Лукьянов Андрей Александрович
Кандидат физико-математических наук, доцент, сотрудник лаборатории МФТИ по работе с одарёнными детьми.

Почему лампочки накаливания не мигают?

Статья посвящена вопросу «Почему обычные лампы накаливания светят “ровным” светом, не мигая, хотя по ним течёт переменный ток?» Вопрос не такой простой, как может показаться, и потребовал привлечения высшей математики и компьютера. Методами, доступными учащимся физико-математических школ, решается нестационарное уравнение теплового баланса для нити в лампе с учётом потерь нитью энергии на излучение.

Хорошо известно, что напряжение в бытовой электросети сети *переменное* – оно изменяется, грубо говоря, по гармоническому (синусоидальному) закону

$$U(t) = U_0 \sin(2\pi\nu t + \phi_0), \qquad (1)$$

где ν – частота. В России принят стандарт частоты $\nu = 50$ Гц (в США 60 Гц (Hz)). Это означает, что у нас в сети 100 раз каждую секунду направление электрического тока изменяется на противоположное.

Когда измеряют напряжение в сети, например, мультиметром, последний даёт так называемое эффективное (среднеквадратичное) значение напряжения, которое связано с амплитудным значением U_0 соотношением

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \approx \frac{U_0}{1{,}4} \approx 0{,}7\,U_0. \qquad (2)$$

Амплитудное (а с ним и среднеквадратичное) значение напряжения не остаётся строго постоянным, но часто непредсказуемо «плавает». В России среднеквадратичное напряжение в бытовой электросети «плавает», грубо говоря, в пределах $U_{\text{eff}} = 220 \div 240$ В. Это считается нормой. На многих бытовых электропри-

борах вы увидите именно разброс возможных значений напряжения $220 \div 240$ В, а не конкретное значение 220 или 230 В. При этом часто указывают и разброс в мощности электроприбора; например, для электрочайника – $1850 \div 2200$ Вт.

В дальнейшем нас будет интересовать не «плавание» напряжения, но быстрое его изменение (1). Заметим, что при этом мощность джоулева тепловыделения в проводнике изменяется по закону

$$P(t) = \frac{U^2(t)}{R} = \frac{U_0^2 \sin^2(2\pi\nu t + \phi_0)}{R} = \\ = \frac{U_0^2}{2R}\left(1 - \cos(4\pi\nu t + 2\phi_0)\right), \qquad (3)$$

т.е. изменяется не с частотой $\nu = 50$ Гц, но с вдвое большей частотой $2\nu = 100$ Гц. Смысл удвоения частоты (уменьшение периода колебаний в два раза) иллюстрирует рис.1.

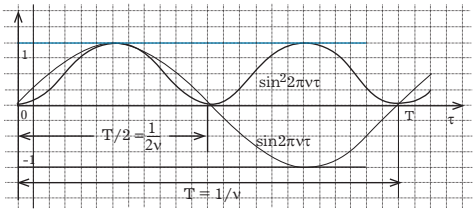

Рис. 1

А теперь переходим к центральному вопросу статьи: *почему мы не замечаем мигания лампочки*? Причин можно назвать как минимум две.

Первая причина: спираль лампочки просто не успевает остывать за малое время порядка 1/100 секунды. Каждый из вас, у кого в доме электрическая (не газовая) плита, несомненно, замечал следующее. При выключении конфорки вода в чайнике, стоящем на этой конфорке, перестает кипеть отнюдь не сразу, а лишь спустя пару минут (не через секунду). Понятна и причина этого: конфорка остаётся достаточно горячей ещё длительное время после её выключения. Если вы отключали электроплиту в вечернее время, то наверняка замечали, что конфорка остаётся красной (как во включенном состоянии) ещё пару минут. Итак, одна из причин, почему не мигает лампочка, – инерционность процесса остывания.

Вторая из возможных причин – «инерционность глаза человека». Известно, что при съёмке кинофильма на пленке фиксируются отдельные кадры. При показе фильма каждую секунду зрителю показывают последовательность из примерно 24 записанных кадров (иногда бывает немного больше, иногда меньше). При этом человек воспринимает действие фильма как непрерывно текущее, не чувствуя никаких рывков. Это связано с «инерционностью человеческого глаза» (или инерционностью обработки информации, поступающей от глаза к мозгу человека).

Так какая из этих двух причин главная в случае обычной электрической лампочки? Заметим: то, что справедливо для конфорки, может оказаться неверным для малюсенькой нити накала в лампе. А может, малюсенькая нить накала успеваетаки заметно нагреваться и остывать за времена порядка 1/100 секунды?

