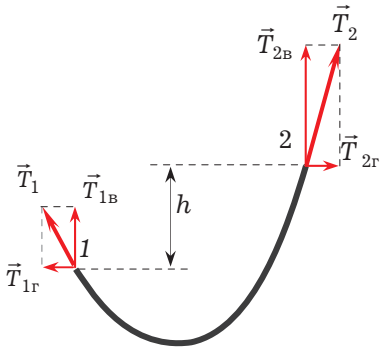


*Рис. 15*

Сумма вертикальных составляющих сил натяжения на концах компенсирует силу тяжести $mg$ фрагмента, горизонтальная составляющая силы натяжения одна и та же для любого сечения. На использовании этих свойств основано построение задач на тему «цепочка».

Вернёмся к задаче. Рассмотрим половину цепочки (рис. 16). Натяжение $T$ в точке подвеса

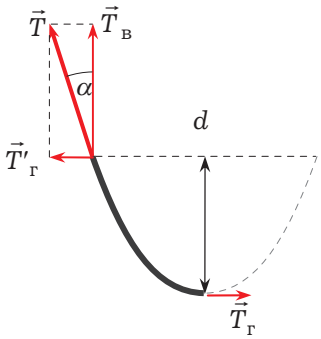


*Рис. 16*

$$T = T_г + \rho g d = T_г + \frac{M}{L} g d,$$

$$T'_г = T_г,$$

$$T_в = \frac{Mg}{2}.$$

Далее по теореме Пифагора

$$\left(T_г + \frac{M}{L} g d\right)^2 - T_г^2 = \left(\frac{Mg}{2}\right)^2,$$

откуда находим $T_г$ (она же $T_{\min}$):

$$T_г = \frac{Mg}{8dL}\left(L^2 - 4d^2\right),$$

$$T = T_г + \frac{M}{L} g d = \frac{Mg}{8dL}\left(L^2 + 4d^2\right),$$

$$\sin\alpha = \frac{L^2 - 4d^2}{L^2 + 4d^2}.$$

**Ответ.** $T_{\min} = \frac{Mg}{8dL}\left(L^2 - 4d^2\right)$,

$$T = \frac{Mg}{8dL}\left(L^2 + 4d^2\right), \quad \sin\alpha = \frac{L^2 - 4d^2}{L^2 + 4d^2}.$$

Чаще точки подвеса разнесены по высоте, но это всего лишь удлиняет выкладки.

**Задача 5.** Мягкий нерастяжимый шнур массы $m = 0{,}4$ кг и длиной $l = 4$ м подвешен за концы так, что провис от конца $A$ составляет $h_1 = 1$ м, а провис от конца $B$ – $h_2 = 2$ м (рис. 17). Найти минимальное натяжение шнура $T$, натяжения $T_A$ и $T_B$ на концах шнура, углы отклонения $\alpha$ и $\beta$ векторов $\vec{T}_A$ и $\vec{T}_B$ от вертикали, длину части $AC$ шнура. Принять $g = 10$ м/с$^2$.

**Решение.** В предыдущей задаче было показано, что

$$T'_A = T'_B = T, \quad T_A = T + \frac{m}{l} g h_1,$$

$$T_B = T + \frac{m}{l} g h_2.$$

Из условий равновесия частей $AC$ и $CB$ шнура следует:

$$T''_A = \sqrt{T_A^2 - T^2} = m_1 g,$$

$$T''_B = \sqrt{T_B^2 - T^2} = m_2 g.$$

Здесь $m_1$ и $m_2$ – массы отрезков $AC$ и $CB$ шнура. Кроме того,

$$m_1 + m_2 = m.$$

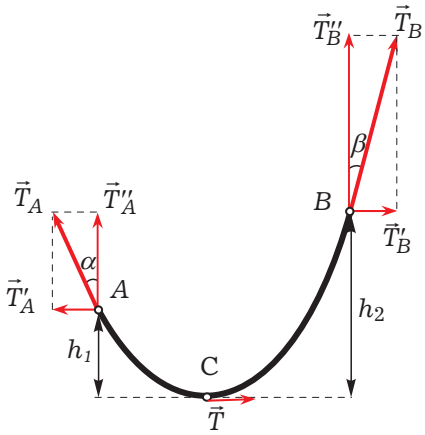


*Рис. 17*

Итак, мы пришли к трём уравнениям с тремя неизвестными:

$$\sqrt{\left(T + \frac{m}{l} g h_1\right)^2 - T^2} = m_1 g,$$

$$\sqrt{\left(T + \frac{m}{l} g h_2\right)^2 - T^2} = m_2 g,$$

$$m_1 + m_2 = m.$$

Сложим первые два уравнения и избавимся от $m_1$ и $m_2$:

$$\sqrt{\left(T + \frac{m}{l} g h_1\right)^2 - T^2} + \sqrt{\left(T + \frac{m}{l} g h_2\right)^2 - T^2} = mg.$$

