



Подлесный Дмитрий Владимирович
 Заместитель директора по развитию,
 научный руководитель ГБОУ РМ
 «Республиканский лицей»,
 кандидат педагогических наук, доцент,
 заслуженный работник высшей школы Российской
 Федерации, народный учитель Республики Мордовия.

Переходные процессы в RL-цепях

В статье рассматриваются электрические цепи, в которых действуют источники тока с постоянной ЭДС, и в которых присутствуют катушки индуктивности. Особое внимание уделяется переходным процессам, когда в результате каких-либо манипуляций цепь переходит из одного стационарного состояния в другое. Под стационарным понимается такое состояние электрической цепи, в котором не происходит изменения токов через её элементы (источники, резисторы, катушки), а также нет изменения зарядов на конденсаторах, если таковые присутствуют.

Наряду с простыми классическими вопросами о протекании электрического заряда через резисторы и выделении на них теплоты в процессах установления тока в цепях с одной катушкой рассмотрены и более сложные задачи, когда в указанных процессах участвуют две катушки.

Также в статье рассматривается оригинальный пример, иллюстрирующий так называемое «столкновение токов катушек», подобное аналогичному «столкновению напряжений конденсаторов», происходящему при практически нулевых сопротивлениях соединительных проводов. Оба этих «столкновения» сродни абсолютно неупругому соударению тел, сопровождающемуся диссипацией механической энергии и переходом её в тепловую энергию. И об этом рассказывается уже в первом разделе нашего изложения.

1. Предварительные замечания

Замечание 1. При протекании электрического тока I , зависящего от времени t , через катушку с индуктивностью L в катушке воз-

никает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{si}$, препятствующая изменению тока и равная, согласно закону Фарадея:

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt},$$

где $\frac{dI}{dt}$ – производная силы тока $I(t)$ по времени.

Поэтому при записи уравнения второго правила Кирхгофа для контура или уравнения закона Ома для участка цепи, содержащего катушку индуктивности L , её (катушку) надо учитывать как батарейку с ЭДС $\mathcal{E}$, действующей в направлении тока (рис. 1), имеющую внутреннее сопротивление r , равное омическому сопротивлению катушки. ЭДС $\mathcal{E}$ при этом есть не что иное, как ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{si}$, а омическое сопротивление катушки – это обычное электрическое сопротивление провода, которым намотана катушка.

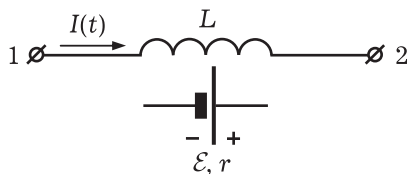


Рис. 1

С учётом этого для разности потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$ на концах катушки имеем: $(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E} = Ir$ или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = L \frac{dI}{dt} + Ir.$$

В стационарном состоянии цепи сила электрического тока, протекающего через катушку, постоянна. Следовательно, производная силы тока по времени обращается в ноль, и разность потенциалов (или напряжение U) на её концах определяется так же, как и для простого резистора с сопротивлением r : $U = \varphi_1 - \varphi_2 = Ir$. Если при этом омическим сопротив-

лением катушки можно пренебречь и считать $r = 0$, то напряжение на концах катушки будет также равняться нулю.

Замечание 2. Работая с электрическими цепями, содержащими катушки индуктивности, надо иметь в виду, что катушка с током – это объект, обладающий энергией. Энергия W_L катушки индуктивности L с током I определяется по формуле:

$$W_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L},$$

где $\Phi = LI$ – магнитный поток, пронизывающий катушку.

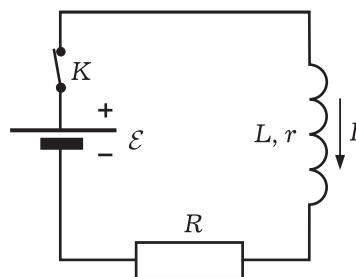


Рис. 2

Поэтому никакие манипуляции с ключами и переключателями в электрической цепи, содержащей катушку индуктивности, никогда не изменят мгновенно силу тока в этой катушке. Здесь, конечно же, не имеется в виду ситуация с размыканием ключа в цепи (рис. 2), когда току «некуда деваться», и он просто вынужден измениться и стать равным нулю, а также ситуация, описанная ниже, в которой происходит «столкновение токов». Куда же девается энергия катушки при этом? Она излучается. Часто говорят, что в ключе при этом «пробивает искра», так как разность потенциалов между контактами ключа в предельно малый промежу-

ток времени, за который протекает процесс исчезновения тока в цепи, становится колоссальной!

В обычных же ситуациях, когда току «есть куда деваться», если замыкают (или размыкают) ключ в цепи, и при этом требуется найти силы токов в элементах цепи сразу после замыкания ключа, помните, что сила тока в катушке, равно как и в элементах, соединённых с ней последовательно, мгновенно не изменится и останется той же, что и была непосредственно перед замыканием этого ключа. В противном случае, мгновенно изменилась бы энергия катушки, а это невозможно без совершения работы. Замыкая ключ в цепи, мы никакой работы не совершаем.

Совершенно по-другому выглядит процесс быстрого изменения индуктивности катушки с током, когда из неё, например, быстро удаляют ферритовый сердечник. Здесь, извлекая сердечник, мы совершаем работу, которая и идёт на увеличение энергии катушки. Несмотря на то, что индуктивность катушки L уменьшается, энергия катушки возрастает, поскольку индуктивность катушки пропорциональна магнитной проницаемости μ материала, из которого сделан сердечник, заполняющий всё внутреннее пространство катушки. Дело в том, что магнитный поток Φ не может измениться за бесконечно малое время, и обязан остаться постоянным. А это возможно лишь при соответствующем изменении силы тока в катушке. Таким образом, в результате удаления сердечника её индуктивность уменьшается, а ток возрастает так, чтобы сохранился магнитный поток, вследствие чего энергия W_L катушки возрастает, поскольку $W_L = \frac{\Phi^2}{2L}$.

