Овчинкин Владимир Александрович
Кандидат технических наук,
доцент кафедры общей физики МФТИ,
учитель средней физико-математической школы №5
г. Долгопрудный.

Некоторые задачи специальной теории относительности (СТО)

В классической механике считается само собой разумеющимся, что изменение положения какой-либо из взаимодействующих частиц *мгновенно* отражается на всех остальных частицах. Однако опыт показывает, что в природе не существует мгновенных взаимодействий. Наибольшая скорость распространения взаимодействий – величина хоть и большая, но конечная. Это скорость света в вакууме $c = 299792458$ м/с. Согласно принципу относительности величина максимальной скорости распространения взаимодействий одинакова во всех инерциальных системах отсчета (ИСО) и является универсальной постоянной.

§1. Принцип относительности Галилея

Начнём с классической механики. Здесь как бы неявно присутствует принцип относительности Галилея. Рассмотрим две системы отсчёта: инерциальную $xOyz$, неподвижную относительно наблюдателя (назовём её лабораторной системой отсчёта – ЛСО), и некоторую другую инерциальную систему отсчёта $x'O'y'z'$, движущуюся относительно ЛСО с постоянной скоростью $\vec{V}$ (рис. 1).

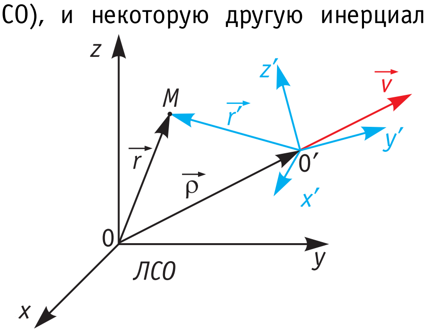


Рис. 1

Положение некоторой точки M относительно ЛСО определяется радиусом-вектором $\vec{r}$, а относительно «штрихованной» системы отсчёта – радиусом-вектором $\vec{r}'$. Вектор положения центра координат $\overrightarrow{OO}$ обозначим как $\vec{\rho}$. Если начала координат обеих систем совпадают в момент времени $t = 0$, то $\vec{\rho} = \vec{V}t$. Из рис. 1 следует векторное равенство (называемое преобразованием координат Галилея)

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{\rho} = \vec{r}' + \vec{V}t \qquad (1)$$

Точка M может перемещаться в пространстве как угодно. Её мгновенная скорость в ЛСО $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, а относительно «штрихованной» СО $\vec{\upsilon'} = \dfrac{d\vec{r'}}{dt}$. Здесь и далее производная, например, вектора $\vec{r}$ по времени – это тоже вектор $\vec{\upsilon}$ с координатами $\dfrac{dx}{dt} = \upsilon_x$, $\dfrac{dy}{dt} = \upsilon_y$, $\dfrac{dz}{dt} = \upsilon_z$. Если теперь продифференцировать по времени соотношение (1), то получим соотношение, именуемое в классической механике *правилом сложения скоростей*

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r'}}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} \text{ или } \vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon'}(t) + \vec{V}. \qquad (2)$$

Здесь вектор $\vec{V}$ – постоянный вектор скорости точки O' относительно ЛСО. Если теперь продифференцировать по времени (2), то получим ещё одно равенство

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{\upsilon'}}{dt} \text{ или } \vec{a}(t) = \vec{a'}(t). \qquad (3)$$

Ускорения точки M в обеих системах отсчёта оказались равными. Равны, конечно, и силы, под действием которых и движется точка M: $\vec{F} = \vec{F'}$. Точнее говоря, это одна и та же сила, величина и направление которой не меняется при переходе из одной инерциальной СО в другую. Поскольку ускорение точки M одно и то же во всех инерциальных СО, то его называют *инвариантом*. Уравнения Ньютона, описывающие движение точки M, остающиеся неизменными при переходе от одной ИСО к другой, называются *инвариантными*. *Уравнения Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея*. Выражение (1), дополненное ещё одним равенством, называется преобразованием координат и времени Галилея:

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{V}t; \quad t = t'. \qquad (4)$$

Время в классической механике течёт одинаково во всех инерциальных СО. Это обстоятельство казалось настолько очевидным, что не включалось как специальный постулат в принцип относительности Галилея.

§2. Постулаты специальной теории относительности

Однако постулат одинаковости течения времени $(t = t')$ показался сомнительным уже многим исследователям. Прежде всего Анри Пуанкаре – французскому физику и математику. Об этом говорят его работы 1904 - 1905 гг. Физические опыты А. Майкельсона (1881) убедительно доказали отсутствие эфира как мировой среды, заполняющей всё пространство. А это в свою очередь отрицало существование абсолютной системы отсчёта, которую и связывали с эфиром. Относительно неё можно было бы измерять положение всех тел и отсчитывать их движение.

Согласно классической механике скорость света в направлении движения Земли должна была бы отличаться от скорости света в противоположном направлении. Однако в результате прямых измерений было определено, что *скорость света, в какой бы инерциальной СО её не измеряли, всегда одна и та же по величине*: $c = c'$. Это утверждение и составляет первый постулат СТО. Скорость света в вакууме – это предельная скорость, которую способна развить лишь безмассовая частица (в частности, квант света, фотон). Подробнее об этом будет сказано далее.

