

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



Колесникова София Ильинична

Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист Заочной физико-технической школы (ЗФТШ) при МФТИ. Окончила Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (МГУ), имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».

Статья состоит из трёх частей, каждая из которых может изучаться независимо от других. Всё зависит от уже имеющихся знаний у каждого конкретного школьника.

В первой части напоминаются определения обратных тригонометрических функций, их свойства, графики. Затем даются рекомендации, как можно просто, без формул, найти значение *любой* тригонометрической функции, например, $\arctg a$ (или любого другого «арка»), где $a > 0$.

В приложении рассматриваются вопросы, вызывающие затруднения у учащихся и не часто встречающиеся на обычных уроках, – построение графиков функций $y = \arcsin(\sin x)$, $y = \arccos(\cos x)$. Даются рекомендации для нахождения, например,

$\arcsin(\sin a)$, где a – заданное число, не принадлежащее отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, и т. д.

Третью часть, пропустив первые две, может сразу читать тот, кому теория хорошо известна. В ней приведены примеры решения задач, содержащих обратные тригонометрические функции, не встречающихся в школьных учебниках, но присутствующих на вступительных экзаменах в различные вузы и в ЕГЭ.

Обратные тригонометрические функции

Часть 1.

1. Что такое $\arcsin a$?

Всем хорошо известен график функции $y = \sin x$ (рис.1) – так называемая синусоида. Проведём прямую $y = a$, $|a| \leq 1$.

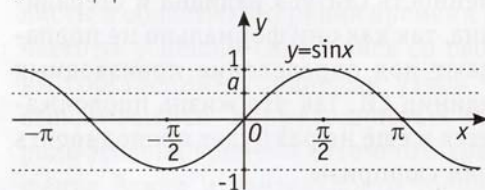


Рис.1

Хорошо видно, что прямая пересекает график в бесконечном числе точек, т. е. уравнение $\sin x = a$, $a \in [-1; 1]$ имеет бесконечно много решений. В школьные годы автора всё множество решений обозначалось как $\text{Arcsin } a$, т. е. можно было писать

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = \text{Arcsin } a, a \in [-1; 1].$$

Однако такая форма записи несла мало информации о структуре самого мно-

жества. Надо было как-то описать эту структуру. Обратимся опять к синусоиде. Рассмотрим теперь $y = \sin x$ не на всей числовой оси, а только на той её части, которая ближе всего к $x = 0$, и на которой синус принимает все значения от -1 до 1 : каждый скажет, что это отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Чем замечательна эта часть синусоиды?

Это уже не синусоида, а график функции

$$y = \sin x, D(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ (рис.1*)}$$

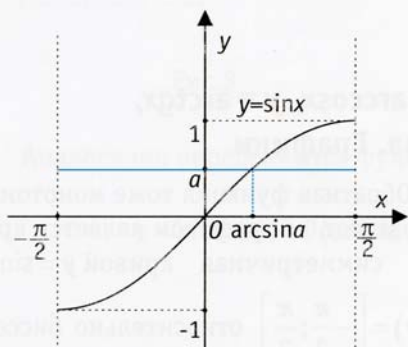


Рис.1*

И она замечательна тем, что любая прямая $y = a$, $a \in [-1; 1]$ пересекает график этой функции в единственной точке, т.е. уравнение $\sin x = a$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ всегда имеет единственное решение. Математики договорились это *единственное* решение обозначать символом – «словом» $\arcsin a$. Решение уравнения обозначается именно так, потому что конкретное значение для конкретного a вычисляется, за редким исключением, по формулам высшей математики. Эти вычисленные с определённой степе-

ню точности значения заложены в калькуляторах.

Итак, $\arcsin a$ – это единственное решение уравнения $\sin x = a$, $a \in [-1; 1]$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, т. е. если

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

«Мнемоническое» определение $\arcsin a$: арксинус a – это угол, принадлежащий промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a .

То есть $\sin x = a \Leftrightarrow x = \arcsin a$.

