Пиголкина Татьяна Сергеевна
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики МФТИ,
заслуженный работник высшей школы,
заместитель председателя научно-методического
совета ЗФТШ при МФТИ.

Объём тетраэдра

В статье рассматривается круг задач, решение которых основано на знании и применении различных формул объёма тетраэдра. Подобные задачи достаточно часто предлагаются на вступительных экзаменах в вузы, которые предъявляют высокие требования к математической подготовке своих будущих студентов. Статья написана как дополнение к заданию по стереометрии для 11 класса ЗФТШ.

Напомним, что тетраэдром (т.е. четырёхгранником) называется произвольная треугольная пирамида. Пирамида правильная, если одна из граней – правильный треугольник, а противоположная вершина проектируется в его центр. В правильном тетраэдре все рёбра равны между собой.

Тетраэдр – простейший и наиболее изученный многоугольник. Для его объема выведено несколько формул, некоторые из них аналогичны соответствующим формулам площади треугольника.

Это основная формула объёма тетраэдра

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H, \qquad (1)$$

где H – высота к плоскости основания, и две следующие:

$$V=\frac{2}{3}S_1\cdot S_2\frac{\sin\alpha}{a} \qquad (2)$$

где S_1 и S_2 – площадь двух граней тетраэдра, a – длина их общего ребра, α – величина двухгранного угла между этими гранями;

$$V=\frac{1}{3}(S_1+S_2+S_3+S_4)r \qquad (3)$$

где S_1, S_2, S_3, S_4 – площади граней, r – радиус вписанной сферы.

Формула (1) доказана в учебнике, формула (3) достаточна очевидна. Действительно, в любой тетраэдр можно вписать сферу; если O – центр сферы, то, соединив точку O со всеми вершинами тетраэдра, разобьём его на четыре пирамиды с общей вершиной O. Высота каждой из пирамид равна r, поэтому

$$V=\frac{1}{3}S_1\cdot r+\frac{1}{3}S_2\cdot r+\frac{1}{3}S_3\cdot r+\frac{1}{3}S_4\cdot r.$$

Формулу (3) иногда записывают как

$$V=\frac{1}{3}S_{полн}\cdot r.$$

Докажем формулу (2):

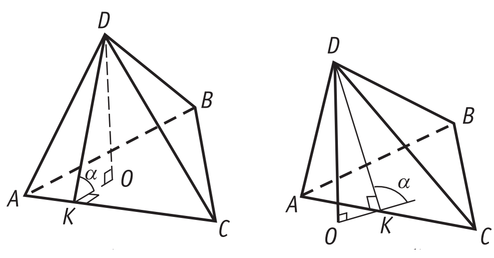


Рис. 1. а) б)

$\triangle$ Рассмотрим тетраэдр $ABCD$, в котором $AC=a$, плоскости граней ABC и ADC равны S_1 и S_2 соответственно. Пусть вершина D проектируется в точку O плоскости основания ABC и $DK\perp AC$ (рис.1). По теореме о трёх перпендикулярах $OK\perp AC$.

Угол DKO либо равен величине α двугранного угла между гранями ADC и ABC

(рис.1 а, точки O и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC), либо $\angle DKO = 180^0 - \alpha$ (рис.1 б, точки O и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC).

Если же точка O лежит на прямой AC, то плоскость ADC содержит перпендикуляр к плоскости ABC и перпендикулярна ей, т.е. $\alpha = 90^0$. Во всех случаях $DO = DK \cdot \sin\alpha$.

Так как $S_2 = \frac{1}{2} AC \cdot DK$, то

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} S_1 \cdot DK \cdot \sin\alpha = \frac{1}{3} S_1 \frac{\frac{1}{2} AC \cdot DK}{\frac{1}{2} AC} \cdot \sin\alpha,$$

откуда $V = \frac{2}{3} S_1 \cdot S_2 \frac{\sin\alpha}{a}$. ▲

Пример 1 (МГУ, мехмат) В пирамиде $ABCD$ ребро AD равно 1, точка E лежит на ребре BC так, что $BE:EC = 1:2$ (рис.2). Сечение AED имеет площадь 2 и образует с гранями ABD и ACD соответственно углы 30^0 и 60^0. Найти объём пирамиды $ABCD$.

