



**Бондаров Михаил Николаевич**  
Учитель физики лицея №1501 и ГОУ ЦО  
«Технологии обучения» г. Москвы.

## Осторожно! Сила трения

В статье разбираются характерные ошибки, возникающие у учащихся и абитуриентов при решении задач, в которых рассматривается движение тел под действием силы трения. Знакомство с анализом неверных решений позволит предотвратить появление подобных ошибок.

### Введение

После изучения темы «Движение тел под действием силы трения» Анатолий Иванович предложил ребятам решить дома три задачи. А на следующем уроке он прошёл между рядами парт и, заглянув в тетради учеников, вызвал по очереди трёх из

них. Учитель предупредил: «К доске выйдут ребята, допустившие весьма поучительные ошибки, и задача остальных – внимательно следить за объяснением авторов решений и попытаться сразу обнаружить эти ошибки».

### Процесс решения задач

Первым у доски оказался Алёша с задачей о движении груза по плоской поверхности.

**Задача 1.** Груз массой  $m=50$  кг перемещается по горизонтальной поверхности под действием силы  $F=300$  Н, направленной под углом  $\alpha=30^\circ$  к горизонту. Коэффициент трения груза о поверхность  $\mu=0,1$ . Определите ускорение движения груза.

**Решение Алёши (внимание: ищем ошибку!).** На груз, кроме заданной



силы  $\vec{F}$ , действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила нормального давления  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  (рис. 1). Направим ось  $x$

вдоль ускорения  $\vec{a}$  груза. Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на эту ось:

$$ma = F \cos \alpha - F_{\text{тр.}}$$

Силу трения скольжения можно определить из формулы

$$F_{\text{тр.}} = \mu N,$$

где

$$N = mg,$$

так как груз не перемещается по вертикали.

Из записанных уравнений

$$ma = F \cos \alpha - \mu mg.$$

Отсюда

$$a = \frac{F \cos \alpha}{m} - \mu g = 4,2 \text{ м/с}^2.$$

Таков был ответ Алёши.

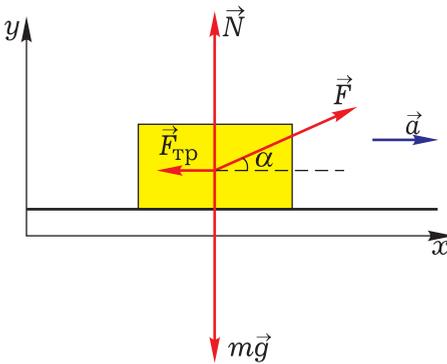


Рис. 1

Едва на доске появилась формула  $N = mg$ , в классе поднялся «лес рук». Из этого «леса» учитель выбрал первым поднявшего руку Васю, который чётко продекламировал:

– В решении Алёши неверно записано, что  $N = mg$ , так как кроме сил  $m\vec{g}$  и  $\vec{N}$  по вертикали действует также составляющая силы  $\vec{F}$ :

$$F_y = F \sin \alpha.$$

– Да-да, – быстро заговорил Алёша, – я просто забыл об этом, но теперь можно легко исправить ошиб-

ку. Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на вертикальную ось  $y$ :

$$0 = N + F \sin \alpha - mg.$$

Тогда

$$N = mg - F \sin \alpha,$$

$$F_{\text{тр.}} = \mu(mg - F \sin \alpha).$$

**Ответ:**  $a = \frac{F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}{m} - \mu g =$

$$= 4,5 \text{ м/с}^2.$$

После того как Алёша написал на доске верный ответ, Вася стал знакомить ребят со своим решением второй задачи.

**Задача 2.** На горизонтальном столе лежит деревянный брусок массой  $M = 500$  г, к которому привязана невесомая и нерастяжимая нить, перекинута через невесомый блок, укрепленный на краю стола (рис. 2). К свободному концу нити подвешивают груз массой  $m = 80$  г. С каким ускорением станут двигаться после этого тела, если коэффициент трения между бруском и столом  $\mu = 0,2$ ? Трением в оси блока пренебречь.