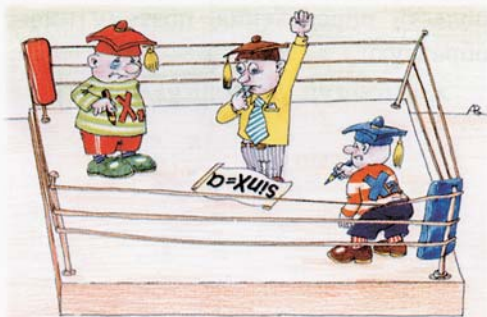
Из определения $\arcsin a$ немедленно следуют тождества:

$$\sin(\arcsin a) = a, a \in [-1; 1]$$

$$\text{и } \arcsin(\sin x) = x, \text{ если } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Эти тождества относительные, потому что они имеют место не для всех x , а лишь для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, не для всех a , а лишь для $a \in [-1; 1]$. С решением уравнения на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ситуация прояснилась, а как быть с остальными решениями уравнения $\sin x = a$?

Теперь можно рассмотреть синусоиду или тригонометрический круг. Рассмотрим круг. Будем решать уравнение



$\sin x = a$: одно решение известно – это $x_1 = \arcsin a$ (красный угол на рис.2),

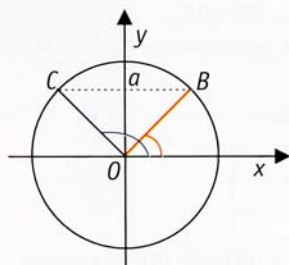


Рис.2

видно и другое решение – это $x_2 = \pi - \arcsin a$ (синий угол на рис.2). В силу периодичности синуса с периодом 2π , всё множество решений описывается формулами:

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi k,$$

$$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi m =$$

$$= -\arcsin a + \pi(2m+1), \quad k, m \in \mathbb{Z}.$$

Обе формулы могут быть объединены в одну $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, которая и описывает всё множество решений уравнения $\sin x = a$. А это значит, что $\text{Arcsin} a = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Видна разница между $\arcsin a$ и $\text{Arcsin} a$? Но символика вызвала возражение, т. к. $\text{Arcsin} a$ – «нечто многозначное» и сейчас не используется в школе.

2. Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$, $y = \text{arcsctg} x$. Свойства. Графики

Основные тригонометрические функции являются периодическими. Всякая периодическая функция принимает каждое своё значение бесконечно много раз, так как для любого

$$x \in X: f(x) = f(x + kT), k \in \mathbb{Z},$$

поэтому периодическая функция не может осуществлять взаимно однозначного соответствия, а, значит, не имеет обратной.

Но функция

$$y = \sin x, \quad D(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

возрастает, т. е. строго монотонна на области определения, поэтому имеет обратную:

$$x = \arcsin y, \quad D(\arcsin y) = [-1; 1],$$

$$E(\arcsin y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Обратная функция тоже монотонно возрастает, её графиком является кривая, симметричная кривой $y = \sin x$,

$D(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ относительно биссектрисы $y = x$ (рис.3).

Обычно независимую переменную обозначают x , а зависимую y . Поэтому более привычно записать

$$y = \arcsin x, \quad D(y) = [-1; 1],$$

$$E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad (\text{рис.3*}).$$

Если говорить о функции $y = \arcsin x$, то y – это не угол, а числовое значение этого угла, выраженного в радианах. Однако принято угол из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a , тоже называть арксинусом a .

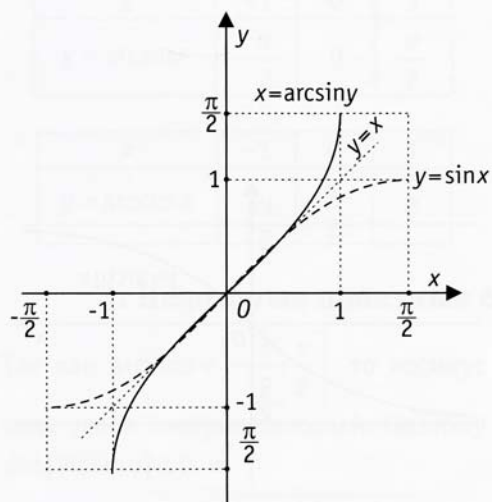


Рис.3

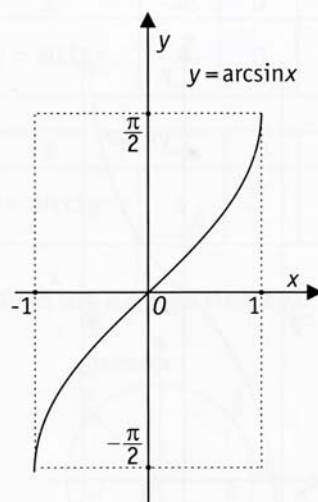


Рис.3*

Аналогично определяются функции:

$$y = \arccos x, \quad D(\arccos x) = [-1; 1], \quad E(\arccos x) = [0; \pi] \quad (\text{рис.4, 4}^*).$$