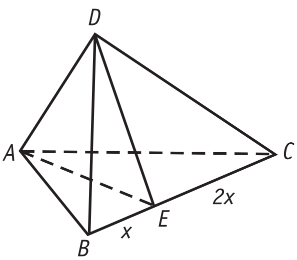


Рис. 2.

$\triangle$1) Обозначим V, V_1 и V_2 соответственно объёмы пирамид $ABCD$, $ABED$ и $ACED$, а S_1, S_0 и S_2 – соответственно площади треугольников ABD, AED и ACD. По условию $S_0 = 2$.

Из формулы (1) следует, что $V_1 = \frac{1}{3} V$ и $V_2 = \frac{2}{3} V$ (так как $S_{ABE} = \frac{1}{3} S_{ABC}$).

2) С другой стороны, по доказанной формуле

$$V_1 = \frac{2}{3} S_1 \cdot S_0 \cdot \frac{\sin 30^0}{AD} = \frac{2}{3} S_1,$$

$$V_2 = \frac{2}{3} S_0 \cdot S_2 \cdot \frac{\sin 60^0}{AD} = \frac{2\sqrt{3}}{3} S_2.$$

Из определения меры двугранного угла следует, что двугранный угол между гранями ABD и ACD равен сумме углов, образованных сечением с этими гранями, поэтому

$$V = \frac{2}{3} S_1 \cdot S_2 \cdot \frac{\sin 90^0}{AD} = \frac{2}{3} S_1 \cdot S_2.$$

3) Приравниваем выражения для V_1 и V_2, получаем $S_1 = \frac{1}{2} V$ и $S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} V$. Подставляя это в формулу объёма V, устанавливаем, что $V = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} V \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} V$, откуда $V = 3\sqrt{3}$. ▲

Ответ: $3\sqrt{3}$.

Применение основной формулы (1) часто основано на том, что за основание может быть принята любая из граней тетраэдра.

Пример 2 (МФТИ) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, угол между апофемой и боковой гранью равен $\frac{\pi}{4}$. Определить высоту пирамиды. *)

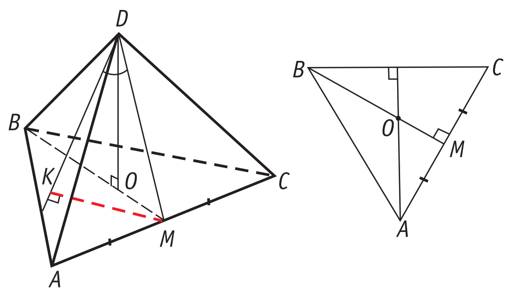


Рис. 3.

$\triangle$ 1) Пирамида $ABCD$ – правильная, все боковые рёбра равны между собой, высота проектируется в центр правильного треугольника ABC со стороной a (рис. 3).

Если точка M – середина стороны AC, то DM – апофема, $OM = \frac{1}{3} BM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Обозначим $DM = h$, $DO = H$.

*) Чтобы не загромождать решение и одновременно сделать его достаточно прозрачным, кроме основного рисунка отдельно даются изображения какой-то грани или сечения.