Опираясь на труды Х. Лоренца, А. Пуанкаре и многих других, Альберт Эйнштейн сформулировал новый принцип относительности. Если принцип относительности Галилея утверждал, что все уравнения ньютоновской механики не зависят от выбора инерциальной СО, то согласно принципу относительности А. Эйнштейна *все законы природы, по* *которым изменяются состояния физических систем (не только законы механики), не зависят от того, к какой из инерциальных систем отсчета относятся эти изменения.*

Рассмотрим две СО: K и K' (рис. 2), такие, что оси x и x' у них совпадают (параллельны). Система K' движется относительно K с постоянной скоростью $\vec{V}$, направленной вдоль по оси Ox. *Событием* в СТО называется явление, происходящее в момент времени t в точке с координатами (x, y, z). Если выделить два каких-то события (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2), то можно ввести некоторую величину, называемую *интервалом между двумя событиями 1 и 2*

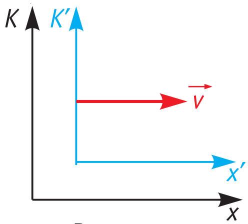


Рис. 2

$$S_{12}=\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}. \quad (5)$$

Пусть, например, событием *1* является световая вспышка, а событием *2* – получение этой вспышки. Будем полагать два эти события близко отстоящими друг от друга (даже бесконечно близкими), поэтому воспользуемся точными математическими символами dx, dy, dz, dt. Кроме того, далее для простоты записи примем $(dx)^2 = dx^2$ и т. п. Расстояние между точками *1* и *2* в K-системе можно записать двояко:

$$\boxed{\begin{aligned} &\textit{расстояние} = c(t_2-t_1) = c\,dt \\ &\textit{или} \quad \textit{расстояние} = \\ &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} = \\ &= \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} \end{aligned}} \quad (6)$$

Из (6) следует, что

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0. \quad (7)$$

А это не что иное как квадрат интервала dS^2 равный нулю, т. е. $dS = 0$.

Естественно, что оба этих события имеют место и в K'-системе: (x_1', y_1', z_1', t_1') и (x_2', y_2', z_2', t_2'). И всё то же можно записать и для неё, где, учитывая постулат постоянства скорости $c = c'$, получаем

$$c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = dS'^2 = 0. \quad (8)$$

Очевидно следующее утверждение, что *если в одной ИСО интервал между двумя событиями S_{12} равен нулю, то он равен нулю и в любой другой ИСО*, т. е. $S_{12}' = 0$.

Нетрудно доказать, что вообще в двух произвольных инерциальных СО K и K' $S_{12} = S_{12}'$, т. е. *интервал между двумя событиями инвариантен*. Для доказательства этого факта потребовалось бы ввести дополнительные постулаты о свойствах пространства и времени, где происходят события: *пространство однородно и изотропно*. Эти свойства говорят о равноправии всех направлений движения тел (изотропность) и что масштабы измерения расстояний, а также времени всюду одинаковы (однородность).

Мы не будем здесь далее доказывать инвариантность интервала, а ограничимся тем замечанием, что эта инвариантность является математическим обобщением постулата о постоянстве скорости света $(c = c')$ и постулатов об однородности и изотропности пространства-времени.

§3. Лоренцево сокращение времени. Собственное время

Поставим мысленный опыт по сравнению хода часов, идущих в «нашей» K-системе и в K'-системе, движущейся со скоростью $\vec{V}$, направленной вдоль по оси x относительно K-системы (рис. 3).

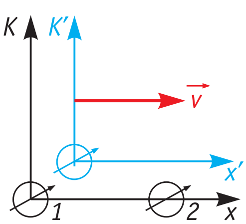


Рис. 3

Будем полагать, что сравнивать можно показания только тех часов, которые, несмотря на их относительное движение, находятся практически в одной точке пространства. Все часы, участвующие в эксперименте, должны быть абсолютно идентичны, чтобы исключить соответствующие ошибки эксперимента. В «нашей» системе надо расположить как минимум двое часов, а в K'-системе достаточно иметь единственные часы, покоящиеся в точке с координатами $x' = y' = z' = 0$. Кроме того, часы *1* и *2* в K-системе необходимо синхронизировать, с тем чтобы они «шли» согласованно. Для этого Эйнштейн предложил простейший приём: если строго посередине отрезка, соединяющего эти двое часов, устроить вспышку света, то в момент приёма светового сигнала в K-системе часы сбрасываются на ноль и далее идут синхронно.

Итак, рассмотрим два близких события: *1* – это нахождение «штрихованных» часов и часов *1* (из K-системы) в одной и той же точке пространства. В это мгновение как те, так и другие часы показывают «ноль». Через некоторое малое время «штрихованные» часы встречаются с часами *2* (событие *2*). Пусть часы в K'-системе показывают время пролёта dt'. Соответствующее время dt в «нашей» системе отсчета мы вычислим как разность показаний часов *1* и *2*. Интервал между двумя событиями – инвариант. Поэтому $dS = dS'$.

Поскольку $dx' = dy' = dz' = 0$ (часы в K'-системе неподвижны), то $dS'^2 = c^2 dt'^2$. В K-системе соответствующий интервал $dS^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Приравнивая эти интервалы, после простых преобразований получим

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = dt\sqrt{1 - \beta^2}, \qquad (9)$$

где введено стандартное обозначение $\beta = V/c$ (скорость в единицах скорости света).

Чаще всего малый промежуток времени dt' обозначают как τ_0 – собственное время, измеренное по часам K'-системы. Например, собственное время жизни какой-либо частицы. Таким образом,

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1 - V^2/c^2}. \qquad (10)$$

Собственное время жизни частицы всегда наименьшее. Измеренное по часам K-системы это время всегда больше. Заметим, что у фотона (кванта света) время жизни равно $\tau_0 = 0$. Это говорит о том, что с фотоном нельзя связать K'-систему. Относительно любой ИСО фотон движется со скоростью света.

