Саранин Владимир Александрович
*Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры физики и дидактики физики
Глазовского государственного педагогического института.*

Падающая капля

Рассмотрен процесс падения капель воды в воздухе. Показано, что маленькие капли при падении имеют форму, близкую к сферической, а форма больших капель напоминает форму лежащей булочки. Приведена зависимость установившейся скорости падения капель от их диаметра в сферическом состоянии, построенная по экспериментальным данным других авторов. Сделаны теоретические оценки скоростей падения малых и больших капель. Также приведена теоретическая оценка максимального размера капли, когда она падает как целое, не разбрызгиваясь. Радиус таковой составил около 3 мм.

Когда говорят о каплевидной форме, то часто представляют её в виде, изображенном на рис. 1. Однако это форма капли, которая ещё не до конца сформировалась. Рассмотрим формы капель, которые уже сформировались.

На рис. 2 представлены фотографии капель воды, свободно падающих в воздухе с постоянной скоростью (фото из книги [1], диаметры эквивалентных сферических капель 6,5 мм, 6,0 мм, 4,8 мм, 2,8 мм). На фотографии рис. 3, взятой из [2], показана капля воды на воздушной подушке (снизу через мелкие поры нагнетался воздух). Наконец, на рис. 4, показано сечение капли, лежащей на несмачиваемой поверхности, полученное с помощью компьютерной программы. Видно, что почти все капли имеют форму булочки. Попробуем разобраться во всех случаях.

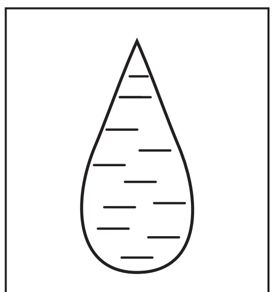

Рис. 1

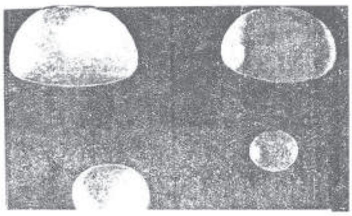

Рис. 2

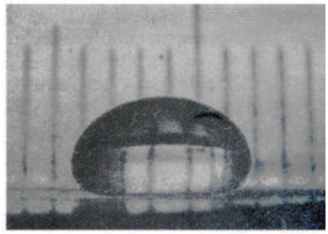

Рис. 3

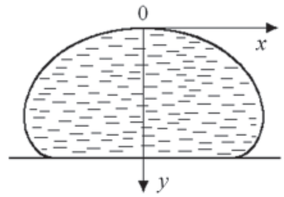

Рис. 4

Прежде всего о том, как получено сечение капли на рис. 4. В любой точке поверхности капли должно выполняться условие баланса давлений:

$$p_a + \sigma(K_1 + K_2) = \rho g y, \qquad (1)$$

где p_a – атмосферное давление, второе слагаемое, пропорциональное коэффициенту поверхностного натяжения σ, это капиллярное или лапласовское давление, $K_{1,2}$ – кривизны поверхности во взаимно перпендикулярных направлениях, (кривизна сферической поверхности радиуса R равна $K_1 = K_2 = 1/R$), для произвольной поверхности кривизны выражаются через производные от y по x, в правой части равенства – гидростатическое давление. Таким образом, уравнение (1) является уравнением, которое можно решить численно с помощью той или иной компьютерной программы. Более подробную информацию об этом можно найти в книге [3].

Капля на воздушной подушке тоже не смачивает поверхность, поэтому подобна таковой, лежащей на твердой несмачиваемой поверхности.

Почему же капли падающие имеют такую же форму, как и на рис. 3, 4? Ответ может быть таким: они падают с постоянной скоростью, и в инерциальной системе отсчета, связанной с ними, они покоятся, опираясь на поток воздуха. При этом воздух создает динамическое давление равное

$$p = \frac{\rho v_m^2}{2}, \qquad (2)$$

где ρ – плотность воздуха, v_m – его скорость (максимальная установившаяся скорость падения капли).

В случае относительно больших капель динамическое давление создает силу сопротивления, и когда она сравняется с силой тяжести, скорость падения будет постоянной. Найдем эту скорость. Запишем равенство сил:

$$C\frac{\rho v_m^2}{2} S = mg. \qquad (3)$$

Здесь C – безразмерная постоянная, называемая коэффициентом сопротивления и зависящая от геометрии обтекаемого тела, S – площадь обтекаемой поверхности. Для оценки скорости будем считать форму капли сферической. Тогда площадь, на которую набегает поток воздуха, приближённо можно считать полусферой $S \approx 2\pi R^2$, а массу капли выразить через плотность жидкости и объём. В этом случае нетрудно получить

$$v_m = \sqrt{\frac{4R\rho_l g}{3\rho C}} = \sqrt{\frac{2D\rho_l g}{3\rho C}}, \qquad (4)$$

где D – диаметр капли. Во многих специальных справочниках и даже популярных книгах (см., например, [4]) указывается значение коэффициента сопротивления для сферы $C = 0{,}4$.