2) Пусть MK – перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость грани ABD. Угол MDK – это угол между апофемой DM и гранью ABD, по условию $\angle MDK = \frac{\pi}{4}$. Из прямоугольного треугольника MDK следует, что

$$MK = DM \cdot \sin\frac{\pi}{4} = h \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3) Рассмотрим пирамиду $ABMD$. С одной стороны, её объём

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{ABM} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \cdot H = \frac{\sqrt{3}}{24} a^2 H.$$

С другой стороны, $V_1 = \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot MK$ (за основание принимаем грань ABD). Площадь каждой боковой грани равна $\frac{1}{2}ah$, поэтому

$$V_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}ah\right) \cdot h\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12} ah^2.$$

Приравнивая выражения для V_1, получим

$$h^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} aH.$$

4) Соотношение между a, h и H установим из прямоугольного треугольника DOM:

$DM^2 = DO^2 + OM^2$, т.е. $h^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$. Исключаем h^2 из двух последних выражений и из квадратного уравнения $H^2 - \frac{\sqrt{6}}{4} aH + \frac{a^2}{12} = 0$ находим $H_1 = \frac{\sqrt{6}}{6} a$ и $H_2 = \frac{\sqrt{6}}{12} a$. ▲

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6} a$; $\frac{\sqrt{6}}{12} a$.

Тот же приём выражения объёма тетраэдра через площади различных частей: $V = \frac{1}{3} S_1 H_1 = \frac{1}{3} S_2 H_2$ используется для определения расстояния между скрещивающимися прямыми. В основе этого лежат следующие рассуждения.

Пусть ***а*** и ***в*** – скрещивающиеся прямые, плоскость α содержит прямую ***в*** и прямую ***а'***, параллельную прямой ***а*** (рис.4). Прямая ***а*** параллельна плоскости α, расстояние от любой точки прямой ***а*** до плоскости α одинаково. Отсюда следует, что расстояние между прямыми ***а*** и ***в*** равно расстоянию от любой точки прямой ***а*** до плоскости α.

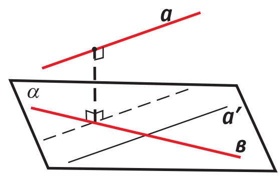


Рис. 4.

Пример 3 (МФТИ) В основании правильной пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 3, высота пирамиды равна 1 (рис.5). Точки M и N – середины рёбер BC и AD соответственно. Найти расстояние между прямыми MN и DC.

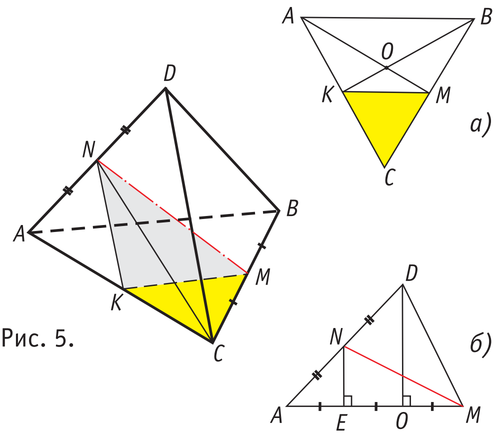


Рис. 5.

△1) Проведём $NK \parallel DC$. Прямая DC параллельна плоскости MNK и расстояние между прямыми DC и MN равно расстоянию от любой точки прямой DC до плоскости MNK. Удобнее всего выбрать на DC точку C и вычислить расстояние до плоскости MNK от неё, так как объём V_1 пирамиды $CMNK$ легко находится как часть объёма V пирамиды $ABCD$, а с другой стороны её объём $V_1 = \frac{1}{3} S_{MNK} \cdot x$, где x – расстояние от точки C до плоскости MNK, т.е. искомое расстояние.

2) Введём для удобства обозначения: $a = AB = 3$, $H = DO = 1$, тогда

$$V = V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H = \frac{1}{3} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} H = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

3) Вершина D проектируется в центр O основания ABC, точка O лежит на медиане AM треугольника ABC и $AO:OM = 2:1$ (рис. 5а).

Если NE – перпендикуляр из середины стороны AD на плоскость основания, то $NE \parallel DO$ и $NE = \frac{1}{2} DO = \frac{1}{2} H$ (рис. 5б).