Конечно, 1/100 секунды – это не целая секунда. Секунда – это большой промежуток времени. Средняя скорость речи в русском языке – примерно 17–20 звуков в секунду, а учитывая, что в словах в среднем 7–10 звуков, получаем примерно 2 слова в секунду, или 120 в минуту. 20 звуков в секунду мы без труда отличаем друг от друга. Кстати, мировой рекорд скорости игры на гитаре на 2001 год – 20 нот в секунду. Именно так быстро играл «Полёт шмеля» Римского-Корсакова Виктор Зинчук.

20 нот в секунду трудно сыграть, но различить несложно.

Автор статьи, не будучи биологом, а равно и медиком, не предлагает читателю разобраться с «инерционностью глаза» (инерционностью обработки информации мозгом человека), но как физик предлагает разобраться с инерционностью нагревания и остывания нити накала лампы.

Предварительные оценки

Возьмём обычную 95-ваттную лампочку, работающую при напряжении в сети $U_c = 230$ В (это эффективное значение напряжения (2)).

К сожалению, не всё известно даже про обычную лампочку. Например, каков диаметр и длина нити в лампе? Понятно, что производители ламп это знают. В Интернете автор нашёл об этом нечто не очень определённое: «*Необходим длинный и тонкий провод. Толщина провода в обычных лампочках составляет* 40–50 *микрон*». На глаз определить геометрические параметры нити непросто. Не всегда легко рассмотреть даже с помощью лупы, что представляет собой нить накала (см. рис. 2, 3; снимки из Интернета).

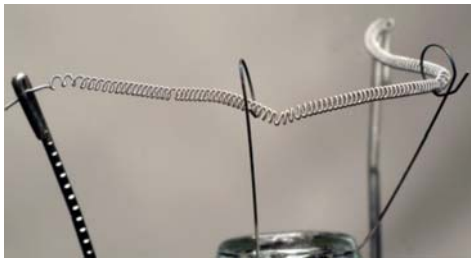

Рис. 2

Рис. 3

Почему это важно? Важны не просто геометрические параметры нити. Спросим себя: почему при непрерывном выделении в нити джоулева тепла (при протекании по ней электрического тока) температура нити не растёт вплоть до температуры плавления (после чего нить должна разрушиться)? Ответ известен: нить непрерывно излучает энергию, причём не только в виде света видимого диапазона. Подавляющая часть излучаемой энергии (примерно 95%) приходится на невидимую человеческим глазом область электромагнитного излучения (так называемую инфракрасную область). Суммарное излучение во всех диапазонах длин волн растёт с ростом температуры излучаемого тела по закону Стефана–Больцмана. Согласно этому закону с поверхности площади S нагретого до температуры T (в Кельвинах) тела излучается каждую секунду энергия

$$\dot{E} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot S, \qquad (4)$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Дж/(м^2·с·К^4) – постоянная Стефана–Больцмана, а безразмерный коэффициент $\varepsilon < 1$ – так называемый коэффициент серости. Он разный для разных веществ, причём зависит от температуры тела. Для вольфрама, из которого чаще всего делают нити накала в лампах, при температурах порядка 3000 К (температурах нитей в рабочем состоянии, когда лампа светит) этот коэффициент порядка 1/3. В даль-

нейшем мы его сами подберём из условия, что в стационарных условиях мощность потерь лампы на излучение должна равняться мощности джоулева тепловыделения.

Чему равна для нити накала в лампе площадь S излучаемой поверхности в формуле (4)? Её можно было бы оценить по формуле

$$S = S_{\text{бок}} = \pi \cdot d \cdot l, \qquad (5)$$

где d – диаметр нити, а l – её длина. К сожалению, о двух последних величинах автору статьи было известно не слишком много (о чём уже говорилось). Пришлось порассуждать и сделать некоторые предположения, так чтобы получились разумные числа.

Длина нити l входит ещё в одну величину – сопротивление нити,

$$R = \rho \frac{l}{s}, \qquad (6)$$

где

$$s = \frac{\pi d^2}{4} \qquad (7)$$

– площадь поперечного сечения нити. Сопротивление может быть измерено мультиметром в холодном состоянии или вычислено по формуле для мощности

$$P = \frac{U^2}{R} \qquad (8)$$

лампы в рабочем состоянии (когда она светит).