Капельки малых размеров имеют относительно небольшую скорость падения, и динамическое давление, оказываемое на них, пренебрежимо мало. Сила, которая в этом случае противодействует силе тяжести, – это сила вязкого трения. Она вычисляется по формуле Стокса:

$$F_C = 6\pi R\eta v, \qquad (5)$$

где η – динамическая вязкость воздуха. Приравнивая эту силу силе тяжести для установившейся скорости падения капли получим:

$$v_{1m} = \frac{2\rho_l g R^2}{9\eta} = \frac{\rho_l g D^2}{18\eta}. \qquad (6)$$

Согласно справочным данным (см., например, [5]) плотность воздуха $\rho = 1{,}2$ кг/м^3, динамическая вязкость $\eta = 18$ мкПа·с. Тогда можно построить графики зависимости установившейся скорости падения капель воды в воздухе от их диаметра в сферическом состоянии. На рис. 5 представлены такие графики в логарифмических координатах. Кривая 1 и кружки на ней – это экспериментальные данные, взятые из книги [1], прямая 2 соответствует зависимости (4), прямая 3 соответствует зависимости (6).

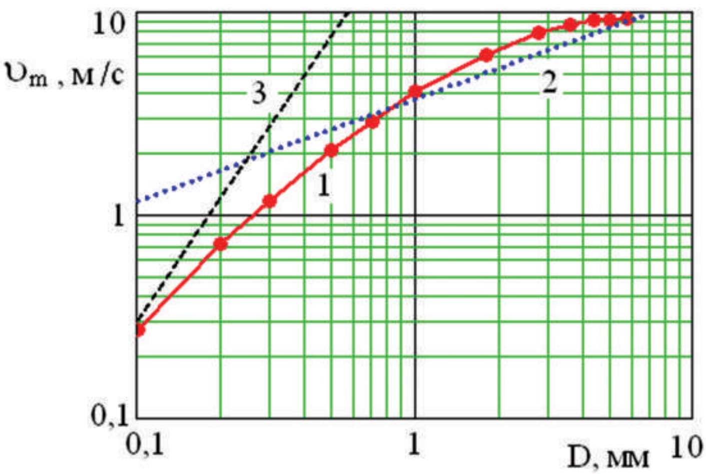

Рис. 5

Видно, что для маленьких капель установившаяся скорость определяется силами вязкого трения, тогда как для больших капель определяющей является сила динамического давления.

Экспериментальные данные [1] о скоростях падения капель воды в атмосфере заканчиваются каплями максимальным радиусом R_{max}= 2,9 мм (однако автор этой же книги указывает на фото рис. 1 диаметр капли 6,5 мм. Возможно это погрешность эксперимента). С чем это связано? Дело в том, что динамическое давление при относительно больших скоростях стремится разорвать каплю, препятствует этому капиллярное давление. Поэтому можно записать следующее условие устойчивого состояния капли как целого:

$$\frac{2\sigma}{R} > \frac{\rho v_m^2}{2}, \qquad (7)$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения воды. Подставляя в эту формулу выражение (4) для скорости падения капли получим условие существования капли как целого при её падении:

$$R < R_{\max} = \sqrt{\frac{3\sigma C}{\rho_l g}} \approx 3{,}0 \text{ мм}. \qquad (8)$$

Здесь принято $\sigma = 72$ мН/м [5]. Как видно, наши приближённые расчёты максимального радиуса падающих капель практически совпадают с экспериментально наблюдаемыми.

Итак, формы падающих в атмосфере капель в случае их малости имеют почти сферическую форму, а большие – форму булочки. Капли при падении приобретают некоторую максимальную скорость, которая далее не изменяется. Эта скорость для малых капель определяется силами вязкого трения, а для больших – силой динамического давления воздуха. Весь спектр размеров капель, падающих в атмосфере, ограничен сверху: динамическое давление воздуха пытается разорвать каплю, этому препятствует капиллярное давление, но при радиусе капель порядка 3 мм динамическое давление становится больше капиллярного и капли большего размера разрываются.

Литература

1. *Соу С.* Гидродинамика многофазных систем. – М.: Наука, 1971. – 536 с.
2. *Гольдштик М.А.* Гидродинамический аналог явления Лейденфроста / М.А. Гольдштик, В.Г. Лигай, В.М. Ханин // Препринт 120-85. АН СССР. Институт теплофизики. – Новосибирск, 1985. – 28 с.
3. *Саранин В.А.,* Иванов Ю.В. Равновесие жидкостей и его устойчивость. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. –172 с.
4. *Блудов М.И.* Беседы по физике, ч. III. – М.: Просвещение, 1970. – С. 119.
5. *Енохович А.С.* Краткий справочник по физике. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1976. – 288 с.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Студент-физик увлёкся религией и перевёлся в семинарию. Вот сидит он на лекции и подрёмывает. Батюшка по ходу лекции подходит к нему и спрашивает:

— Итак, скажите, что такое Божественная сила?

— Божественная масса на божественное ускорение.