Из $NK \parallel DC$ и $AN = ND$ следует $AK = KC$, тогда KM – средняя линия треугольника ABC, $S_{CKM} = \frac{1}{4} S_{ABC}$ и

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{CKM} \cdot NE = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} S_{ABC} \cdot \frac{1}{2} H = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H\right) = \frac{1}{8} V,$$

т.е. $V_1 = \frac{3\sqrt{3}}{32}$.

4) Вычисляем стороны треугольника MNK.

Имеем: $NK = \frac{1}{2} DC$,

$$DC = DA = \sqrt{DO^2 + OA^2} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 2, NK = 1;$$

$$KM = \frac{1}{2} AB = \frac{3}{2} \text{ и}$$

$$MN = \sqrt{NE^2 + EM^2} = \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Нетрудно заметить, что $NK^2 + KM^2 = MN^2$, т.е. угол $MKN = 90°$, поэтому

$$S_{MNK} = \frac{1}{2} NK \cdot KM = \frac{3}{4}.$$

Таким образом $V_1 = \frac{1}{3} S_{MNK} \cdot x = \frac{1}{4} x$, а ранее установили $V_1 = \frac{3\sqrt{3}}{32}$. Находим $x = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. ▲

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Отметим ещё один полезный факт, иногда существенно упрощающий решение задачи. Пусть из точки D выходят три луча, не лежащие в одной плоскости. На одном луче лежат точки A и A_1, на другом B и B_1, на третьем – C и C_1 (рис. 6).

Рассмотрим два тетраэдра: $DABC$ и $DA_1B_1C_1$, их объёмы обозначим V и V_1.

Основания DBC и DB_1C_1 лежат в одной плоскости, при этом $S_{DBC} = \frac{1}{2} DB \cdot DC \cdot \sin\alpha$ и $S_{DB_1C_1} = \frac{1}{2} DB_1 \cdot DC_1 \cdot \sin\alpha$.

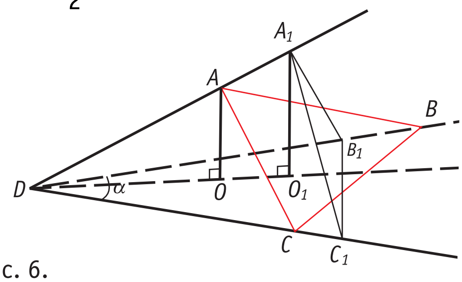


Рис. 6.

Если AO – перпендикуляр к плоскости основания, то луч DO – проекция луча DA на плоскость основания и проекция O_1 точки A_1 также будет лежать на луче DO.

Из подобия треугольников DAO и DA_1O_1 следует $\frac{AO}{A_1O_1} = \frac{DA}{DA_1}$. По формуле (1) $V = \frac{1}{3} S_{DBC} \cdot AO$, $V_1 = \frac{1}{3} S_{DB_1C_1} \cdot A_1O_1$, откуда

$$\frac{V_1}{V} = \frac{DA_1 \cdot DB_1 \cdot DC_1}{DA \cdot DB \cdot DC}. \qquad (4)$$

Пример 4 (МФТИ) В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 6, угол между боковыми гранями равен $\arccos\frac{1}{10}$ (рис.7). В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найти объём пирамиды $A_1B_1C_1D$.

△ План решения легко намечается: надо вычислить объём пирамиды $ABCD$ и установить отношения $\frac{DA_1}{DA}, \frac{DB_1}{DB}, \frac{DC_1}{DC}$.

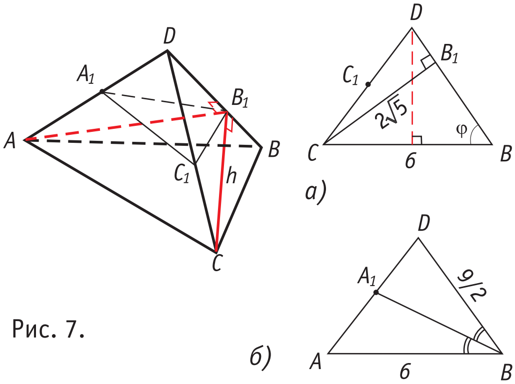


Рис. 7.