Кстати, аналогично в электрической цепи ведёт себя и конденсатор, энергия W_C которого выражается такой же по структуре формулой:

$$W_C = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}, \quad \text{где } C - \text{ёмкость}$$

конденсатора, q – его заряд, U – напряжение на его обкладках.

Когда в цепи замыкают (или размыкают) ключ, заряд конденсатора мгновенно не меняется, оставаясь тем же самым по величине, что и до замыкания (размыкания) ключа. Для изменения заряда необходимо время, правда, это время может быть и крайне малым, о чём свидетельствует нижеприведённый классический пример, где за бесконечно малое время заряды конденсаторов и, следовательно, напряжения на них резко изменяются.

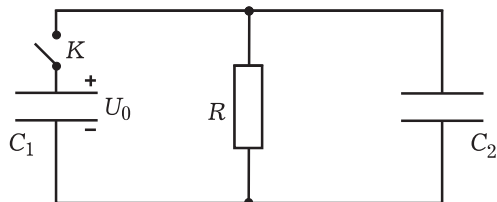


Рис. 3

Речь идёт об электрической цепи, показанной на рисунке 3. Требуется найти количество теплоты Q_R , выделяющееся на резисторе с сопротивлением R после замыкания ключа K , если известно, что конденсатор ёмкости C_1 в начальный момент заряжен до напряжения U_0 , конденсатор ёмкости C_2 – не заряжен, а сопротивления соединительных проводов пренебрежимо малы по сравнению с R .

Первое, что может прийти на ум, это то, что в тепло на резисторе пе-

рейдёт вся начальная энергия конденсатора. А это не так!

Сначала, за очень малое время, произойдёт выравнивание напряжений на конденсаторах. Назовём эту первую стадию разрядки процессом «столкновения напряжений конденсаторов». За время этого «столкновения» часть начальной энергии конденсатора C_1 перераспределится между конденсаторами C_1 и C_2 , а часть выделится в виде теплоты на соединительных проводах и, возможно, излучится. При этом резистору за это малое время ничего «не достанется». И лишь после выравнивания напряжений на конденсаторах «неспешно» пойдёт процесс выделения теплоты на резисторе. Искомое количество теплоты окажется равным:

$$Q_R = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{C_1 U_0^2}{2}.$$

Предлагаем читателю прийти к этому результату самостоятельно.

Данный пример со «столкновением напряжений конденсаторов» приведён неслучайно. Аналогичный процесс, только уже со «столкновением токов катушек», может иметь место в рассматриваемых RL-цепях постоянного тока и не только (здесь имеются в виду и RLC-цепи).

Рассмотрим следующий пример. В цепи, показанной на рисунке 4, ЭДС источника $\mathcal{E}_0$, индуктивности катушек L_1 и L_2 , их омические сопротивления r_1 и r_2 соответственно. Ключ K замкнут, и цепь находится в стационарном состоянии. Требуется найти суммарное количество теплоты, выделяющееся в катушках после размыкания ключа K . Внутренним сопротивлением источника предлагается пренебречь.

Как уже отмечалось выше, в стационарном состоянии цепи через катушки текут постоянные токи, а сами катушки «ведут себя» подобно резисторам (ЭДС самоиндукции в каждой из катушек равна нулю). С учётом этого из закона Ома нетрудно найти силы токов, текущих по катушкам (рис. 4):

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{r_1}; \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{r_2}.$$

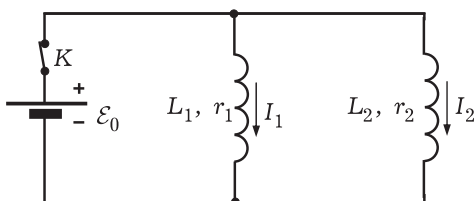


Рис. 4

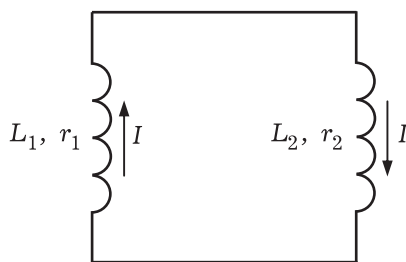


Рис. 5

После размыкания ключа в контуре, состоящем из катушек индуктивностей L_1 и L_2 , произойдёт быстрое выравнивание токов в этих катушках, как по величине, так и по направлению. Если положить, что параметры таковы, что $L_2 I_2 > L_1 I_1$, то в этом контуре практически сразу установится ток I , текущий по часовой стрелке (рис. 5). Силу этого тока нетрудно найти из закона сохранения магнитного потока:

$$L_2 I_2 - L_1 I_1 = (L_1 + L_2) I \rightarrow I = \frac{L_2 I_2 - L_1 I_1}{L_1 + L_2}.$$

За короткое время выравнивания токов в катушках теплота на них практически не выделится, а уже потом, «не спеша», вся, оставшаяся после выравнивания токов, энергия в катушках перейдёт в тепло.

Таким образом, после размыкания ключа K на катушках в сумме выделится количество теплоты:

$$Q = \frac{(L_1 + L_2)I^2}{2} = \frac{(L_2 I_2 - L_1 I_1)^2}{2(L_1 + L_2)} = \frac{\mathcal{E}_0^2 \left(\frac{L_2}{r_2} - \frac{L_1}{r_1} \right)^2}{2(L_1 + L_2)}.$$

К вопросам о выделении тепла в стандартных ситуациях с RL -цепями мы ещё вернёмся, а пока заметим, что в разобранным примере при условии $\frac{L_2}{r_2} = \frac{L_1}{r_1}$ тепла в катуш-

ках после размыкания ключа выделяться не будет ($Q = 0$). В этом случае вся начальная энергия катушек излучается. Подобная ситуация уже описывалась выше.

В заключение нашего первого раздела отметим, что рассмотренные процессы «столкновения напряжений» конденсаторов и «столкновения токов» катушек индуктивностей в некотором смысле напоминают неупругое соударение тел в механике, рассчитываемое при помощи законов сохранения импульса и энергии. В случае с конденсаторами роль закона сохранения импульса выполнил закон сохранения электрического заряда, а в случае с катушками – закон сохранения магнитного потока.

Перейдём теперь к классическим примерам процессов «разрядки» и «зарядки» катушки индуктивности.