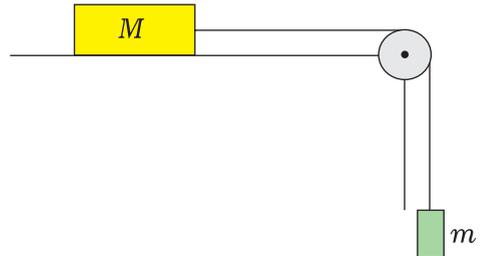


Рис. 2

**Решение Васи (внимание: ищем ошибку!).** Решим задачу строго по алгоритму, который мы записали на одном из первых уроков по динамике. Выберем инерциальную систему отсчёта, связанную с Землёй. Изобра-

зим все силы, действующие на каждое тело системы (рис. 3). Уравнение второго закона Ньютона для каждого тела в векторной форме имеет вид

$$m\vec{g} + \vec{T}_1 = m\vec{a}_1,$$

$$M\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = M\vec{a}_2.$$

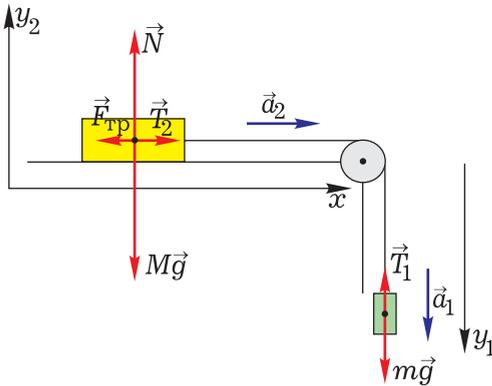


Рис. 3

Запишем эти уравнения в проекциях на горизонтальную ось  $x$  и вертикальную ось  $y_2$  для тела массой  $M$  и на вертикальную ось  $y_1$  для тела массой  $m$ :

$$T_2 - F_{\text{тр}} = Ma_2, \quad N - Mg = 0,$$

$$mg - T_1 = ma_1.$$

Так как нить нерастяжима, то модули ускорений тел одинаковы:

$$a_1 = a_2 = a.$$

Модули сил натяжения нити равны, так как нить невесома и блок идеален (для раскручивания невесомого блока без трения не нужен вращательный момент):

$$T_1 = T_2 = T.$$

Сила трения скольжения связана с силой реакции опоры соотношением

$$F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Тогда из записанного выше получим систему уравнений

$$mg - T = ma,$$

$$T - \mu Mg = Ma.$$

Отсюда легко выражается искомое ускорение:

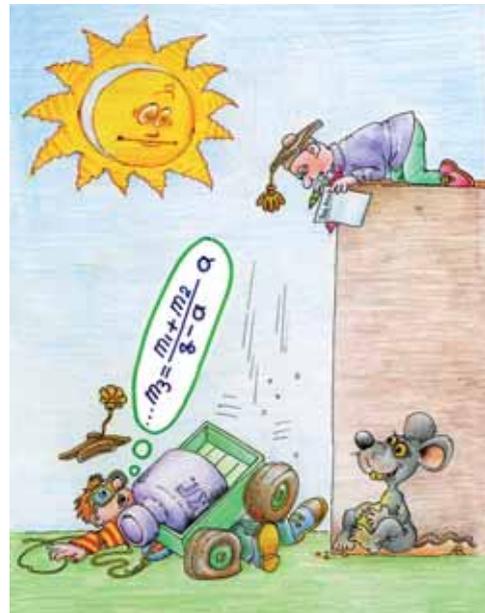
$$a = g \frac{m - \mu M}{M + m}.$$

Осталось только подставить числовые значения, что не составляет никакого труда.

Едва Вася завершил свой рассказ, руку поднял страстно желавший реабилитироваться Алёша:

– А вот это-то как раз и интересно! Если подставить числовые значения в полученную тобой формулу, то ускорение получится отрицательным. Значит, брусок должен поехать влево и потащить за собой груз!