Задача 1. В движущемся со скоростью $\vec{V}$ вагоне, имеющем ширину L (вектор $\vec{V}$ направлен перпендикулярно этой ширине), на боковой стенке установлено зеркало *3* (рис. 4). У противоположной стенки вблизи точки A устраивают короткую вспышку света, которую регистрирует датчик, установленный на стенке вблизи места излучения (т. A). Чему равно отношение времени распространения света τ_0 в системе отсчёта вагона к времени его распространения τ относительно полотна дороги?

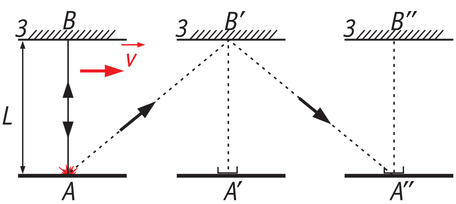


Рис. 4

Решение. Время распространения света от стенки к зеркалу и обратно $\tau_0 = \dfrac{2L}{c}$.

В системе полотна дороги сигнал распространяется также со скоростью c, но его путь другой, больший. На рис. 4 это путь $AB'A''$. Время сигнала в этом пути

$$\tau = \sqrt{\frac{(2L)^2}{c^2} + \frac{(V\tau)^2}{c^2}} .$$

Из этого уравнения найдем τ:

$$\tau = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} .$$

Таким образом, $\frac{\tau_0}{\tau} = \sqrt{1 - V^2/c^2}$, что соответствует формуле (6). В принципе решение этой задачи может послужить выводом формулы (6). Однако в этом случае не видна асимметрия задачи. В случае железнодорожного полотна и вагона можно говорить о т. н. «*парадоксе часов*». Если с точки зрения K - системы медленнее идут часы K' - системы (в вагоне), то с точки зрения «вагона», наоборот, медленнее идут «наши» часы, находящиеся в K -системе. Причем в том же отношении. Кто прав? Эффект чисто кинематический. Однако если взглянуть на рис. 3, то, как уже утверждалось, видна асимметрия задачи. В K' - системе *одни* часы, а в K - системе – *двое* часов. И постановка задачи именно такая («однобокая»). Там, где «больше штук часов», время течёт медленнее. Если нам перейти в K' - систему, то только со своими двумя часами.

Задача 2. Мюоны (нестабильные частицы, относящиеся к классу лептонов, мюон – «тяжёлый» аналог электрона) образуются при взаимодействии космических лучей с молекулами воздуха в верхних слоях атмосферы, а регистрируются у поверхности Земли. Время жизни мюона $\tau_0 = 2{,}2$ мкс. Оценить скорость мюона, полагая, что он образовался на высоте $H = 20$ км и распался у поверхности Земли.

Решение. Если скорость мюона равна V и она направлена к центру Земли, то в ЛСО он «прожил» время $\tau = H/V$. С другой стороны, это же время $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$.

Таким образом, приравнивая эти выражения и возводя в квадрат, получим

$$\frac{H^2}{V^2} = \frac{\tau_0^2 c^2}{c^2 - V^2}, \qquad (*)$$

откуда следует, что

$$V = \frac{Hc}{\sqrt{H^2 + \tau^2 c^2}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} = c .$$

Очевидно, что скорость мюона, «дожившего» до самого момента регистрации и тут же «умершего», очень близка к скорости света. Насколько? Мы вполне можем найти разность $c - V$.

Для этого, полагая, что $c \approx V$, и разлагая $c^2 - V^2 = (c - V)(c + V) \approx 2c(c - V)$, получим из выражения (*): $H^2 \approx \frac{\tau_0^2 c^4}{2c(c - V)}$,

откуда $c - V \approx \frac{\tau_0^2 c^3}{2H^2} \approx 1{,}6 \cdot 10^5$ м/с, что и в самом деле на три порядка меньше c.

§4. Лоренцево сокращение длин

Х. Лоренц ещё задолго до Эйнштейна, рассматривая движение электрона, обнаружил, что продольный размер электрона (размер в направлении его движения) должен претерпевать сокращение. Рассмотрим, однако, не электрон, а обыкновенную линейку, имеющую *собственную длину* l_0 в своей K' -системе. Линейка движется со скоростью $\vec{V}$ вдоль своей длины в направлении оси x в нашей K - системе (рис. 5).

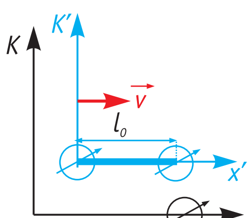


Рис. 5

Мысленный опыт ставился так, чтобы можно было воспользоваться результатами опыта по измерению сокращения времени. Для этого в K - системе устанавливается «секундомер», отсчитывающий время пролёта линейки мимо него. Если концы линейки оснастить часами (двое штук), то, сравнивая время пролёта по K - часам Δt_k с тем же временем, но зарегистрированным двумя часами в K' - системе $\Delta t_{k'}$, мы сможем найти длину пролетающей мимо линейки l. Очевидно, что $\Delta t_{k'} = \dfrac{\Delta t_k}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$.