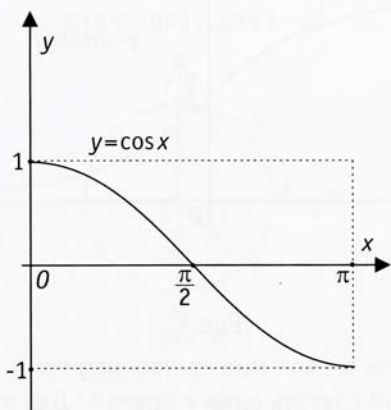


Рис.4

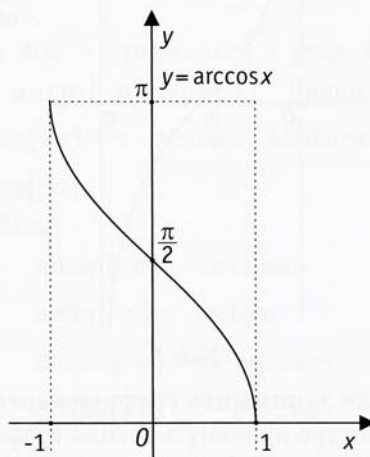


Рис.4*

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad D(\operatorname{arctg} x) = R, \quad E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{рис.5,6}).$$

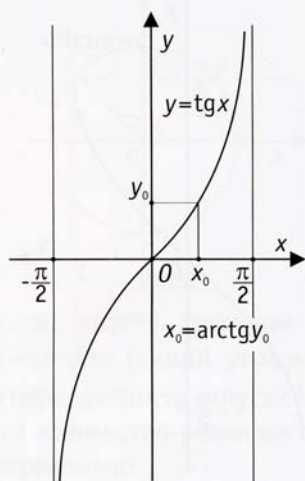


Рис.5

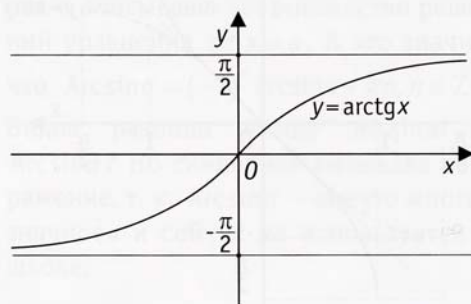


Рис.6

$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad D(\operatorname{arcctg} x) = R, \quad E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi) \quad (\text{рис.7, 7}^*).$$

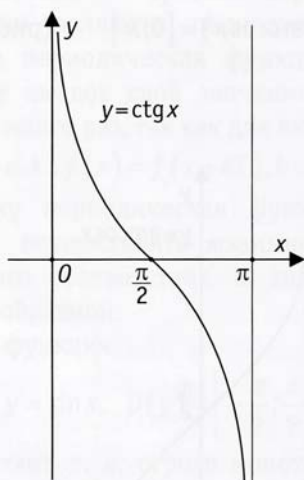


Рис.7

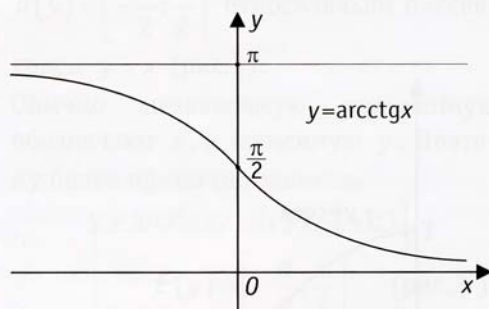


Рис.7*

Как запомнить графики «арков»? Как быстро прикинуть эскизы графиков этих функций? Конечно, прежде всего необходимо знать основные свойства этих функций: все они строго монотонны, каждая имеет свою область опреде-

ления и своё множество значений. Как их не спутать один с другим? Для этого достаточно сделать табличку для трёх основных точек – и характер графика «всплывёт» в памяти.