Сопротивление холодной нити лампы сильно отличается от его значения в рабочем состоянии; отличие в 13–14 раз. Последнее связано с ростом удельного сопротивления вещества нити при увеличении температуры t по закону

$$\rho(t) = \rho(0)(1 + \alpha \cdot t), \qquad (9)$$

где α – температурный коэффициент сопротивления. Для вольфрама он равен

$$\alpha = 4{,}8 \cdot 10^{-3}\ 1/\text{град}.$$

Учитывать в формулах (5)–(7) изменение геометрических размеров с ростом температуры не имеет смысла: для вольфрама коэффициент линейного расширения на три порядка меньше коэффициента α:

$$l(t) = l(0)(1 + \beta \cdot t), \text{ где}$$

$$\beta = 4{,}5 \cdot 10^{-6}\ 1/\text{град}.$$

Измерение мультиметром сопротивления 95-ваттной лампочки в помещении с температурой $t = 24\ ^\circ\text{C}$ показало значение $R(24) \approx 40$ Ом. Отсюда, зная удельное сопротивление вольфрама $\rho(24)$ и диаметр нити d (порядка 40–50 мкм), мы могли бы оценить длину нити накала l, входящую в (4)–(5), по формуле

$$l = \frac{R(24)}{\rho(24)} \cdot \frac{\pi d^2}{4}. \qquad (10)$$

Удельное сопротивление $\rho(24)$ найдём, воспользовавшись данными справочника об удельном сопротивлении вольфрама при комнатной температуре ($T = 300$ К, $t = 27\ ^\circ\text{C}$):

$$\rho(27) = 5{,}65 \cdot 10^{-8}\ \text{Ом} \cdot \text{м}.$$

Тогда по формуле (9) получаем

$$\rho(24) = \rho(0)(1 + \alpha \cdot 24) = \frac{(1 + \alpha \cdot 24)}{(1 + \alpha \cdot 27)} \rho(27) \approx$$

$$\approx 5{,}58 \cdot 10^{-8}\ \text{Ом} \cdot \text{м}.$$

Положив в формуле (10) диаметр нити $d = 30$ мкм (не 40 и не 50 мкм; см. ниже), для длины нити получаем оценку

$$l = 0{,}51\ \text{м} \approx 0{,}5\ \text{м}.$$

Тогда для площади боковой поверхности нити согласно формуле (5) имеем оценку

$$S_{\text{бок}} \approx 4{,}7 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^2.$$

Чтобы оценить энергетические потери лампочки в рабочем состоянии по формуле (4), нужно сначала оценить температуру нити в лампе в состоянии, когда лампа светит. Для этого сравним два сопротивления ни-

ти – в холодном состоянии (с температурой в помещении $t = 24\ ^\circ\text{C}$), измеренное мультиметром (напомним $R(24) = 40$ Ом), и в рабочем состоянии. Последнее сопротивление вычислим по формуле (8):

$$R(t) = \frac{U^2}{P} = \frac{230^2}{95} \approx 567 \text{ Ом}.$$

Полагая $R(t) = R(0)(1 + \alpha \cdot t)$ и $R(24) = R(0)(1 + \alpha \cdot 24)$, получаем

$$t = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{R(t)}{R(24)}(1 + \alpha \cdot 24) - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[\frac{U^2 / P}{R(24)}(1 + \alpha \cdot 24) - 1\right] \approx 3030\ ^\circ\text{C},$$

т.е. $T \approx 3300$ К.

Тогда в формуле (4) имеем $\sigma \cdot T^4 \cdot S_{\text{бок}} \approx 320$ Вт. Но с учётом коэффициента серости $\varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot S_{\text{бок}}$ эта величина должна равняться мощности лампы, т. е. 95 Вт. Отсюда получаем $\varepsilon = 95 / 320 \approx 0{,}297 \approx 0{,}3$, что находится в разумном согласии с табличными значениями.

Заметим, что если бы мы положили диаметр нити $d = 40$ мкм, то по формуле (10) получили бы большую длину нити $l \approx 0{,}90$ м; площадь излучаемой поверхности при этом согласно (5) тоже была бы больше, а именно $S_{\text{бок}} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-4}$ м^2. Произведение $\sigma \cdot T^4 \cdot S_{\text{бок}}$ в этом случае равнялось бы примерно 740 Вт. Тогда для коэффициента серости мы получили бы уравнение $\varepsilon \cdot 740 \approx 95$ с решением $\varepsilon \approx 0{,}13$. По-видимому, это слишком маленькое значение коэффициента серости для вольфрама при температурах порядка 3000 К.

Дальше нам не обойтись без высшей математики и компьютера.

Продолжение решения

Дальнейшее решение задачи – для тех, кто знаком с высшей математикой и компьютерными математическими программами.