1) Пирамида правильная, все боковые грани – равные между собой равнобедренные треугольники, поэтому если $CB_1 \perp DB$, то $AB_1 \perp DB$ и $AB_1 = CB_1$.

Обозначим $CB_1 = h$, $\angle AB_1C = \alpha$. По условию $\alpha = \arccos\frac{1}{10}$, т.е. угол α – острый, $\cos\alpha = \frac{1}{10}$ и $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{11}}{10}$.

Применим теорему косинусов к треугольнику AB_1C: $AC^2 = AB_1^2 + CB_1^2 - 2AB_1 \cdot CB_1 \cdot \cos\alpha$, или $36 = 2h^2\left(1 - \frac{1}{10}\right)$, откуда $h = 2\sqrt{5}$.

2) В треугольнике BCD (рис.7а) обозначим $\angle B = \varphi$, а равные боковые стороны через b. Из треугольника BCB_1 имеем

$$\sin\varphi = \frac{CB_1}{CB} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$ тогда $\cos\varphi = \frac{2}{3}$ и

$$b = \frac{\frac{1}{2}CB}{\cos\varphi} = \frac{9}{2}.$$

Вычислим объём пирамиды $ABCD$ по формуле (2):

$$V = \frac{2}{3}S_{BCD} \cdot S_{ABD} \cdot \frac{\sin\alpha}{BD} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}bh\right)^2 \frac{\sin\alpha}{b} = \frac{9 \cdot \sqrt{11}}{2}$$

3) Из треугольника BCB_1 находим

$BB_1 = BC\cos\varphi = 4$, тогда $DB_1 = DB - BB_1 = \frac{1}{2}$,

т.е. $DB_1 = \frac{1}{9}b$.

Если точка C_1 – середина стороны CD, то $DC_1 = \frac{1}{2}b$, а если BA_1 – биссектриса треугольника ADB, то по свойству биссектрисы треугольника $\frac{DA_1}{AA_1} = \frac{DB}{AB}$, т.е. $\frac{DA_1}{AA_1} = \frac{3}{4}$, откуда $\frac{DA_1}{AD} = \frac{3}{7}$, т.е. $DA_1 = \frac{3}{7}b$.

4) По формуле (4) для объёма V_1 пирамиды $A_1B_1C_1D$ имеем

$V_1 = \frac{DA_1}{DA} \cdot \frac{DB_1}{DB} \cdot \frac{DC_1}{DC} \cdot V = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2}V$, откуда

$V_1 = \frac{1}{42}V = \frac{3\sqrt{11}}{28}$.▲

Ответ: $\frac{3\sqrt{11}}{28}$.

Напомним ещё одну формулу объёма тетраэдра

$$V = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\varphi \cdot d, \qquad (5)$$

где a и b – длины противолежащих рёбер тетраэдра, φ – угол между скрещивающимися прямыми, на которых лежат эти рёбра, d – расстояние между этими прямыми.

△Достроим тетраэдр до параллелепипеда, проводя через каждое его ребро плоскость, параллельную противолежащему ребру. Три пары параллельных плоскостей образуют параллелепипед, в котором рёбра исходного тетраэдра являются диагоналями граней (рис. 8).

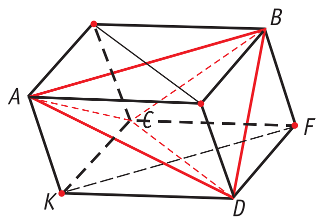


Рис. 8.

За основание параллелепипеда примем грань с диагональю CD, его площадь обозначим S, тогда объём параллелепипеда $\upsilon = Sd$, где d – расстояние между плоскостью основания и плоскостью параллельной ей грани.