2. «Разрядка» катушки индуктивности

Процессом «разрядки» катушки индуктивности, по аналогии с разрядкой конденсатора, можно назвать процесс, при котором катушка с током, замкнутая на резистор, теряет свою энергию. Этот процесс сопровождается уменьшением тока в катушке до нуля и выделением теплоты на резисторе.

2.1. Рассмотрим электрическую цепь (рис. 6), находящуюся в стационарном состоянии. Все параметры цепи, такие как ЭДС источника $\mathcal{E}_0$ и его внутреннее сопротивление r_0 , индуктивность катушки L и сопротивление резистора R , считаем известными. Омическим сопротивлением катушки предлагается пре-

небречь и положить его равным нулю. Найдём, в частности, электрический заряд q , который протечёт через резистор после размыкания ключа K , и количество теплоты Q , выделяющееся на нём.

Как уже отмечалось выше, в стационарном состоянии цепи катушка

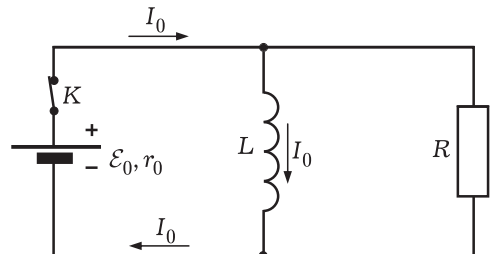


Рис. 6

ведёт себя как резистор, а в нашем случае – как переключатель с нулевым сопротивлением. Таким образом, перед размыканием ключа ток через резистор не течёт, а сила тока I_0 , текущего через катушку в этот момент, легко находится из закона Ома:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{r_0}.$$

После размыкания ключа начинается процесс «разрядки» катушки через резистор. Рассмотрим нашу цепь, а точнее контур, состоящий из резистора и катушки, в произвольный момент времени t после размыкания ключа (рис. 7). В момент размыкания ключа полагаем $t = 0$. Сила электрического тока I в этом контуре будет зависеть от времени, при этом начальное значение силы тока равняется ранее найденному значению I_0 .

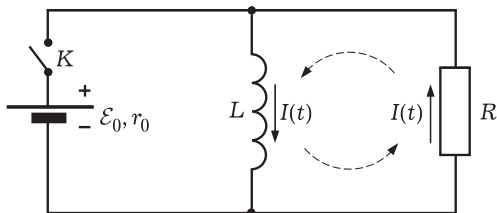


Рис. 7

Запишем для рассматриваемого контура уравнение второго правила Кирхгофа (здесь и далее пунктирными линиями со стрелками мы показываем направление обхода контура):

$$-L \frac{dI}{dt} = IR. \quad (1)$$

Из уравнения (1) нетрудно выразить протекающий через резистор R заряд dq за промежуток времени dt :

$$dq = Idt = -\frac{L}{R} dI, \text{ где } dI - \text{изменение}$$

силы тока в контуре за тот же промежуток времени dt . Искомый заряд q , протекающий через резистор, найдём интегрированием:

$$q = \int dq = -\frac{L}{R} \int_{I_0}^0 dI = \frac{L}{R} I_0 = \frac{L\mathcal{E}_0}{Rr_0}. \quad (2)$$

Здесь мы учли, что, в конце концов, ток в рассматриваемом контуре прекратится.

Энергия катушки при этом вся переходит в тепло, выделяющееся на резисторе.

$$Q = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}_0^2}{2r_0^2}. \quad (3)$$

Придём теперь к результатам (2) и (3) другим путём. Решим предварительно уравнение (1) и найдём зависимость $I(t)$ тока от времени.

Разделяя в уравнении (1) переменные и интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{I} &= -\frac{R}{L} dt, \rightarrow \int_{I_0}^{I(t)} \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt, \rightarrow \\ &\rightarrow \ln \frac{I(t)}{I_0} = -\frac{R}{L} t \end{aligned}$$

и найдём искомую зависимость:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (4)$$

График полученной зависимости $I(t)$ представлен на рисунке 8.

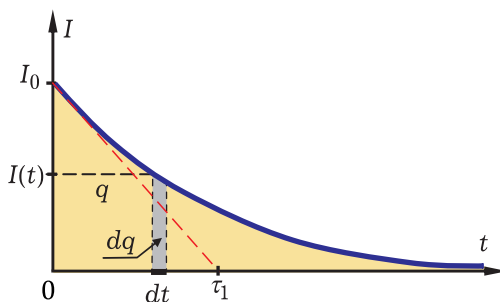


Рис. 8

Заметим, что протекающий через резистор заряд q пропорционален площади под этим графиком и равен:

$$q = \int dq = \int_0^{\infty} I(t) dt = I_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{R}{L}t} dt = \left[-\frac{L}{R} I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \right]_{t=0}^{\infty} - \left[-\frac{L}{R} I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \right]_{t=0} = \frac{L}{R} I_0.$$

С учётом выражения для I_0 мы, как и планировали, пришли к результату (2).

Количество теплоты Q , выделяющееся на резисторе после размыкания ключа, найдём в соответствии с законом Джоуля-Ленца:

$$Q = \int dQ = R \int_0^{\infty} I^2(t) dt = R I_0^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2R}{L}t} dt = \frac{L I_0^2}{2} = \frac{L \mathcal{E}_0^2}{2r_0^2}.$$

Полученное выражение для Q в точности совпадает с ранее полученным выражением (3), к которому мы пришли сразу из закона сохранения энергии.

Заметим, что если провести касательную к графику в точке $t = 0$ и выразить время τ_1 , соответствующее точке пересечения касательной с осью t (см. рис. 8), то нетрудно прийти к соотношению:

$$\tau_1 = \frac{L}{R},$$

которое может быть полезно при решении ряда задач. В самом деле, подставляя в уравнение (1) вместо силы тока I её начальное значение I_0 , а вместо производной $\frac{dI}{dt}$ её значение, равное угловому коэффициенту проведённой касательной к

графику $\left(\frac{dI}{dt} = -\frac{I_0}{\tau_1}\right)$, приходим к этому соотношению. Временной параметр τ_1 представляет собой характерное время процесса установления тока в RL-цепи.