Измеренная нами длина $l = V \cdot \Delta t_k$, а собственная длина линейки l_0 может быть выражена как $l_0 = V \cdot \Delta t_{k'}$. Отсюда следует

$$\frac{l}{l_0} = \frac{\Delta t_k}{\Delta t_{k'}} = \sqrt{1-V^2/c^2} = \sqrt{1-\beta^2}\,. \qquad (10)$$

Таким образом, $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$. И действительно, $l < l_0$. При $V \to c$ измеряемая длина стремится к нулю. Этот эффект и сокращение времени является чисто кинематическим эффектом. Никаких внутренних напряжений (деформаций) в линейке не возникает!

В итоге заметим, что такие понятия как длина и временной промежуток относительны. Так же как относительны понятия движение и покой.

Задача 3. Два электрона движутся в направлении к мишени один за другим с равными скоростями $V_1 = V_2 = 3/5\,c$. Второй ударяется о мишень через $\tau = 1$ мкс после первого. Определить, каким было расстояние между электронами в ЛСО и в системе отсчёта, связанной с одним из электронов.

Решение. В ЛСО: $L = V\tau = 180$ м. А в движущейся вместе с электронами системе отсчёта это расстояние должно быть больше (как собственная длина)

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{180}{\sqrt{1-9/25}} = 225 \text{ м}.$$

Задача 4. Две линейки, собственная длина каждой из которых равна l_0, движутся навстречу друг другу параллельно общей оси x с релятивистскими скоростями (рис. 6.). Наблюдатель, связанный с одной из них, зафиксировал, что между совпадениями левых и правых концов линеек прошло время τ. Какова относительная скорость линеек? Расчёт сделать для $\tau = 30$ мкс, $l_0 = 3$ км.

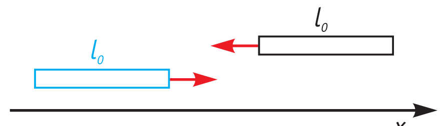


Рис. 6

Решение. Длина одной из линеек в СО другой линейки $l = l_0\sqrt{1-V^2/c^2}$.

С другой стороны, эта же самая длина $l = l_0 - V\tau$.

Приравнивая эти выражения и решая полученное уравнение, находим

$$V = \frac{2l_0\tau}{\tau^2 + l_0^2/c^2} = 180000 \text{ км/с}.$$

Задача 5. Космический корабль летит со скоростью $v = 0{,}6\,c$ от одного космического маяка к другому. В момент, когда он находится посередине между маяками, каждый из них испускает в направлении корабля световой импульс. Найти, какой промежуток времени пройдёт на корабле между моментами регистрации этих импульсов. Расстояние между маяками свет проходит за 2 месяца. Считать, что маяки не перемещаются друг относительно друга.

Решение. Обозначим промежутки времени в неподвижной СО, связанной с маяками, через которые световые импульсы от маяков достигнут корабля, как T_1 и T_2. Тогда

$$\frac{L}{2} - vT_1 = cT_1;\ \frac{L}{2} + vT_2 = cT_2,$$

где L – расстояние между маяками. Из этих уравнений получаем

$$T_1 = \frac{L}{2(c+v)} = 0{,}625 \text{ мес};$$

$$T_2 = \frac{L}{2(c-v)} = 2{,}5 \text{ мес};$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{Lv}{c^2 - v^2} = 1{,}875 \text{ мес}.$$

По собственным часам корабля пройдёт время

$$\Delta T_{соб.} = \Delta T\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L}{c}\frac{v}{\sqrt{c^2-v^2}} = 1{,}5 \text{ мес}.$$

§5. Эффект Доплера

Пусть, например, вслед *удаляющемуся* со скоростью $\vec{V}$ космическому кораблю периодически с периодом T по часам K - системы посылаются излучателем $И$ световые сигналы. Найдём интервалы времени, через которые эти световые вспышки будут приходить к наблюдателю $Н$, находящемуся на корабле в K' - системе.

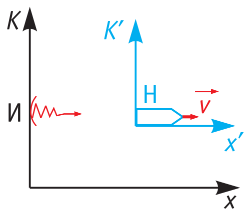


Рис. 7

Обозначим время в K - системе между двумя последовательно принятыми сигналами как $\tau_и$. Тогда $\tau_и = T + \frac{V\tau_и}{c}$, где $V\tau_и$ – расстояние, на которое успевает удалиться корабль за время хода света $\tau_и$. Из написанного уравнения

$$\tau_и = \frac{T}{1 - V/c} = \frac{T}{1-\beta}.$$

Однако в K' -системе наблюдатель зарегистрирует меньшее время $\tau_н$:

$$\tau_н = \tau_и\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{T\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V/c} =$$

$$= T\sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} = T\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Если теперь рассмотреть корабль, *приближающийся* к источнику $И$ сигналов, то результат будет отличаться знаком скорости:

$$\tau_н^{прибл} = T\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

Поскольку посылается периодическая последовательность импульсов, то можно говорить о частоте посылки сигналов $\nu = 1/T$ [Гц]. Отсюда и получаем известные формулы Доплера для изменения частоты сигналов при удалении и приближении друг к другу источника и приёмника:

удаление: $$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad (11)$$

(частота уменьшается),

приближение: $$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad (12)$$

(частота растёт).

Если скорость удаления (сближения) $V \ll c$, то используя малость β можно применить формулу приближения

$$\frac{1}{1+\beta} \approx 1 - \beta.$$

И тогда

$$\nu' \approx \nu(1-\beta) \text{ или } \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{V}{c} = \beta. \qquad (13)$$

Это формулы для т. н. *продольного эффекта Доплера*.