– Да, странно всё это, – задумчиво проговорил Вася, – но я решил по тому же алгоритму, что и другие задачи, а они-то у меня не вызвали затруднений.



– Причём заметьте, – в полной тишине заговорил Дима, – подобный парадокс мог случиться и в первой задаче. Если бы числовые значения были подобраны так, что

$$\frac{F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{m} < \mu g,$$

то ускорение имело бы отрицательное значение, а это противоречит физическому смыслу.

– Очень хорошо, Дима, что Вы обратили внимание на общность двух задач, – сказал с улыбкой Анатолий Иванович. – Как же Вы советуете поступать в таких случаях?

– В решениях первых двух задач, – продолжил юноша, – их авторы, не задумываясь, применяли формулу  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , которая справедлива лишь тогда, когда тело скользит по поверхности (или находится на грани скольжения). В первой задаче груз, действительно, скользил, и ответ получился верный. А во второй задаче числовые значения подобраны так, чтобы тела находились в покое, значит, использовать формулу  $F_{\text{тр}} = \mu N$  нельзя.

– Как же тогда решать задачу? – спросили ребята.

– А задача-то практически решена. – заметил Дима. – Осталось только верно интерпретировать отрицательный знак ускорения. Конечно же, брусок не поедет назад, а останется на месте. Поэтому ускорение тел равно 0.

– Силёнок у груза не хватит, чтобы сдвинуть брусок, – пошутил Вася.

**Ответ во второй задаче:**  $a = 0$ .

– Итак, с двумя задачами мы разобрались, – сказал Анатолий Иванович и пригласил к доске Славу, который стал объяснять решение третьей задачи.

**Задача 3.** На наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ , находится груз массой  $M = 4$  кг (рис. 4). К грузу

привязан лёгкий шнур, перекинутый через невесомый блок, укрепленный на вершине наклонной плоскости. К другому концу шнура подвешена гиря массой  $m = 1$  кг. Определите ускорение тел после того, как система будет предоставлена самой себе, если коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью  $\mu = 0,4$ . Трением в оси блока пренебречь.

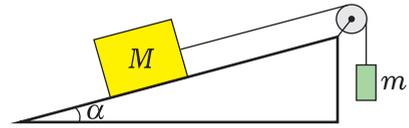


Рис. 4

**Решение Славы (внимание: ищем ошибку!).** Изобразим на чертеже все силы, действующие на каждое тело системы (рис. 5). Мы не знаем заранее, куда движутся тела, поэтому предположим, что гиря опускается. Проведём общий ход решения аналогично предыдущей задаче. Как и в ней, запишем уравнение второго закона Ньютона для каждого тела в векторном виде, а затем в проекциях на оси  $x$  и  $y_2$  для

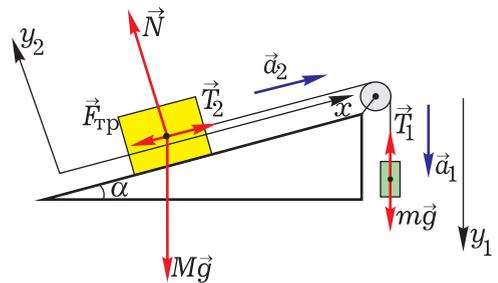


Рис. 5

тела массой  $M$  и на ось  $y_1$  для тела массой  $m$ :

$$\begin{aligned} T_2 - F_{\text{тр}} - Mg \sin \alpha &= Ma_2, \\ N - Mg \cos \alpha &= 0, \\ mg - T_1 &= ma_1. \end{aligned}$$

Сила трения

$$F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Из записанного выше получим систему уравнений

$$\begin{aligned} mg - T &= ma, \\ T - \mu Mg \cos \alpha - Mg \sin \alpha &= Ma. \end{aligned}$$

Отсюда выразим искомое ускорение:

$$a = g \frac{m - M(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{M + m}.$$

Подставив числовые значения, находим  $a = -4,8 \text{ м/с}^2$ . Следовательно, наше предположение, что гиря опускается, неверно. Знак «минус» указывает на то, что гиря поднимается вверх с тем же по модулю ускорением.