2.2. Усложним теперь немного задачу о «разрядке» катушки. Будем считать, что в момент размыкания ключа K (рис. 6) из катушки быстро извлекают ферритовый сердечник, заполнявший до этого практически всё внутреннее пространство катушки. Ответим на те же самые вопросы, то есть найдём протекающий через резистор заряд и количество теплоты, выделяющееся на нём. Магнитную проницаемость феррита считаем известной и равной μ , а под L понимаем индуктивность катушки с сердечником.

Перед извлечением сердечника сила тока, протекающего через катушку, как и раньше, определяется по формуле:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{r_0}.$$

В результате удаления сердечника индуктивность катушки уменьшается в μ раз и становится равной:

$$L_1 = \frac{L}{\mu}.$$

Поскольку магнитный поток, пронизывающий наш контур, за малое время удаления сердечника измениться не может, то сила тока в катушке изменится и примет другое значение I_1 . Это значение найдём из закона сохранения магнитного потока:

$$L_1 I_1 = L I_0; \rightarrow I_1 = \frac{L I_0}{L_1} = \frac{\mu \mathcal{E}_0}{r_0}.$$

Дальнейшие наши действия в точности такие же, что и в пункте 2.1. Таким образом, для искомых ве-

личин в нашей усложнённой ситуации получим:

$$q = \int dq = -\frac{L_1}{R} \int_{I_1}^0 dI = \frac{L_1 I_1}{R} = \frac{L I_0}{R} = \frac{L \mathcal{E}_0}{R r_0};$$

$$Q = \frac{L_1 I_1^2}{2} = \mu \cdot \frac{L \mathcal{E}_0^2}{2 r_0^2}.$$

Заметим, что быстрое извлечение сердечника из катушки не скажется на величине протекающего

через резистор заряда q , однако количество теплоты, выделяющееся на резисторе, возрастает в μ раз. Связано это с тем, что удаляя из катушки сердечник, мы вынуждены совершить работу, которая пойдёт на увеличение энергии катушки именно в μ раз, что и приведёт в дальнейшем к соответствующему увеличению количества теплоты Q .

3. «Зарядка» катушки индуктивности

Под «зарядкой» катушки понимается процесс установления тока в ней при подключении к источнику. Рассмотрим две схемы подключения катушки к источнику при участии резистора. В одной из них резистор включается последовательно с катушкой (рис. 9), а в другой – параллельно (рис. 13). Омическим сопротивлением катушки r предлагаем пренебречь по сравнению с внутренним сопротивлением r_0 источника и сопротивлением R резистора, которые считаем известными. Также известными считаем ЭДС источника $\mathcal{E}_0$ и индуктивность катушки L .

3.1. Последовательное соединение катушки и резистора

3.1.1. Рассмотрим процесс установления тока в катушке после замыкания ключа K в цепи, показанной на рисунке 9.

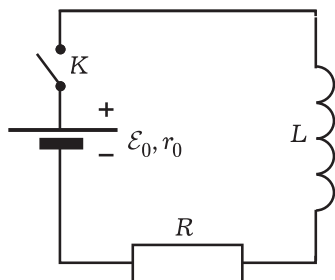


Рис. 9

Найдём зависимость от времени силы тока $I(t)$ в катушке после замыкания ключа. С этой целью рассмотрим цепь в произвольный момент времени t после замыкания ключа (рис. 10) и запишем уравнение второго правила Кирхгофа:

$$\mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} = I(R + r_0). \quad (5)$$

Разделяя в уравнении (5) переменные и интегрируя, приходим к искомой зависимости $I(t)$:

$$\frac{dI}{I - \frac{\mathcal{E}_0}{R_0}} = -\frac{R_0}{L} dt; \rightarrow \int_0^{I(t)} \frac{dI}{I - \frac{\mathcal{E}_0}{R_0}} = -\frac{R_0}{L} \int_0^t dt; \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln \frac{\frac{\mathcal{E}_0}{R_0} - I(t)}{\frac{\mathcal{E}_0}{R_0}} = -\frac{R_0}{L} t; I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R_0} \left(1 - e^{-\frac{R_0}{L} t} \right).$$

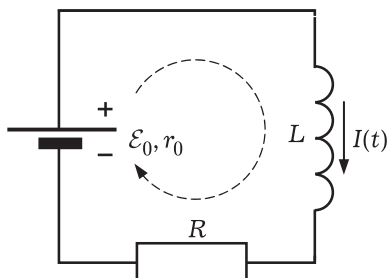


Рис. 10

Здесь через R_0 обозначена сумма сопротивлений R и r_0 ($R_0 = R + r_0$). График полученной зависимости $I(t)$ представлен на рисунке 11.

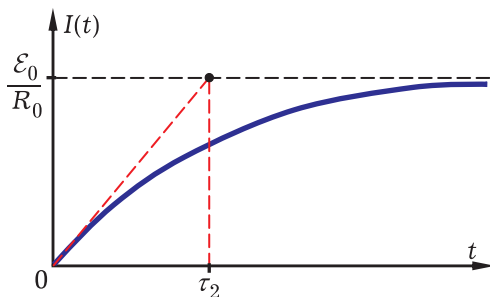


Рис. 11

Видим, что ток в цепи растёт, асимптотически приближаясь к предельному значению $I = \frac{\varepsilon_0}{R_0}$.

Кстати, если провести касательную к графику в точке $t = 0$ и выразить время τ_2 (рис. 11), то нетрудно прийти к аналогичному соотношению, полученному разделе 2:

$$\tau_2 = \frac{L}{R_0}.$$

3.1.2. Считаем целесообразным затронуть вопрос о скорости изменения энергии катушки и её максимальном значении в рассматриваемом процессе установления тока, поскольку подобный вопрос часто включают в задачи на заданную тему.