Задача 6. Два звездолёта с выключенными двигателями движутся навстречу друг другу. Сигнал бортового радиолокатора отражается от встречного звездолёта с частотой в $k = 9$ раз большей посланного. Встречный звездолёт пролетит мимо регистрирующего прибора на борту первого звездолёта за $\tau = 1$ мкс. Найти собственную длину встречного звездолёта.

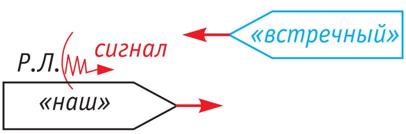


Рис. 8

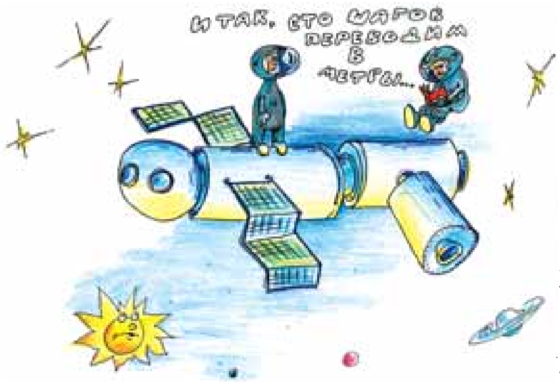
Решение. Для отражённого сигнала в случае приближения к звездолёту (рис. 8), летящему навстречу параллельным курсом, изменение частоты отражённого сигнала

$$k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

Отсюда скорость корабля относительно «нашего» $\beta = \frac{k-1}{k+1} = \frac{4}{5}$; $v = \beta c = 0{,}8\,c$.

В системе «нашего» звездолёта (K -система) будет зарегистрирована длина встречного $l = \tau v = \tau\beta c = 240$ м.

Однако собственная длина этого звездолёта больше: $l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} = 400$ м.



Задача 7. С космического корабля, приближающегося к Земле со скоростью $v = 0{,}6\,c$, ведётся прямая телевизионная передача, позволяющая видеть на экране телевизора циферблат корабельных часов. Сколько оборотов сделает на экране секундная стрелка этих часов, если по земным часам прошла 1 минута?

Решение. Все частоты сигналов, посылаемых телевизионным передатчиком (например, частота кадров, частота строк и т. п.), претерпят одно и то же доплеровское изменение

$$\frac{\nu_{набл}}{\nu_{ист}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 2\,.$$

Таким образом, секундная стрелка за 1 минуту по земным часам на экране телевизора совершит два оборота.

§6. Преобразования Лоренца. Правило сложения скоростей

В начале статьи мы записали классическое преобразование координат и времени Галилея (4). Перепишем их для случая, когда скорость $\vec{V}$ K' - системы параллельна осям x и x' (рис. 9):

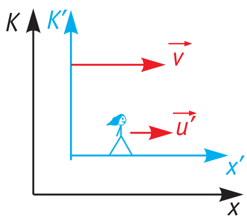


Рис. 9

$$x = x' + Vt';\ \ y = y';\ \ z = z';\ \ t = t'\,. \qquad (14)$$

Убедимся в том, что эти преобразования «не работают» в релятивистском случае. Пусть источник света находится в начале координат K - системы. В момент времени $t = 0$ происходит вспышка света. Тогда можно записать уравнение сферического светового фронта (рис. 10):

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \qquad (15)$$

Здесь $ct = r$ – текущий радиус сферы, увеличивающейся со скоростью c. Очевидно, что при этом $\Delta S = 0$, где ΔS – интервал между двумя событиями – излучением светового сигнала и прихода света в текущую точку (x, y, z, t). Здесь можно вернуться к соотношениям (6) и (7).

Пусть «штрихованная» K' - система, движущаяся со скоростью $\vec{V}$, направленной вдоль осей x и x' (здесь они совпадают), в момент излучения полностью совпадала с K - системой. При этом отсчёт времени в K' - системе мы начнём с момента излучения, когда $t' = 0$. Тогда в штрихованной системе отсчёта в силу инвариантности интервала $\Delta S' = 0$, т. е. сферический световой фронт остаётся сферическим (рис. 10):

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2\,. \qquad (16)$$

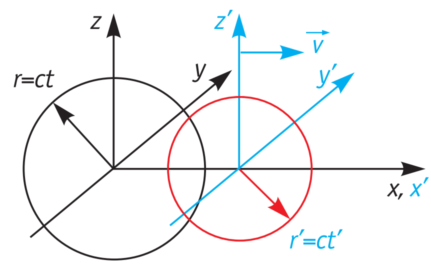


Рис. 10

Если в (15) подставить преобразования координат и времени (14), то совершенно очевидно, что мы никогда не получим сферической формы волнового фронта (16). Это говорит о том, что в данном случае эти преобразования «не работают».

Какими же должны быть эти новые преобразования? Во-первых, в силу того, что все инерциальные системы отсчёта равноправны, то переход от одной ИСО к другой должен описываться одинаковыми формулами со своими значениями V. Кроме того, при обратном переходе (замене $+V$ на $-V$), мы должны возвращаться в исходную систему отсчёта. Это говорит о том, что преобразования должны быть *линейными* по x и t, т. е. должны иметь вид:

$$x = Ax' + Bt';\ y = y';\ z = z';\ t = Ex' + Ft',$$

где A, B, E, F – некоторые величины, не зависящие от x' и t' (но могут зависеть от V).