Основное уравнение, которое нам придётся решать численно на компьютере, – нестационарное уравнение теплового баланса для нити накала в лампе:

$$m \cdot c \frac{dT}{d\tau} = \frac{(U_0^2 / 2)(1 + \cos 4\pi\nu\tau)}{R(T(\tau))} - \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4(\tau) \cdot S_{\text{бок}}. \qquad (11)$$

Здесь $m = \rho_m \frac{\pi d^2}{2} l$ – масса нити, $\rho_m = 19{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3 – плотность вольфрама, $c = 133$ Дж/(кг·К) – удельная теплоёмкость вольфрама, $d = 30$ мкм – диаметр нити, $l \approx 0{,}51$ м – длина нити, $\varepsilon \approx 0{,}3$ – коэффициент серости вольфрама при температурах порядка 3000 К, $\frac{U_0}{\sqrt{2}} = U_c = 230$ В – напряжение в сети.

Чтобы не путаться с температурами то в градусах Цельсия, то в Кельвинах, вместо зависимости сопротивления вольфрамовой нити от температуры $R(t) = R(0)(1 + \alpha \cdot t)$ положим приближенно

$$R(T) \approx \frac{T}{T_0} R_0 = \frac{T}{T_0 + t_1} \cdot \frac{U_c^2}{P}, \qquad (12)$$

где $T_0 = 273$ К,

$$t_1 = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{U_c^2 / P}{R(0)} - 1\right] = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{U_c^2 / P}{R(24)}(1 + \alpha \cdot 24) - 1\right] \approx$$

$\approx 3030\ ^\circ\text{C}$, $T_0 + t_1 \approx 3300$ К.

Напомним, что температура плавления вольфрама около 3410 °C, или примерно 3680 К.

Формула (12) не очень хорошо работает при низких температурах: даёт значение сопротивления 46 Ом при $T_0 = 273$ К (вместо 40 Ом). Зато при высоких температурах нити, которые нас интересуют значительно больше, даёт правильные значения сопротивлений нити:

$$R(T_0 + t_1) \approx \frac{U_c^2}{P} \approx 567 \text{ Ом}.$$

Прежде чем численно на компьютере решать уравнение (11), удобно в нём перейти к безразмерным переменным: температуру измерять в единицах $T_0 = 273$ К, $x = T / T_0$, а время в единицах $1/\nu =$ 0,02 с, $\tau' = \nu\tau$. В безразмерных переменных уравнение (11) примет вид

$$\frac{dx}{d\tau'} = A\frac{1+\cos(4\pi\tau')}{x(\tau')} - B \cdot x^4(\tau'),$$

где

$$A = \frac{U_c^2 / R_0}{m \cdot c \cdot T_0 \cdot \nu} \approx 91{,}44,$$

$$B = \frac{\varepsilon \cdot \sigma \cdot T_0^4 \cdot S_{\text{бок}}}{m \cdot c \cdot T_0 \cdot \nu} \approx 0{,}0003548.$$

Уравнение (11) дополним начальным условием

$$T(0) = T_0 = 273 \text{ К, т.е. } x(0) = 1.$$

Численное решение уравнения (11) средствами MATHEMATICA 2.5 представлено на рис. 4.

Время измерено в единицах

$$1/\nu = 0{,}02 \text{ с}.$$

Максимальное рассмотренное время 1/5 с. Для удобства показаны значения мощности 95 Вт и

$$95 \pm 20 \text{ Вт } (20/95 \approx 0{,}21).$$

Из графиков рисунков 4 и 5 видно, что температура нити в лампе и её мощность сильно колеблются вместе с колебаниями напряжения в сети. Амплитуда колебаний мощности составляет 20% от значения 95 Вт, вокруг которого происходят колебания. Ясно, что если мы не замечаем мигания лампы, то не вследствие инерционности процессов нагрева и остывания её нити накала. Безусловно, это связано с «инерционностью глаза» (или инерционностью обработки мозгом информации от глаза).

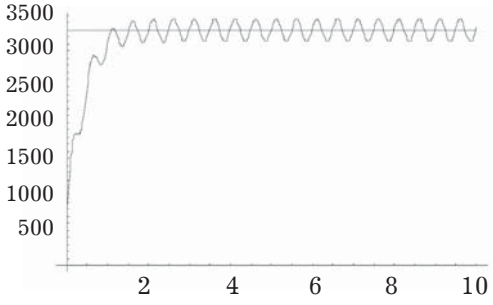

Рис. 4. Зависимость абсолютной температуры нити накала от времени

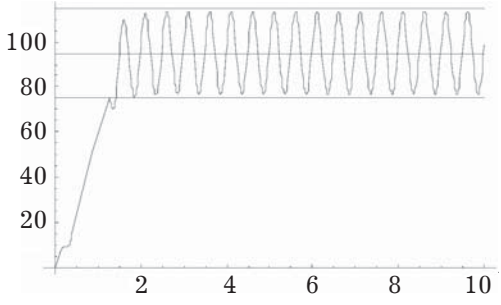

Рис. 5. Зависимость мощности излучения 95-ватной лампочки от времени