x	-1	0	1
$y = \arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

x	$-\infty$	0	∞
$y = \arctg x$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

x	-1	0	1
$y = \arccos x$	π	$\frac{\pi}{2}$	0

x	$-\infty$	0	∞
$y = \text{arcctg} x$	π	$\frac{\pi}{2}$	0

3. Некоторые полезные соотношения на «заметку»

Так как $\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то косинус этих углов неотрицательный. Поэтому $\cos(\arcsin a) \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \cos(\arcsin a) &= \sqrt{1 - \sin^2 \arcsin a} = \\ &= \sqrt{1 - a^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Аналогично рассуждая, получаем:

$$\begin{aligned} \arccos a \in [0; \pi] \Rightarrow \sin(\arccos a) \geq 0 \Rightarrow \\ \sin(\arccos a) &= \sqrt{1 - \cos^2 \arccos a} = \\ &= \sqrt{1 - a^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sin 2(\arcsin a) &= 2 \sin(\arcsin a) \times \\ &\times \cos(\arcsin a) = 2a\sqrt{1 - a^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

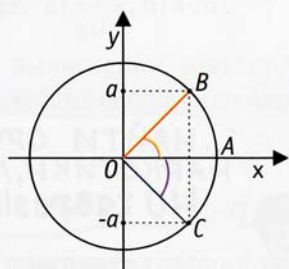


Рис.8

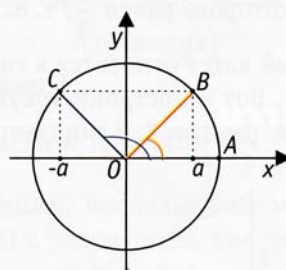


Рис.9

Угол AOB – это $\arcsin a$, угол AOC – это $\arcsin(-a)$ (рис.8). Видно, что $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

С $\arccos(-a)$ и $\text{arcctg}(-a)$ – другая «история».

Угол AOB – это $\arccos a$, а угол AOC – это $\arccos(-a)$ (рис.9). Видно, что $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$. Аналогично с $\text{arcctg}(-a)$.

Итак,

$$\begin{aligned} \arcsin(-a) &= -\arcsin a; \\ \arctg(-a) &= -\arctg a; \\ \arccos(-a) &= \pi - \arccos a; \\ \text{arcctg}(-a) &= \pi - \text{arcctg} a. \end{aligned} \quad (4)$$

4. Вычисление тригонометрических функций от «арков» положительных чисел

Заметим, что все «арки» положительных чисел – это углы, лежащие в первой четверти, т. е. острые углы. Поэтому их можно найти в прямоугольном треугольнике. Например,

$\arcsin \frac{2}{3}$ – это «угол» в треугольнике,

синус которого равен $\frac{2}{3}$, т. е. противолежащий катет относится к гипотенузе как 2:3. Вот и построим треугольник с катетом, равным 2, и гипотенузой, равной 3.

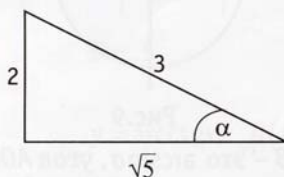


Рис. 10

По теореме Пифагора находим второй катет. Теперь, без всяких формул и дополнительных вычислений, с рисунка 10 можно «снять» значение любой тригонометрической функции этого «арка»:

$$\operatorname{tg} \arcsin \frac{2}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{ctg} \arcsin \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\cos \arcsin \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Пример 1. Найдите значение выражения $2\sqrt{13} \cos \left(\arctg \frac{2}{3} \right)$.

Решение. Многих учащихся задача ставит в тупик.

Так как $\frac{2}{3} > 0$, то $\alpha = \arctg \frac{2}{3}$ – это «угол» в треугольнике, тангенс кото-

рого равен $\frac{2}{3}$, т. е. противолежащий катет относится к прилежащему как 2:3. Построим треугольник с катетами 2 и 3 (рис.11).

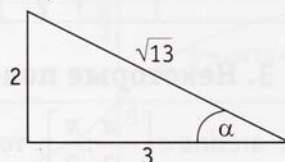


Рис.11

По теореме Пифагора находим гипотенузу. Теперь находим

$$\cos \arctg \frac{2}{3} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{13} \cos \arctg \frac{2}{3} = 6.$$

Ответ. 6.