Не останавливаясь на довольно простых выкладках, запишем требуемые преобразования, носящие имя нидерландского физика Хендрика Лоренца:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}};\ y = y';\ z = z';$$
$$t = \frac{t' + \left(V/c^2\right)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (17)$$

Легко убедиться в том, что эти преобразования «работают». Достаточно (17) подставить в (15) и получается уравнение сферического фронта (16) (проверьте!). Кроме того, заметим, что при $V \ll c$ $\left(\frac{V}{c} \to 0\right)$, уравнения переходят в классические преобразования (14).

Задача 8. Сквозь неподвижную в K-системе трубку AB длиной l_0 пролетает стержень $A'B'$, собственная длина которого $L_0 = 2l_0$. Скорость стержня v такова, что его длина в K - системе $L = l_0$ (рис.11.), и в некоторый момент стержень, пролетая сквозь трубку, целиком в ней умещается. Поместится ли стержень целиком в трубке с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе отсчёта стержня? Чему при этом будет равна длина трубки в системе отсчёта стержня? Чему равна скорость v?

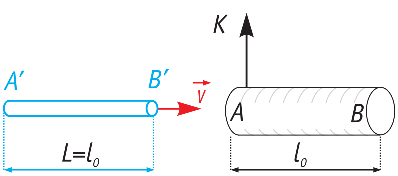


Рис. 11

Решение. Определим сначала скорость стержня из уравнения $L = 2l_0\sqrt{1-\beta^2} = l_0$, откуда

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{2};\quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{V}{c}.$$

Если перейти в систему отсчёта стержня, то с этой же скоростью на него будет надвигаться трубка. Тогда длина трубки будет равна $l = l_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{l_0}{2}$.

Таким образом, длина трубки в системе отсчёта стержня вчетверо меньше собственной длины стержня (рис. 12.)! Как же так? Всё просто. Два события, одновременные в одной системе отсчёта (рис. 11.), не одновременны в другой (рис. 12.), что следует из преобразований Лоренца. Одновременность – понятие относительное.

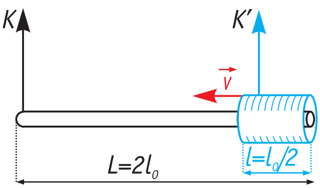


Рис. 12

Рассмотрим теперь правило сложения скоростей в релятивистской кинематике. Пусть в K' - системе «объект» движется вдоль оси x' со скоростью u'. Сама система отсчёта имеет скорость V относительно K -системы (рис. 10.). Казалось бы, если бы объект двигался со скоростью света $(u' = c)$, то его скорость должна бы быть $u = V + c$. Но это невозможно. Применим преобразования Лоренца. Если «объект» сместился на dx' за время dt' в K' - системе (его скорость $u' = \frac{dx'}{dt'}$), то соответствующее смещение и промежуток времени в K - системе равны:

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad dy = 0; \quad dz = 0;$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{18}$$

Разделим dx на dt (это скорость u в K - системе):

$$\frac{dx}{dt} = u = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{u' + V}{1 + \frac{Vu'}{c^2}}. \tag{19}$$

Это и есть релятивистское правило сложения скоростей.

Допустим, что если $u' = c$, то тогда и скорость $u = c$, как и должно быть согласно исходному постулату СТО (проверьте!).

§7. Основы релятивистской динамики

При изучении движения элементарных частиц уже давно было замечено, что обычные классические формулы динамики и законы сохранения энергии и импульса не выполняются в случае движения частиц с околосветовыми скоростями. А. Эйнштейн, М. Планк и другие, начиная с 1905 г., построили релятивистскую динамику материальной точки. Было установлено, что если под импульсом частицы понимать обычное $\vec{p} = m\vec{v}$, то закон сохранения импульса в этом случае не выполняется. Однако, если определить импульс иначе:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{20}$$

то тогда, как обычно, для замкнутой системы N -частиц

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{p_i} = const\,. \tag{21}$$

Энергией частицы $\mathcal{E}$ называется величина

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{22}$$

При этом при $v = 0$: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 = mc^2$ называется *энергией покоя частицы*. Кинетической энергией частицы называется разность

$$K = \mathcal{E} - mc^2, \tag{23}$$

которая при $V \ll c$ представима в виде:

$$K = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \approx mc^2\left(1 + \frac{\beta^2}{2} - 1\right) = = \frac{mc^2\beta^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

Если выражения (20) и (22) возвести в квадрат и разделить одно на другое, то получим очень важное для решения задач соотношение между энергией и импульсом

$$\mathcal{E}^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{24}$$

Из этого выражения видно, что для частицы, энергия покоя которой равна нулю (фотон),

$$\mathcal{E} = pc. \tag{25}$$

Кроме того, из (20) и (22) следует, что импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}. \tag{26}$$

Заметим, что при $V = c$ импульс и энергия частицы обращаются в бесконечность. А это означает, что частица с $m \neq 0$ не может двигаться со скоростью света. Единственная частица – фотон – движется в вакууме со скоростью света. Частица, имеющая скорость такую, что $\mathcal{E}$ велика по сравнению с её энергией покоя mc^2, называется *ультрарелятивистской* и для неё приближённо выполняется соотношение (25) $\mathcal{E} \approx pc$.

Задача 9. Два протона, ускоренные до одной и той же энергии $\mathcal{E} = 10\,\text{ГэВ}$, движутся навстречу друг другу и сталкиваются между собой. Определить энергию второй частицы в системе отсчёта, связанной с первой частицей (ускоритель на встречных пучках).