Скорость изменения энергии W_L есть не что иное, как её производная по времени. Учитывая, что $W_L = \frac{LI^2}{2}$, и, выполняя дифференцирование по времени W_L , как сложной функции, получаем:

$$\frac{dW_L}{dt} = \frac{L}{2} \cdot 2I \cdot \frac{dI}{dt} = I \cdot L \frac{dI}{dt}.$$

С учётом уравнения (5) приходим к выражению:

$$\frac{dW_L}{dt} = I(\varepsilon_0 - I(R + r_0)) = -(R + r_0)I^2 + \varepsilon_0 I.$$

Мы получили, что скорость изменения энергии катушки представляет собой квадратичную функцию силы тока I . Нетрудно найти максимум этой функции при помощи производной, но можно и методом выделения полного квадрата, как мы и поступим:

$$\begin{aligned} \frac{dW_L}{dt} &= -(R + r_0)I^2 + \varepsilon_0 I = \\ &= -\left(\left(I\sqrt{R + r_0} \right)^2 - 2 \cdot I\sqrt{R + r_0} \cdot \frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{R + r_0}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{R + r_0}} \right)^2 \right) + \frac{\varepsilon_0^2}{4(R + r_0)} = \\ &= \frac{\varepsilon_0^2}{4(R + r_0)} - \left(I\sqrt{R + r_0} - \frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{R + r_0}} \right)^2. \end{aligned}$$

Видим, что скорость изменения энергии катушки достигает максимального значения:

$$\left(\frac{dW_L}{dt} \right)_{\max} = \frac{\varepsilon_0^2}{4(R + r_0)},$$

когда выражение, стоящее в скобках, обращается в ноль, то есть при силе тока в катушке:

$$I = \frac{\varepsilon_0}{2(R + r_0)}.$$

3.1.3. В заключение этого пункта нашего изложения получим выражение для энергии катушки, ранее приведённое без доказательства.

В случае, если внутреннее сопротивление источника и сопротивление резистора, наряду с омиче-

ским сопротивлением катушки, равны нулю, то в рассматриваемой цепи процесс возрастания тока не прекращается.

В самом деле, из уравнения (5) при $R + r_0 = 0$ нетрудно получить, что

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{L}t,$$

то есть ток линейно возрастает со временем. График этой зависимости представлен на рисунке 12.

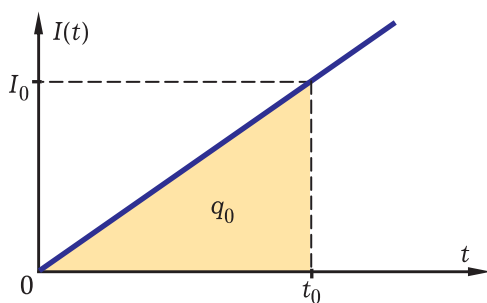


Рис. 12

Сила тока в катушке достигает некоторого значения I_0 в момент времени

$$t_0 = \frac{LI_0}{\mathcal{E}_0}.$$

За это время через источник протекает заряд q_0 , который находим через площадь под графиком $I(t)$:

$$q_0 = \frac{1}{2}I_0t_0 = \frac{LI_0^2}{2\mathcal{E}_0},$$

следовательно, источник совершает работу $A = q_0\mathcal{E}_0$, которая и идёт на сообщение катушке энергии W_L , так как тепловые потери отсутствуют ($R_0 = 0$).

Таким образом,

$$W_L = A = q_0\mathcal{E}_0 = \frac{LI_0^2}{2}.$$

3.2. Параллельное соединение катушки и резистора

Рассмотрим теперь процесс установления тока в катушке после замыкания ключа K в цепи, показанной на рисунке 13, когда катушка с резистором соединены параллельно. Найдём, в частности, какой электрический заряд q протечёт через резистор, и какое количество теплоты Q выделится на нём после замыкания ключа.

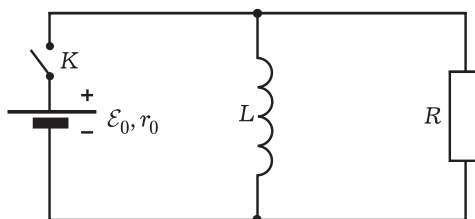


Рис. 13

Сразу после замыкания ключа ток в катушке не возникнет и будет течь только через батарейку и резистор, то есть по внешнему контуру. Сила этого тока находится из закона Ома и равна:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R + r_0}. \quad (6)$$

Когда ток в катушке установится, и цепь придёт в стационарное состояние, напряжение на резисторе, равное напряжению на катушке, обратится в ноль. Следовательно, ток через резистор прекратится, а сила тока в катушке примет значение:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{r_0}. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь цепь в произвольный момент времени t после замыкания ключа (рис. 14). В момент замыкания ключа полагаем $t = 0$.

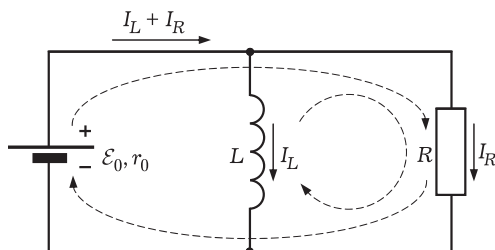


Рис. 14

Запишем уравнения второго правила Кирхгофа для внешнего и малого правого контуров, направления обходов которых символически показаны пунктирными линиями со стрелками на рисунке 14:

$$\mathcal{E}_0 = (I_L + I_R)r_0 + I_R R; \quad (8)$$

$$L \frac{dI_L}{dt} = I_R R. \quad (9)$$

Протекающий через резистор заряд q можно найти из уравнения (9) в результате простых преобразований, интегрирования и с учётом соотношения (7):

$$q = \int dq = \int_0^{\infty} I_R(t) dt = \frac{L}{R} \int_0^{I_1} dI_L = \frac{L}{R} I_1 = \frac{L\mathcal{E}_0}{Rr_0}.$$

С определением количества теплоты Q будет посложнее. Здесь нам понадобятся и уравнение (8), и уравнение (9).