**Ошибочный ответ Славы:**

$$g \left| \frac{m - M(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{M + m} \right| = 4,8 \text{ м/с}^2, \text{ гиря поднимается.}$$

Записав на доске ответ, Слава посмотрел на одноклассников. Несколько человек то поднимали, то опускали руку, но уверенно держал её поднятой только Филипп.

– Если бы трение в системе отсутствовало, – начал он, – то действительно, отрицательный знак ускорения «говорил бы» о том, что модуль ускорения найден верно, а направление этого вектора противоположно выбранному в начале решения. Однако при наличии трения такой вывод уже неверен. Ведь тела могут не только двигаться в противоположном направлении, но и находиться в покое.

– Но можно ли определить, что конкретно происходит с телами: движутся ли они или покоятся? – спросил его Алёша.



– Я считаю, – не очень уверенно ответил Филипп, – надо снова решать задачу, предположив, что гиря поднимается. При этом важно не забыть, что сила трения, препятствуя движению бруска, будет направлена в обратном направлении, т.е. вверх вдоль наклонной плоскости. Если же в ответе снова получится отрицательный знак у ускорения, то это будет означать, что система покоится.

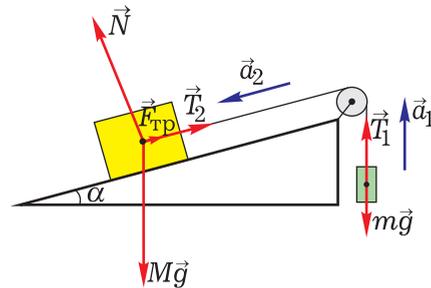


Рис. 6

Филипп поменял на противоположные направления векторы силы трения и ускорений тел (рис. 6). И уже более решительно продолжил:

– Записав уравнения, аналогичные предыдущим, получим

$$T - mg = ma,$$

$$Mg \sin \alpha - T - \mu Mg \cos \alpha = Ma.$$

Отсюда можно найти искомое ускорение. Оно оказывается снова отрицательным:

$$a = g \frac{M(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - m}{M + m} \approx -0,8 \text{ м/с}^2.$$

Значит, тела находятся в покое, – завершил своё решение Филипп.

**Ответ в третьей задаче:**  $a = 0$ .

– Итак, на вопрос третьей задачи мы ответили, – сказал Анатолий Иванович, – но хотелось бы дать ответ и на вопрос, который «повис в воздухе»: чему равна (модуль и направление) сила трения покоя, действующая на тело массой  $M$ ? Кто хочет к доске?

– Можно я? – поднял руку Алёша.

– Поскольку гиря неподвижна, сила натяжения нити равна по модулю силе тяжести гири:

$$T = mg.$$

### Заключение

– А можно ли каким-либо образом сократить перебор всех возможных вариантов при решении аналогичных задач? – спросил Дима.

– Конечно, – ответил Анатолий Иванович, – если ясно, куда движутся тела при отсутствии трения, то при наличии трения тела либо не движутся вообще, либо будут двигаться в ту же сторону, что и в отсутствие трения. А в качестве итога давайте внесём полную ясность в вопрос о силе трения, выделив наиболее существенное.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Тело массой 10 кг находится на горизонтальной поверхности. На тело действует сила 50 Н, направленная под углом  $30^\circ$  к горизонту. Определите силу трения, если коэффициент трения 0,2. Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . (Ответ: 15 Н.)