Решение. Если обозначить скорость протона как $\beta = V/c$ в ЛСО, то в системе отсчёта второго протона эта скорость будет равна $\beta_{отн}$ и в соответствии с правилом сложения скоростей (19) $\beta_{отн} = \dfrac{2\beta}{1+\beta^2}$. (**)

При этом величину скорости β (в единицах скорости света) найдём из выражения для полной энергии $\mathcal{E}$ протона (энергия покоя протона $\mathcal{E}_0 = mc^2 \approx 940$ МэВ)

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ откуда } \beta = \sqrt{1-\left(\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}}\right)^2}.$$

В свою очередь энергия встречного протона в системе отсчёта другого протона, очевидно, равна $\mathcal{E}' = \dfrac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{1-\beta_{отн}^2}}$. (***)

Используя (**), найдём $1-\beta_{отн}^2$, а затем и

$$\sqrt{1-\beta_{отн}^2} = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2}.$$

Подставив это выражение в (***), получим искомую энергию встречного протона

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{1-\beta_{отн}^2}} = 2\frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{E}_0} - \mathcal{E}_0 \approx 212 \text{ МэВ}.$$

Полученный результат наглядно демонстрирует преимущества изучения соударений частиц на встречных пучках по сравнению с ударами ускоренных частиц с неподвижными (намного больше возможностей).

Задача 10. Вспышка сверхновой звезды в Большом Магеллановом Облаке 23 февраля 1987 г. сопровождалась на Земле «нейтринным всплеском», а также сигналом гравитационной антенны. По утверждению газеты «Известия» от 11 марта 1987 г. запаздывание нейтрино от гравитационной волны составило $\tau = 0{,}1$ с, откуда должно было следовать, что энергия покоя нейтрино может составлять величину $\mathcal{E}_0 = m_\nu c^2 \sim 1{,}5$ эВ. Оставляя интерпретацию газеты на совести автора и принимая её за истину, найти энергию нейтрино, регистрируемых на Земле. Расстояние до сверхновой оценивается в 180000 световых лет. Считать, что гравитационные волны распространяются со скоростью света.

Решение. Если L – расстояние до сверхновой, то время хода нейтрино равно $\dfrac{L}{V}$, а гравитационной волны $\dfrac{L}{c}$.

Тогда

$$\tau = \frac{L}{V} - \frac{L}{c} \approx \frac{c-V}{c}\cdot\frac{L}{c}.$$

Величина $\dfrac{L}{c} = 180000$ лет $=$

$= 1{,}8\cdot10^5 \cdot 3{,}16\cdot10^7 = 5{,}7\cdot10^{12}$ с.

Таким образом, величина

$$\frac{c-V}{c} = \frac{\tau c}{L} \approx 1{,}8\cdot10^{-14}.$$

Энергия нейтрино, регистрируемых на Земле,

$$\mathcal{E}_\nu = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \frac{m_\nu c^2}{\sqrt{\dfrac{(c-V)(c+V)}{c^2}}} \approx$$

$$\approx \frac{m_\nu c^2}{\sqrt{2\dfrac{c-V}{c^2}}} \approx \frac{m_\nu c^2}{\sqrt{2\dfrac{\tau c}{L}}} \approx 7{,}9 \text{ МэВ}.$$

Задача 11. На линейном ускорителе в Стэнфорде электроны ускоряются от энергии покоя $\mathcal{E}_0 = 0{,}5$ ГэВ до $\mathcal{E}_k = 40$ ГэВ в прямой трубе длиной $l_0 = 3$ км. Считая, что ускорение электронов происходит вдоль трубы линейно, т. е. пропорционально длине растёт полная энергия, определить какой «кажется» электрону длина этой трубы.

Решение. Запишем выражение для полной энергии $\mathcal{E} = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma mc^2$,

где $\gamma = \gamma_0 + \dfrac{\gamma_k - \gamma_0}{l_0}x$.

При этом $\gamma_0 = 1$ (при $x = 0$), поскольку в этот момент электрон ещё неподвижен. При $x = l_0$ (в конце трубы)

$$\gamma = \gamma_k = \frac{\mathcal{E}_k}{mc^2} = \frac{40\cdot10^9}{0{,}5\cdot10^6} = 8\cdot10^4.$$

В системе отсчёта электрона величина бесконечно малого перемещения трубы относительно электрона $dx' = dx\sqrt{1-\beta^2} = \dfrac{dx}{\gamma}$. Остаётся проинтегрировать эти перемещения

$$\int_0^l dx' = l = \int_0^l \frac{dx}{\gamma} = \int_0^l \frac{dx}{\gamma_0 + \dfrac{\gamma_k - \gamma_0}{l_0}x} =$$

$$= \frac{l_0}{\gamma_k - \gamma_0} \cdot \int_0^l \frac{d\left(\gamma_0 + \frac{\gamma_k - \gamma_0}{l_0} x\right)}{\gamma_0 + \frac{\gamma_k - \gamma_0}{l_0} x} =$$

$$= \frac{l_0}{\gamma_k - \gamma_0} \cdot ln \left| \frac{\left(\gamma_0 + \frac{\gamma_k - \gamma_0}{l_0} l_0\right)}{\gamma_0} \right| =$$

$$= \frac{l_0}{\gamma_k - \gamma_0} \cdot ln \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{3 \cdot 10^5}{8 \cdot 10^4} ln 8 \cdot 10^4 \approx 40 \text{ см}.$$

Таким образом, электрону трехкилометровая труба «кажется» всего лишь 40-сантиметровой трубочкой!