Пример 2. Найдите:

а) $\operatorname{tg} \arcsin \frac{1}{7},$

б) $\operatorname{tg} 2 \arcsin \frac{2}{3}.$



Решение. По заданному арксинусу рисуем (рис.12) прямоугольный треугольник и находим значения нужных тригонометрических функций.

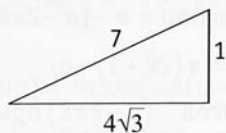


Рис.12

$$a) \operatorname{tg} \arcsin \frac{1}{7} = \frac{1}{\sqrt{49-1}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

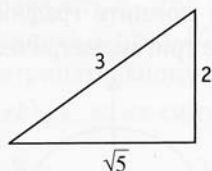


Рис.13

$$b) \operatorname{tg} 2 \arcsin \frac{2}{3} = \frac{2 \operatorname{tg} \arcsin \frac{2}{3}}{1 - \operatorname{tg}^2 \arcsin \frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{4}{5}} = 4\sqrt{5}.$$

Ответ. а) $\frac{1}{4\sqrt{3}}$, б) $4\sqrt{5}$.

При вычислении значений тригонометрических функций от «арков»

отрицательных чисел *полезны* формулы (с учётом формул (4)):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \arcsin(-a) &= -\operatorname{tg}(\arcsin a); \\ \cos \arcsin(-a) &= \cos(-\arcsin a) = \\ &= \cos(\arcsin a); \\ \operatorname{tg} \arctg(-a) &= -\operatorname{tg} \arctg a; \\ \operatorname{tg} \arccos(-a) &= \operatorname{tg}(\pi - \arccos a) = \\ &= -\operatorname{tg}(\arccos a); \\ \cos \arctg(-a) &= \cos(-\arctg a) = \\ &= \cos(\arctg a) \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (5)$$

Пример 3.

Вычислите $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Решение. Воспользовавшись формулой (5) и рисунком 14, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) &= \operatorname{tg}\left(\pi - \arccos \frac{1}{3}\right) = \\ &= -\operatorname{tg} \arccos \frac{1}{3} = -2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

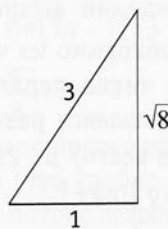


Рис.14

Ответ. $-2\sqrt{2}$.

Часть 2. Приложение.

Как построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$?

1. Из определения следует, что, если

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ то } \arcsin \sin x \equiv x.$$

2. Если $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, то

$$\arcsin \sin x = x - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Это следует из того, что в этом случае

$$(x - 2\pi k) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{и } \arcsin \sin x = \arcsin \sin(x - 2\pi k) =$$

$$= (x - 2\pi k).$$

3. Если $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right]$, то

$$\arcsin \sin x = \pi(2k+1) - x, k \in \mathbb{Z}.$$

Это следует из того, что

$$(x - \pi(2k+1)) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], k \in \mathbb{Z} \text{ и}$$

$$\begin{aligned} \arcsin \sin x &= \arcsin \sin(x - 2\pi k) = \\ &= \arcsin \sin(x - 2\pi k + \pi - \pi) = \\ &= \arcsin \sin((x - 2\pi k - \pi) + \pi) = \\ &= \arcsin(-\sin(x - 2\pi k - \pi)) = \\ &= -\arcsin \sin(x - 2\pi k - \pi) = \\ &= -(x - \pi(2k+1)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что график $y = \arcsin \sin x$ имеет следующий вид – рис.15.

Как найти $\arcsin(\sin a)$?

При нахождении $\arcsin(\sin a)$ прежде всего необходимо из числа a выделить целое число периодов синуса так, чтобы оставшаяся разность (а это сделать проще всего) $a - 2\pi k$ принадлежала отрезку $[0; 2\pi]$.

Тогда из графика видно, что,

- если угол $(a - 2\pi k)$ принадлежит *первой* четверти, то

$$\arcsin \sin a = (a - 2\pi k);$$

- если угол $(a - 2\pi k)$ принадлежит *второй* или *третьей* четверти, то $\arcsin \sin a = \pi - (a - 2\pi k) =$

$$= \pi(2k+1) - a;$$

- если угол $(a - 2\pi k)$ принадлежит *четвёртой* четверти, то $\arcsin \sin a = (a - 2\pi k) - 2\pi =$

$$= a - 2\pi(k+1).$$

Если не помнить график, то можно это найти на тригонометрическом круге:

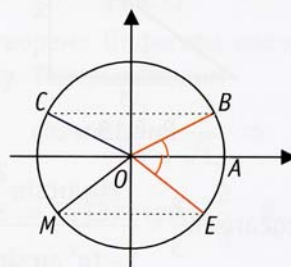


Рис.16

- 1) если разность $a - 2\pi k$ попадёт в *первую* четверть – угол AOB, то

$$\arcsin(\sin a) = \arcsin(\sin(a - 2\pi k)) =$$

$$= a - 2\pi k, \text{ т. к. } 0 \leq a - 2\pi k \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\arcsin \sin a = a - 2\pi k; \quad (6)$$

- 2) если $a - 2\pi k$ попадёт во *вторую* четверть – угол AOC, то надо перейти к углу AOB, т. к. их синусы равны, но

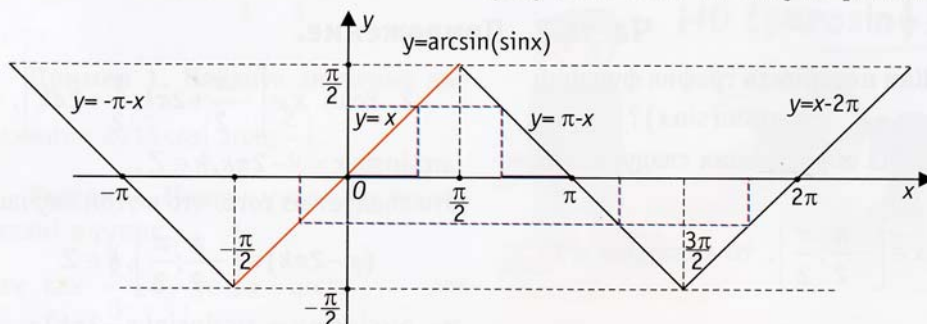


Рис.15

угол AOB лежит в первой четверти.

При этом

$$\begin{aligned}\angle AOC &= \pi - \angle AOB \Leftrightarrow \angle AOB = \\ &= \pi - \angle AOC = \pi - (a - 2\pi k).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\arcsin(\sin a) &= \arcsin(\sin(a - 2\pi k)) = \\ &= \pi - (a - 2\pi k) = 2\pi k + \pi - a,\end{aligned}$$

$$\text{т. к. } 0 \leq 2\pi k + \pi - a \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{т. е.}$$

$$\arcsin \sin a = (2k+1)\pi - a; \quad (7)$$

3) если разность $a - 2\pi k$ попадает в третью четверть – угол AOM , то надо перейти к отрицательному углу $AOE = \pi - (a - 2\pi k)$, т. к. их синусы равны.

При этом

$$\begin{aligned}\arcsin(\sin a) &= \arcsin(\sin(a - 2\pi k)) = \\ &= \arcsin(\sin(\pi - (a - 2\pi k))) = \\ &= \pi - (a - 2\pi k) = 2\pi k + \pi - a,\end{aligned}$$

$$\text{т. к. } -\frac{\pi}{2} \leq 2\pi k + \pi - a \leq 0,$$

$$\text{т. е. } \arcsin \sin a = (2k+1)\pi - a. \quad (8)$$

Видно, что во второй и третьей четвертях формулы одинаковы.

4) если разность $a - 2\pi k$ попала в четвёртую четверть – угол AOE , то надо опять перейти к отрицательному углу $AOE = -(2\pi - (a - 2\pi k))$. Поэтому

$$\begin{aligned}\arcsin(\sin a) &= \arcsin(\sin(a - 2\pi k)) = \\ &= \arcsin(\sin(-(2\pi - (a - 2\pi k)))) = \\ &= -(2\pi - (a - 2\pi k)) = a - 2\pi(k+1),\end{aligned}$$

$$\text{т. к. } -\frac{\pi}{2} \leq a - 2\pi(k+1) \leq 0,$$

$$\text{т. е. } \arcsin \sin a = a - 2\pi(k+1). \quad (9)$$

Пример 4.

Найдите $\arcsin \sin(2003,5\pi)$.

Решение.

Выделим целое число 2π :

$$2003,5\pi = 1001 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin \sin(2003,5\pi) =$$

$$= 2003,5\pi - 2\pi(1001+1) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Ответ. } -\frac{\pi}{2}.$$

Пример 5. Найдите $\arcsin \sin 17$.