Объём параллелепипеда равен сумме объёма тетраэдра V и объёма четырех пирамид, в каждой из которых основание составляет половину площади S параллелограмма $KCFD$ и высота совпадает с высотой параллелепипеда.

Таким образом, $\upsilon = V + 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S\cdot d = V + \frac{2}{3}\upsilon$, откуда $V = \frac{1}{3}\upsilon$.

Так как диагональ KF равна и параллельна диагонали AB, то $S = \frac{1}{2}AB\cdot CD\cdot\sin\varphi$, где φ – угол между диагоналями KF и CD и равен углу между прямыми AB и CD. Поэтому $v = \frac{1}{2}AB\cdot CD\cdot\sin\varphi\cdot d$ и $V = \frac{1}{6}AB\cdot CD\cdot\sin\varphi\cdot d$. Очевидно, что расстояние d равно расстоянию между скрещивающимися прямыми AB и CD. ▲

Формула (5) особенно удобна в случае, когда противоположные рёбра тетраэдра перпендикулярны друг другу.

Лемма. Если в тетраэдре $ABCD$ рёбра таковы, что AB = BC и AD = DC, то рёбра AC и BD перпендикулярны.

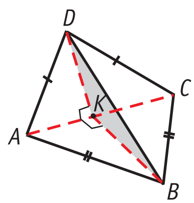


Рис. 9.

△ Пусть точка K – середина ребра AC, тогда $AC\perp DK$ и $AC\perp BK$. Это означает, что ребро AC перпендикулярно плоскости BDK и, следовательно, перпендикулярно любой прямой, лежащей в этой плоскости. Значит $AC\perp BD$. ▲

Следствие. В правильной треугольной пирамиде и в правильном тетраэдре противоположные рёбра перпендикулярны.

Пример 5 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ основание ABC – треугольник со стороной 6. Расстояние между скрещивающимися ребрами AS и BC равно 4,5. Найти длину бокового ребра.

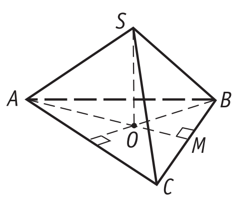


Рис. 10.

△Пирамида правильная, вершина S проектируется в центр O основания ABC (рис.10), $AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\left(BC\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$.

Обозначим высоту $SO = H$, тогда

$$AS = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{H^2 + 12}.$$

По доказанной лемме $AS\perp BC$, по формуле (5) объём пирамиды $SABC$ выразится так: $V = \frac{1}{6}AS\cdot BC\cdot\sin 90^\circ\cdot d$, где $d = 4{,}5$, т.е. $V = 4{,}5\cdot\sqrt{H^2+12}$.

С другой стороны по формуле (1) $V = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot H = 3\sqrt{3}\cdot H$.

Из равенства $4{,}5\cdot\sqrt{H^2+12} = 3\sqrt{3}\cdot H$ находим $H = 6$ и $AS = \sqrt{H^2 = 12} = 4\sqrt{3}$. ▲

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Пример 6 (МФТИ) В треугольной пирамиде $ABCD$ рёбра AC и BD перпендикулярны друг другу, $AD = BC = 3$, $\angle DAB = 90^\circ$, $\angle DBA = 45^\circ$ и $AC = 2\sqrt{3}$. Найти радиус сферы, вписанной в эту пирамиду.

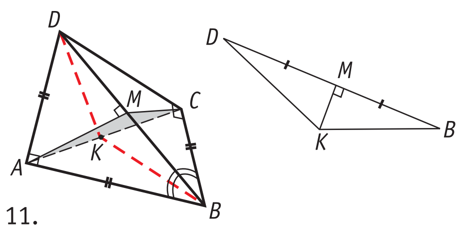


Рис. 11.