Задача 12. За распадом остановившегося в ядерной фотоэмульсии K^+-мезона по схеме $K^+ \to \pi^+ + \pi^0$ последовал распад π^0-мезона $\pi^0 \to e^+ + e^- + \gamma$, причём вершина пары $\left(e^+, e^-\right)$ находилась на расстоянии $l = 0{,}04$ мкм от места остановки K^+-мезона. Оценить время жизни τ_0 π^0-мезона, если известно, что $M_k c^2 = 494$ МэВ; $M_{\pi^+} c^2 = 140$ МэВ; $M_{\pi^0} c^2 = 135$ МэВ.

Решение. Следы, оставленные частицами в фотоэмульсии, можно изобразить схематически (рис. 13). Заметим, что нейтральная частица π^0-мезон следа за собой не оставляет.

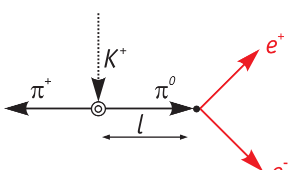


Рис. 13

Запишем закон сохранения энергии. Очевидно, что

$$M_K c^2 = M_{\pi^+} c^2 + K_{\pi^+} + M_{\pi^0} c^2 + K_{\pi^0}.$$

Поскольку энергия покоя π^+ и π^0-мезонов довольно близки, то можно приближённо считать, что равны и их кинетические энергии:

$$K_{\pi^0} \approx K_{\pi^+} = \frac{1}{2}\left(M_K c^2 - M_{\pi^+} c^2 - M_{\pi^0} c^2\right) \approx 110 \text{ МэВ}.$$

Полная энергия π^0-мезона

$$\mathcal{E}_{\pi^0} \approx M_{\pi^0} c^2 + K_{\pi^0} = 135 + 110 = 245 \text{ МэВ}.$$

Из релятивистского выражения для полной энергии

$$\mathcal{E}_{\pi^0} = \frac{M_{\pi^0} c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \sqrt{1-\beta^2} = \frac{M_{\pi^0} c^2}{\mathcal{E}_{\pi^0}} \text{ и далее}$$

$$\beta_{\pi^0} = \sqrt{1 - \left(\frac{M_{\pi^0} c^2}{\mathcal{E}_{\pi^0}}\right)^2} = 0{,}835$$

(скорость π^0-мезона).

Тогда время его пролёта до распада на $\left(e^+, e^-\right)$ равно (в ЛСО)

$$\tau = \frac{l}{\beta c} = 1{,}6 \cdot 10^{-16} \text{c}.$$

Собственное время жизни π^0- мезона найдём по известной формуле

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1-\beta^2} = 0{,}88 \cdot 10^{-16} \text{c}.$$

В заключение заметим, что далеко не все вопросы освещены в данной статье. Это только маленький шажок в микромир, ибо микромир и живёт по рассмотренным здесь (и многим другим не рассмотренным) законам.

Задачи для самостоятельного решения

1. Космический корабль с постоянной скоростью $v = \frac{24}{25}c$ движется по направлению к центру Земли. Какое расстояние в системе отсчёта, связанной с Землёй, пройдёт корабль за время $\Delta t = 7\,\text{с}$, отсчитанное по корабельным часам? Вращение Земли и её орбитальное движение не учитывать.

2. С Земли и из системы Арктура одновременно (по синхронизированным часам землян и арктурцев) отправляются навстречу друг другу космические корабли. Расстояние между Землёй и Арктуром равно 35 св. лет. Отношение скоростей кораблей равно $4/3$. При встрече разница показаний часов на кораблях составит 5 лет. Определить скорости кораблей землян и арктурцев.

3. Близнецы Пётр и Павел расстались в тот день, когда им исполнилось по 21 году. Пётр отправился в направлении оси x на 7 лет своего времени со скоростью $24/25$ скорости света, после чего сменил скорость на обратную и за 7 лет вернулся назад, тогда как Павел оставался на Земле. Определить возраст близнецов в момент их встречи.

4. От межпланетной станции в одном направлении с различными скоростями удаляются два космических корабля. Скорость первого (ближнего к станции) корабля $v_1 = 0{,}6\,c$. Короткие световые импульсы, отправляемые со станции с интервалом T по её часам, принимаются на первом корабле. В момент получения импульсов от станции с первого корабля отправляют свои импульсы на второй корабль. Второй корабль получает эти импульсы одновременно с импульсами от станции через промежутки времени $3T$ по своим часам. Определить скорость u второго корабля относительно первого и скорость v_2 станции.

5. Релятивистский π^0-мезон (энергия покоя mc^2) распадается «на лету» на два фотона с энергиями $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$. Найти угол θ между направлениями разлёта фотонов.

6. Найти скорость электрона, имеющего кинетическую энергию, равную: а) $1\,\text{эВ}$; б) $1\,\text{МэВ}$.

Ответы

1. $S = \frac{24}{7}c\Delta t' \approx 7{,}2\cdot 10^6\ \text{км}$.

2. Скорости кораблей $\beta_1 = 3/5$ и $\beta_2 = 4/5$.

3. В момент встречи Павлу, увы, 71 год, а Петру всего 35 лет.

4. $u = \frac{5}{13}c$; $v_2 = 0{,}8c$.

5. $\sin\theta/2 = \frac{mc^2}{2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}}$.

6. а) $v_а = 590\ \text{км/с}$; $v_б = 280000\ \text{км/с}$.