Решение. Аргумент 17 надо преобразовать так, чтобы новый аргумент принадлежал промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}\arcsin \sin 17 &= \arcsin \sin(4\pi + (17 - 4\pi)) \\ &= \arcsin \sin(17 - 4\pi),\end{aligned}$$

$$\text{а } \pi < 17 - 4\pi < \frac{3\pi}{2}, \text{ т. е. угол } (17 - 4\pi)$$

принадлежит 3-ей четверти. Поэтому

$$\arcsin \sin 17 = \arcsin \sin(17 - 5\pi + 5\pi) =$$

$$= \arcsin(-\sin(17 - 5\pi)) =$$

$$= \arcsin \sin(5\pi - 17) = 5\pi - 17,$$

$$\text{т. к. } -\frac{\pi}{2} < 5\pi - 17 < 0.$$

Можно было просто воспользоваться формулой (что удобно, когда вы дома, или у вас потрясающая память):

$$\arcsin \sin a = (2k+1)\pi - a,$$

$$\text{т. е. } \arcsin \sin 17 = (4+1)\pi - 17.$$

Ответ. $5\pi - 17$.

...ДОМА ТВОЯ
ПОТРЕСАЮЩАЯ ПАМЯТЬ
ОПЯТЬ ВЕРНЁТСЯ.
Я НЕ СОМНЕВАЮСЬ!



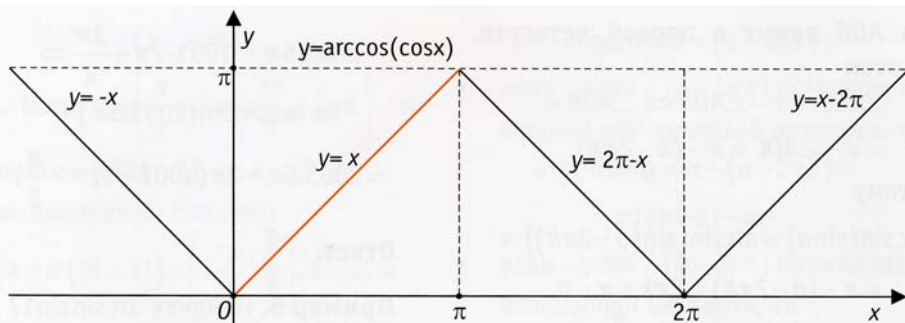


Рис.17

Как найти $\arccos(\cos a)$?

График функции $y = \arccos \cos x$ изображён на рис.17.

1. Из определения следует, что, если $x \in [0; \pi]$, то $\arccos \cos x = x$.

2. Если $x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k]$, то $\arccos \cos x = x - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Это следует из того, что

$$\begin{aligned} \arccos \cos x &= \arccos \cos(x - 2\pi k) = \\ &= x - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

т. к. $(x - 2\pi k) \in [0; \pi], k \in \mathbb{Z}$.

3. Если $x \in [\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, то $\arccos \cos x = 2\pi(k+1) - x$.

Это следует из того, что

$$\begin{aligned} \arccos \cos x &= \arccos \cos(x - 2\pi k) = \\ &= \arccos \cos(x - 2\pi k - \pi + \pi) = \\ &= \arccos \cos((x - 2\pi k - \pi) + \pi) = \\ &= \arccos(-\cos(x - \pi(2k+1))) = \\ &= \pi - \arccos(\cos(x - \pi(2k+1))) = \\ &= 2\pi(k+1) - x, \end{aligned}$$

т. к. $x - \pi(2k+1) \in [0; \pi]$.

При нахождении $\arccos \cos a$ можно прежде всего из числа a выделить целое число периодов косинуса так, чтобы оставшаяся разность (а это сделать проще всего) $a - 2\pi k$ принадлежала

отрезку $[0; 2\pi]$, т. е. представить заданное число в виде $a - 2\pi k$, где $0 \leq a - 2\pi k \leq 2\pi$.

Тогда,

- если $0 \leq a - 2\pi k \leq \pi$ – угол принадлежит *первой или второй* четверти, то $\arccos \cos a = a - 2\pi k$; (10)
- если $\pi \leq a - 2\pi k \leq 2\pi$ – угол принадлежит *третьей или четвёртой* четверти, то

$$\arccos \cos a = 2\pi - (a - 2\pi k) = 2\pi(k+1) - a. \quad (11)$$

Это можно увидеть и на тригонометрическом круге.