Из уравнения (8) выражаем ток I_L :

$$I_L = \frac{\mathcal{E}_0}{r_0} - I_R \left(1 + \frac{R}{r_0} \right). \quad (10)$$

Подставляя теперь I_L в уравнение (9), получим:

$$-L \left(1 + \frac{R}{r_0} \right) \frac{dI_R}{dt} = I_R R. \quad (11)$$

С учётом этого и соотношения (6) уже нетрудно найти искомое количество теплоты Q :

$$\begin{aligned} Q &= \int dQ = R \int_0^{\infty} I_R^2(t) dt = -L \left(1 + \frac{R}{r_0} \right) \cdot \int_{I_0}^0 I_R dI_R = \\ &= L \left(1 + \frac{R}{r_0} \right) \cdot \frac{I_0^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}_0^2}{2(R + r_0)r_0}. \end{aligned}$$

Заметим, что, как протекающий через резистор заряд q , так и количество теплоты Q , выделяющееся на этом резисторе, мы нашли, не прибегая к временной зависимости $I_R(t)$. Давайте теперь не поленимся и всё-таки найдём временные зависимости тока через резистор $I_R(t)$ и тока через катушку $I_L(t)$.

Проводя разделение переменных в уравнении (11) и интегрируя, получим зависимость от времени силы тока через резистор в рассматриваемом процессе:

$$\begin{aligned} \frac{dI_R}{I_R} &= -\frac{Rr_0}{L(R + r_0)} dt; \rightarrow \\ \rightarrow \int_{I_0}^{I_R(t)} \frac{dI_R}{I_R} &= -\frac{Rr_0}{L(R + r_0)} \int_0^t dt; \rightarrow \\ \rightarrow \ln \frac{I_R(t)}{I_0} &= -\frac{Rr_0}{L(R + r_0)} \cdot t; \\ I_R(t) &= I_0 e^{-\frac{Rr_0 t}{L(R + r_0)}} = \frac{\mathcal{E}_0}{R + r_0} e^{-\frac{Rr_0 t}{L(R + r_0)}}. \end{aligned}$$

Подставляя теперь $I_R(t)$ в уравнение (10), находим зависимость $I_L(t)$:

$$I_L = \frac{\mathcal{E}_0}{r_0} \left(1 - e^{-\frac{Rr_0 t}{L(R + r_0)}} \right).$$

Графики этих зависимостей представлены на рисунках (15) и (16).

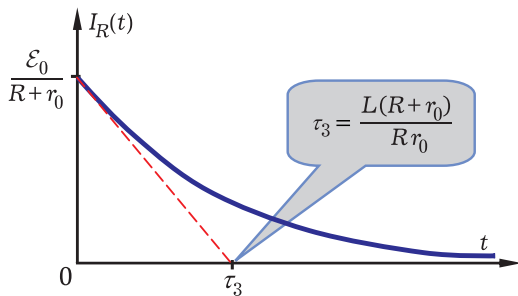


Рис. 15

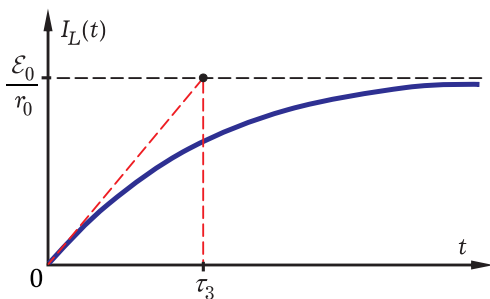


Рис. 16

4. Сложная задача с двумя катушками

В этом разделе мы рассмотрим процессы протекания электрического заряда через резистор и выделения теплоты на нём в цепи, показанной на рисунке 17. Сначала рассмотрим ситуацию, возникающую после замыкания ключа K , когда катушки «заряжаются», а затем, когда цепь придёт в стационарное состояние, разомкнём ключ и дадим возможность катушкам полностью «разрядиться». ЭДС источника $\mathcal{E}_0$, его внутреннее сопротивление r_0 , индуктивности катушек L_1 и L_2 , а также сопротивление R резистора считаем известными. Омическими сопротивлениями катушек r_1 и r_2 предлагаем пренебречь.

4.1. Замыкание ключа

Итак, в цепи, показанной на рисунке 17, ключ K разомкнут, токи в катушках не текут. Найдём, какой заряд q_1 протечёт через резистор, и какое количество теплоты Q_1 выделится на нём после замыкания ключа.

Рассмотрим нашу цепь в произвольный момент времени t (рис. 18) и обозначим силы токов, текущих в этот момент в катушках L_1 и L_2 через I_1 и I_2 соответственно. При этом сила тока через резистор, очевидно, равна I_2 , а сила тока через источник, на основании первого правила Кирхгофа, равняется сумме I_1 и I_2 .

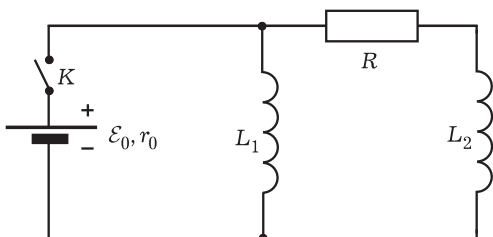


Рис. 17

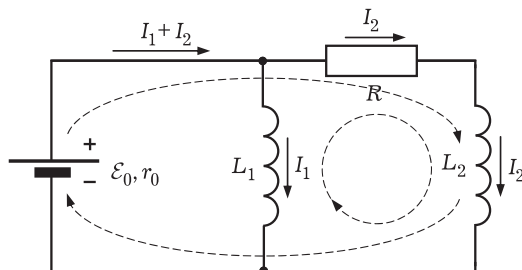


Рис. 18

Заметим, что сразу после замыкания ключа силы токов в катушках равняются нулю. Со временем токи в катушках начнут появляться. Когда цепь придёт в стационарное состояние, то напряжения на катушках окажутся равными нулю (омические сопротивления катушек считаем пренебрежимо малыми), и, следовательно, нулю будет равно и напряжение на резисторе. А значит, ток через резистор течь не будет.

Таким образом, в конечном (стационарном) состоянии, в которое цепь придёт после замыкания ключа, сила тока в катушке L_2 равняется нулю ($I_{2к} = 0$), а сила тока в катушке L_1 при этом легко находится

из закон Ома $\left(I_{1к} = \frac{\mathcal{E}_0}{r_0} \right)$.