Решать это уравнение в общем виде достаточно утомительно, поэтому мы позволим себе сразу подставить в него числовые данные:

$$\frac{m}{l} g h_1 = \frac{0{,}4}{4} 10 \cdot 1 = 1(\text{Н}),$$

$$\frac{m}{l} g h_2 = \frac{0{,}4}{4} 10 \cdot 2 = 2(\text{Н}),$$

$$mg = 0{,}4 \cdot 10 = 4\,(\text{Н}),$$

$$\sqrt{(T+1)^2 - T^2} + \sqrt{(T+2)^2 - T^2} = 4.$$

Заметим, что в этом уравнении все цифры имеют размерность силы.

Перенесём один из корней в правую часть и возведём обе части в квадрат:

$$(T+2)^2 - T^2 = 16 - 8\sqrt{(T+1)^2 - T^2} +$$

$$+(T+1)^2 - T^2,$$

$$2T - 13 = 8\sqrt{(T+1)^2 - T^2}\,.$$

Ещё раз возведём в квадрат обе части уравнения:

$$4T^2 - 52T + 169 = 128T + 64,$$

$$4T^2 - 180T + 105 = 0,$$

$$T_{1,2} = \frac{180 \pm \sqrt{180^2 - 4 \cdot 4 \cdot 105}}{2 \cdot 4} \approx$$

$$\approx \frac{180 \pm 175{,}3}{8}.$$

Знак «+» даёт неправдоподобно большое минимальное натяжение. В чём несложно убедиться (рис. 18).

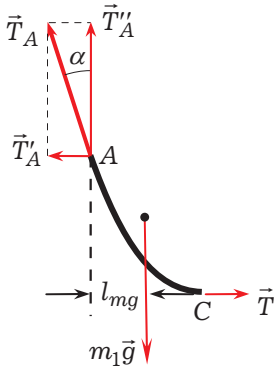


*Рис. 18*

Действительно, для равновесия отрезка $AC$ шнура необходимо равенство моментов силы тяжести отрезка и силы натяжения $T$ относительно точки $A$. Сравним:

$$M_{\text{тяж}} = m_1 g l_{mg} < mgl = 0{,}4 \cdot 10 \cdot 4 =$$

$$= 16\,(\text{Н} \cdot \text{м}),$$

$$M_{\text{нат}} = Th_1 = \frac{180 + 175{,}3}{8} \cdot 1 \approx 44{,}4\,(\text{Н} \cdot \text{м}),$$

$$M_{\text{нат}} > M_{\text{тяж}}.$$

Таким образом, справедливо только

$$T \approx \frac{180 - 175{,}3}{8} \approx 0{,}59\,(\text{Н}).$$

Далее всё просто:

$$T_A = T + \frac{m}{l} g h_1 \approx 0{,}59 + 1 \approx 1{,}59\,(\text{Н}),$$

$$T_B = T + \frac{m}{l} g h_2 \approx 0{,}59 + 2 \approx 2{,}59\,(\text{Н}),$$

$$\sin\alpha = \frac{T}{T_A} \approx \frac{0{,}59}{1{,}59} \approx 0{,}37, \quad \alpha \approx 21{,}7°,$$

$$\sin\beta = \frac{T}{T_B} \approx \frac{0{,}59}{2{,}59} \approx 0{,}23, \quad \beta \approx 13{,}3°.$$

Найдём массу $m_1$ отрезка $AC$:

$$m_1 = \frac{\sqrt{T_A^2 - T^2}}{g} \approx \frac{\sqrt{1{,}59^2 - 0{,}59^2}}{10} \approx$$

$$\approx 0{,}148\,(\text{кг}).$$

Длина $l_{AC}$ отрезка AC шнура

$$l_{AC} = \frac{m_1}{m} l \approx \frac{0{,}148}{0{,}4} 4 \approx 1{,}48\,(\text{м}).$$

**Ответ.** $T \approx 0{,}59$ Н, $T_A \approx 1{,}59$ Н, $T_B \approx 2{,}59$ Н, $\alpha \approx 21{,}7°$, $\beta \approx 13{,}3°$, $l_{AC} \approx 1{,}48$ м.

Надеюсь, что ученику, с интересом изучающему курс физики, статья принесёт определённую пользу.

## Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Однажды Эрнест Резерфорд демонстрировал распад радия слушателям лекции. Экран то светился, то темнел.

– Теперь вы видите, – сказал Резерфорд, – что ничего не видно! А почему ничего не видно, вы сейчас увидите.