2. Невесомый блок укреплен на вершине двух наклонных плоскостей,

Из условия равновесия груза следует, что

$$T - F_{\text{тр}} - Mg \sin \alpha = 0.$$

Тогда из записанных уравнений получим

$$F_{\text{тр}} = (m - M \sin \alpha)g = -10 \text{ Н}.$$

Знак «минус» свидетельствует о том, что сила трения покоя направлена вверх вдоль наклонной плоскости и равна 10 Н. Заметим, что это меньше силы трения скольжения, равной

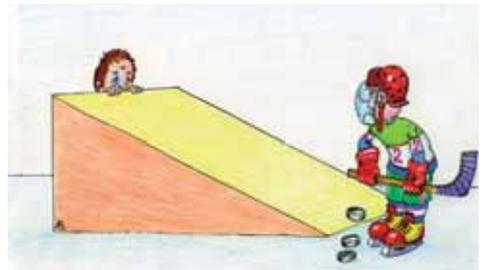
$$\mu N = \mu Mg \cos \alpha \approx 13,6 \text{ Н}.$$

– Ну, что ж, – подвёл итог учитель, – теперь я вижу, что вы неплохо разобрались с коварной силой трения, и предстоящая контрольная работа вам не страшна.

1. Сила трения скольжения всегда определяется по формуле

$$F_{\text{тр}} = \mu N.$$

2. Сила трения покоя не может превышать  $\mu N$ .



составляющих с горизонтом углы  $\alpha = 30^\circ$  и  $\beta = 45^\circ$ . Гири равной массы  $m_1 = m_2 = 1 \text{ кг}$  соединены нитью, перекинутой через блок (рис. 7). Найдите ускорение, с которым движутся грузы. Коэффициенты трения гири о наклонные плоскости одинаковы  $\mu = 0,1$ . Трением в оси блока, массой нити и её растяжением пренебречь. При-

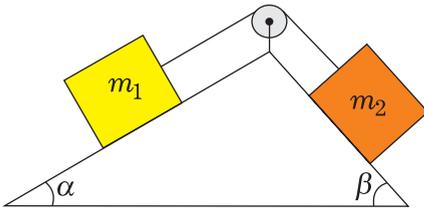


Рис. 7

нить  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . (Ответ:  $0,25 \text{ м/с}^2$ , правый груз опускается.)

3. Два бруска массами  $m_1 = 7 \text{ кг}$  и  $m_2 = 6 \text{ кг}$  соединили нитью и положили на горизонтальный стол.

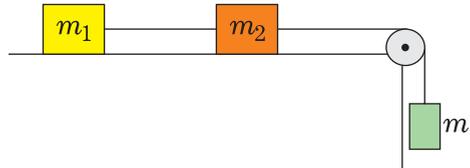


Рис. 8

К бруску массой  $m_2$  привязали вторую нить с грузом массой  $m = 1 \text{ кг}$  (рис. 8). Определите ускорения тел, если коэффициенты трения о стол брусков массами  $m_1$  и  $m_2$  равны  $\mu_1 = 0,2$ ,  $\mu_2 = 0,1$ . (Ответ: 0.)

## Новости Новости Новости Новости Новости

### Космический корабль «Жюль Верн»

Как известно, уже несколько лет полёты к Международной космической станции (МКС) совершают главным образом российские и иногда американские космические корабли. В апреле этого года к ним присоединился «чужестранец» корабль «Жюль Верн» европейского космического агентства. Этот 20-тонный «грузовик» – первенец серии ATV европейских космических кораблей – несколько превзошёл по грузоподъёмности и автоматизированности заслуженные российские «Прогрессы». Его запуск с космодрома Куру во французской Гвиане и успешная пристыковка к МКС – существенный вклад европейцев в программу функционирования станции. После 2010 г., когда выработают свой ресурс американские челноки, именно на эту серию кораблей планируется возложить доставку на орбиту оборудования и систем жизнеобеспечения МКС. Примечательно, что часть компонентов европейского корабля имеет российское происхождение. Например, оборудование дозаправки МКС топливом и система сближения «Курс» разработаны и созданы на отечественных предприятиях.

На орбиту «Жюль Верн» доставил стандартный космический груз: топливо, воду, кислород в баллонах, продукты питания, научную аппаратуру и т.д. Стыковку первого ATV к МКС контролировал подмосковный Центр управления полётами, которому передали свои полномочия коллеги из ЦУПа в американском Хьюстоне («ведшие» европейский корабль на протяжении всего полёта), поскольку пристыковался европейский корабль к российскому сегменту МКС.