Вернёмся к нашей цепи в произвольный момент времени t и запишем уравнения второго правила Кирхгофа для контуров, направления обходов которых показаны на рисунке 18.

$$\mathcal{E}_0 - L_2 \frac{dI_2}{dt} = (I_1 + I_2)r_0 + I_2R; \quad (12)$$

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} = I_2R. \quad (13)$$

Протекающий через резистор заряд q_1 может быть найден в результате простого преобразования уравнения (13) с последующим интегрированием, учитывающим оговорённые выше начальные и конечные значения сил токов в катушках.

$$q_1 = \int dq_1 = \int_0^{\infty} I_2(t) dt = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \int_0^{r_0} dI_1 - \frac{L_2}{R} \int_0^0 dI_2 = \frac{L_1 \mathcal{E}_0}{R r_0}.$$

С определением количества теплоты Q_1 так просто не получится. Здесь придётся изрядно потрудиться, чем мы и займёмся, принимая во внимание, что за время dt на резисторе выделяется количество теплоты: $dQ_1 = I_2^2 R dt$.

1. Поочерёдно умножая уравнения (12) и (13) на $I_2 dt$, после несложных преобразований имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 I_2 dt - L_2 I_2 dI_2 &= \\ &= r_0 I_1 I_2 dt + \frac{R + r_0}{R} dQ_1; \end{aligned} \quad (14)$$

$$I_2 dI_1 - \frac{L_2}{L_1} I_2 dI_2 = \frac{1}{L_1} dQ_1. \quad (15)$$

2. Теперь уравнение (13) помножим на $I_1 dt$. После преобразований получаем:

$$\frac{L_1}{L_2} I_1 dI_1 - I_1 dI_2 = \frac{R}{L_2} I_1 I_2 dt. \quad (16)$$

3. Вычитаем из уравнения (15) уравнение (16):

$$\begin{aligned} (I_1 dI_2 + I_2 dI_1) - \frac{L_2}{L_1} I_2 dI_2 - \frac{L_1}{L_2} I_1 dI_1 &= \\ &= \frac{1}{L_1} dQ_1 - \frac{R}{L_2} I_1 I_2 dt. \end{aligned}$$

Учтём, что $I_1 dI_2 + I_2 dI_1 = d(I_1 I_2)$, и перепишем последнее уравнение:

$$\begin{aligned} d(I_1 I_2) - \frac{L_2}{L_1} I_2 dI_2 - \frac{L_1}{L_2} I_1 dI_1 &= \\ &= \frac{1}{L_1} dQ_1 - \frac{R}{L_2} I_1 I_2 dt. \end{aligned} \quad (17)$$

4. Выражаем теперь произведение $I_1 I_2 dt$ из уравнений (14) и (17) и приравниваем их. После несложных преобразований приходим к уравнению, которое уже можно проинтегрировать и найти количество теплоты Q_1 :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R} \left(1 + \frac{R}{r_0} + \frac{L_2}{L_1} \right) dQ_1 = \frac{\varepsilon_0}{r_0} I_2 dt - \frac{L_1}{R} I_1 dI_1 - \\
& - \left(\frac{L_2}{r_0} + \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{L_2}{R} \right) I_2 dI_2 + \frac{L_2}{R} d(I_1 I_2); \\
& \frac{1}{R} \left(1 + \frac{R}{r_0} + \frac{L_2}{L_1} \right) \cdot Q_1 = \frac{\varepsilon_0}{r_0} \cdot \frac{L_1 \varepsilon_0}{R r_0} - \frac{L_1}{R} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_0}{r_0} \right)^2 - \\
& - \left(\frac{L_2}{r_0} + \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{L_2}{R} \right) \cdot 0 + \frac{L_2}{R} \cdot 0; \\
& Q_1 = \frac{\frac{L_1}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{r_0} \right)^2}{1 + \frac{R}{r_0} + \frac{L_2}{L_1}}! \quad (18)
\end{aligned}$$

Заметим, что при $L_2 = 0$, мы приходим к результату для Q , полученному ранее в пункте 3.2.

И ещё одно замечание. У читателя может возникнуть вопрос, связанный с предельным переходом в выражении (18) при $R \rightarrow 0$. Почему, вопреки разумному ожиданию, мы не получаем, что $Q_1 \rightarrow 0$?! А кто, собственно говоря, сказал, что так должно быть? Можно привести множество примеров, в которых предельный переход при стремлении какого-либо параметра к определённому значению не даёт результата, получаемого при этом определённом значении параметра. Поясним сказанное на следующих примерах.

Пример 1. Конденсатор ёмкости C , заряженный до напряжения U_0 , разряжается через резистор с сопротивлением R . Количество теплоты, выделяющееся при этом на резисторе, равно начальной энергии конденсатора: $Q = \frac{CU_0^2}{2}$ и не зависит от сопротивления резистора.

Даже если $R \rightarrow \infty$, это количество теплоты останется прежним, просто процесс разрядки будет происходить крайне медленно. Тем не менее, конденсатор полностью разрядится, и вся его энергия перейдёт в тепло. В то же время, если разорвать цепь, что соответствует $R = \infty$, то никакой разрядки конденсатора происходить не будет, и никакого количества теплоты на резисторе не выделится вообще.

Пример 2. Катушка индуктивности L с током I_0 «разряжается» через резистор с сопротивлением R . Этот пример рассмотрен в пункте 2.1. нашего изложения. Мы получили там, что количество теплоты, выделяющееся на резисторе, равно начальной энергии катушки: $Q = \frac{LI_0^2}{2}$ и

также не зависит от сопротивления резистора. И даже, если $R \rightarrow 0$, количество теплоты Q останется прежним. Просто здесь, как и в предыдущем примере, процесс «разрядки» будет происходить крайне медленно. В то же время, при $R = 0$, ток в катушке изменяться не будет, и никакого тепла в цепи, конечно же, выделяться не будет.

Пример 3. Представьте себе, что вы находитесь на поверхности льда. Если коэффициент трения μ вашей обуви о лёд будет очень мал, но в то же самое время отличен от нуля, то вы, тем не менее, сможете перемещаться по льду, хотя крайне медленно будете набирать скорость. Если же $\mu = 0$, то вы никогда не сдвинетесь с места!