△ 1) В треугольнике DAB угол A прямой, угол B равен 45°, следовательно $AB = AD = 3$ и $BD = 3\sqrt{2}$.

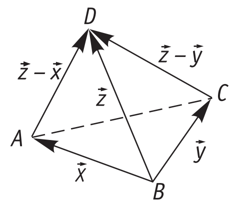
Пусть M – середина BD, тогда $BD\perp AM$. По условию $BD\perp AC$, следовательно прямая BD перпендикулярна плоскости AMC и перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Значит $BD\perp CM$, в треугольнике DCB медиана CM является высотой, треугольник DCB – равнобедренный, $DC = BC$.

Итак, доказано $DA = AB = BC = DC$, откуда следует, что △ DAB = △ DCB и △ ADC = △ ABC

(по третьему признаку равенства треугольников).

2)Пусть точка K – середина отрезка AC, тогда $BK = DK$ и $AC \perp BK$, $AC \perp DK$.
Из равенства $BK = DK$ следует, что в равнобедренном треугольнике DBK медиана $KM \perp BD$, а перпендикулярность прямой AC прямым BK и DK означает, что прямая AC перпендикулярна плоскости DBK и потому $AC \perp KM$.
Таким образом, отрезок KM – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AC и BD.
3) Из прямоугольного треугольника ADK находим $DK = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{1}{2}AC\right)^2} = \sqrt{6}$, а из прямоугольного треугольника DKM вычисляем
$KM = \sqrt{DK^2 - \left(\frac{1}{2}BD\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
По формуле 5 объём тетраэдра $ABCD$ равен
$V = \frac{1}{6}BD \cdot AC \cdot KM = \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = 3$.
3) Вычислим площади граней:
$S_{ABD} = S_{CBD} = \frac{1}{2}AD^2 = \frac{9}{2}$,
$S_{ABC} = S_{ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot DK = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$.
Полная поверхность тетраэдра равна $2\left(\frac{9}{2} + 3\sqrt{2}\right) = 9 + 6\sqrt{2}$ и радиус вписанной сферы находим по формуле (3):
$$r = \frac{3V}{S_{полн}} = \frac{9}{9+6\sqrt{2}} = \frac{3}{3+2\sqrt{2}} = 3\left(3-2\sqrt{2}\right). \blacktriangle$$
Ответ: $3\left(3-2\sqrt{2}\right)$.

Замечание. Используя векторный метод, нетрудно доказать, что противоположные рёбра AC и BD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда
$$AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2 \qquad (6)$$



$\triangle$Обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{y}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{z}$.
Пусть $AC \perp BD$, тогда $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. Так как $\overrightarrow{AC} = \vec{y} - \vec{x}$, то $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\vec{y} - \vec{x}\right)\vec{z} = 0$,
откуда $\vec{y}\vec{z} = \vec{x}\vec{z}$.

Имеем: $AB^2 + DC^2 = x^2 + z^2 + y^2 - 2\vec{y}\vec{z}$,
$AD^2 + BC^2 = z^2 + x^2 - 2\vec{x}\vec{z} + y^2$, и так как $\vec{y}\vec{z} = \vec{x}\vec{z}$, то равенство (6) выполнено.

Обратно, пусть
$AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2$, тогда $\vec{y}\vec{z} = \vec{x}\vec{z}$, т.е. $\left(\vec{y} - \vec{x}\right)\vec{z} = 0$. Это и означает $AC \perp BD$. $\blacktriangle$

ОДНАЖДЫ НА ЛЕКЦИИ

Мнимое время – это то же самое, что и мнимая единица.

Сначала сделаем эту задачу по честному, а потом – как здравомыслящие люди.

Сейчас я впервые публично проинтегрирую.

Функция задана не скажу где.

Это множество не из области определения, а из области фантастики

Только маньяки в этом месте интегрируют P.

Она больше для меня не функция – теперь у меня другая ориентация.