4.2. Размыкание ключа

В цепи, изображённой на рисунке 17, находящейся в стационарном

состоянии при замкнутом положении ключа K , снова размыкают ключ. Требуется найти заряд q_2 , который протечёт через резистор, и количество теплоты Q_2 , которое выделится на нём после размыкания ключа.

Итак, после замыкания ключа наша цепь пришла в стационарное состояние, в котором силы тока в катушках L_1 и L_2 равны $I_{1к} = \frac{\mathcal{E}_0}{r_0}$ и

$$I_{2к} = 0 \text{ соответственно.}$$

Если теперь снова разомкнуть ключ, то произойдёт «столкновение токов» (см. раздел 1, замечание 2), в результате которого часть энергии катушек излучится и «не достанется резистору», а силы токов в катушках выравниваются и становятся равными некоторому значению I_0 . Эту величину нетрудно найти из закона сохранения магнитного потока для контура, состоящего из катушек и резистора:

$$L_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{r_0} = (L_1 + L_2)I_0; \rightarrow I_0 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \cdot \frac{\mathcal{E}_0}{r_0}.$$

Дальнейшее решение не представляет особого труда. В тепло перейдёт суммарная энергия катушек, которая останется у них после «столкновения». Таким образом, количество теплоты, выделяющееся на резисторе после размыкания ключа, окажется равным:

$$Q_2 = \frac{(L_1 + L_2)I_0^2}{2} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \cdot \frac{L_1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r_0} \right)^2.$$

Также несложно находится и заряд q_2 . Предлагаем читателю проделать необходимые выкладки самостоятельно и прийти к ответу:

$$q_2 = \frac{L_1 \mathcal{E}_0}{R r_0}.$$

Заметим, что значение заряда q_2 в точности совпадает с ранее полученным значением заряда q_1 . И это не случайно. Дело в том, что изменения магнитных потоков через рассматриваемый контур в процессах «зарядки» и «разрядки» катушек оказываются одинаковыми по модулю, что и приводит к равенству протекающих по контуру зарядов.

И последнее замечание. В своём изложении мы не раз ссылались на закон сохранения магнитного потока, пронизывающего контур. Поясним, откуда берётся это утверждение. Пусть контур включает в себя источник с постоянной ЭДС $\mathcal{E}_0$, имеет полное омическое сопротивление R_0 и пронизывается магнитным полем, в том числе, и полем самого тока I в контуре. Тогда, записывая уравнение второго правила Кирхгофа для этого контура, мы должны, наряду с ЭДС $\mathcal{E}_0$, учитывать и ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$, равную, согласно закону Фарадея, скорости изменения магнитного потока Φ , пронизывающего контур: $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$.

С учётом этого уравнение второго правила Кирхгофа (с точностью до знаков) принимает вид: $-\frac{d\Phi}{dt} + \mathcal{E}_0 = IR_0$. Откуда для изменения $\Delta\Phi$ магнитного потока за малый промежуток времени Δt можно записать: $\Delta\Phi \sim (\mathcal{E}_0 \pm IR_0)\Delta t$. Учитывая, что выражение, стоящее в скобках, конечно по величине, а $\Delta t \rightarrow 0$, мы вправе сделать вывод, что и $\Delta\Phi \rightarrow 0$, то есть $\Phi = const$.

В случае, если магнитный поток Φ создаётся только магнитным полем самого тока I в контуре, то есть выражается через этот ток и индуктивность L контура по формуле $\Phi = LI$, то возникающую ЭДС индукции называют ЭДС самоиндукции. Как правило, индуктивность контура некоторой электрической цепи определяется индуктивностью катушек, входящих в этот контур (индуктивностью соединительных проводов и иных элементов пренебрегают).

Если индуктивность L контура постоянна, то её можно вынести за знак производной, и для ЭДС самоиндукции записать: $\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}$.

Однако, если в некотором процессе индуктивность катушки претерпевает изменение (например, в случае извлечения из неё сердечника), то подобные действия недопустимы, и мы должны работать с формулой:

$$\mathcal{E}_{si} = -\frac{d(LI)}{dt}.$$

* * *

Автор искренне благодарен учителям физики ГБОУ РМ «Республиканский лицей» А.А. Кирееву и Т.В. Саушкиной, а также доценту кафедры общей физики МФТИ А.И. Киркинскому за внимательное прочтение рукописи статьи и ряд полезных замечаний.

Калейдоскоп

Калейдоскоп

Калейдоскоп

Из лекций П.Л. Капицы 1947 и 1949 гг.

Я вспоминаю один случай, когда я, будучи молодым учёным, работал в Кембридже у профессора Резерфорда, очень крупного учёного, который положил основание современному учению о радиоактивности. И вот мне пришлось быть свидетелем такой картины: молодой учёный, окончивший университет, проработавший два года по заданной теме и выполнивший кандидатскую работу, пришёл к профессору и говорит: «Вот я защитил свою кандидатскую работу, что мне теперь делать дальше?» Резерфорд ему ответил: «Бросить заниматься наукой! Если Вы после кандидатской защиты, после двух лет практической работы не знаете сами, что Вам делать дальше, значит, из Вас учёного не выйдет!»

Вот приучиться к самостоятельному мышлению – это есть то, с чего вам надлежит начать. Развивать самостоятельное мышление, самостоятельный подход всегда, когда вам что-нибудь приходится обдумывать, но не зазубривать, – понимать задачу – это будет основная ваша задача.

А пустая зубрёжка, заучивание без понимания учёного из вас не сделают никогда. Общая оценка учёного всегда исходит из того, насколько он самостоятельно работает, мыслит и ориентируется, и эту самостоятельность мышления, умение ориентироваться надо в себе выработать с самого начала, со школьной скамьи и с первых курсов университетской учёбы. Никто не может вас научить мыслить самостоятельно, если вы не захотите сами этим заняться, если вы сами не будете себя в этом проверять.

Источник: Как следует изучать физику (по материалам лекций П.Л. Капицы 1947 и 1949 гг.).

https://mipt.ru/education/chair/physics/S_I/method/Kapitsa_PhZ.pdf