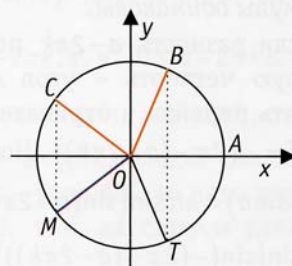


Рис.18

1) если $0 \leq a - 2\pi k \leq \pi$ – угол принадлежит *первой или второй* четверти, то

$$\arccos \cos a = a - 2\pi k; \quad (10)$$

2) если $\pi \leq a - 2\pi k \leq \frac{3\pi}{2}$ – угол $\angle AOM$

принадлежит *третьей* четверти, то надо перейти к углу $\angle AOC$, который равен

$$2\pi - (a - 2\pi k) = 2\pi(k+1) - a, \text{ при этом}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq 2\pi(k+1) - a \leq \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arccos \cos a = 2\pi(k+1) - a; \quad (11)$$

$$3) \text{ если } \frac{3\pi}{2} \leq a - 2\pi k \leq 2\pi - \text{ угол}$$

AOT принадлежит *четвёртой* четверти, то надо перейти к углу AOB , который равен $2\pi - (a - 2\pi k) = 2\pi(k+1) - a$,

$$\text{при этом } 0 \leq 2\pi(k+1) - a \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arccos \cos a = 2\pi(k+1) - a. \quad (12)$$

Замечаем, что для арккосинуса только две формулы.

Пример 6. Найдите $\arccos \cos 35,4$.

Решение.

$$35,4 = 2\pi \cdot 5 + (35,4 - 10\pi)$$

$$k = 5, \pi < (35,4 - 10\pi) < \frac{3\pi}{2} \quad (\text{формула (11)}).$$

$$\arccos \cos 35,4 = 12\pi - 35,4.$$

Ответ. $12\pi - 35,4$.

Пример 7. Найдите $\arccos \cos 24$.

Решение.

$$24 = 2\pi \cdot 3 + (24 - 6\pi) \Rightarrow k =$$

$$= 3, \frac{3\pi}{2} < (24 - 6\pi) < 2\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arccos \cos 24 = 8\pi - 24.$$

Ответ. $8\pi - 24$.

Как найти $\arctg(\operatorname{tg} a)$?

$$1. \text{ Если } a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \text{ то}$$

$$\arctg(\operatorname{tg} a) = a.$$

$$2. \text{ Если } a \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \text{ то надо выде-}$$

лить целое число π так, чтобы $0 \leq a - \pi k \leq \pi$.

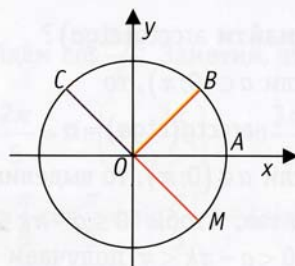


Рис. 19

Затем,

- если $0 \leq a - \pi k < \frac{\pi}{2}$ – угол в *первой* четверти, то

$$\arctg(\operatorname{tg} a) = a - \pi k; \quad (13)$$

- если $\frac{\pi}{2} < a - \pi k \leq \pi$ – угол во *второй* четверти, то надо перейти к отрицательному углу AOM , который равен $-(\pi - (a - \pi k)) = a - \pi(k+1)$,

$$\text{т. к. } -\frac{\pi}{2} < a - \pi(k+1) \leq 0,$$

$$\text{и } \arctg(\operatorname{tg} a) = a - \pi(k+1). \quad (14)$$

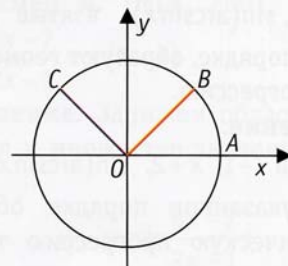


Рис. 20

Пример 8. Найдите $\arctg \operatorname{tg} 18$.

Решение.

$$18 = 5\pi + (18 - 5\pi) \Rightarrow k = 2,$$

$$\frac{\pi}{2} < (18 - 5\pi) < \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arctg \operatorname{tg} 18 = 18 - 6\pi.$$

Ответ. $18 - 6\pi$.

Как найти $\text{arcctg}(\text{ctga})$?

1. Если $a \in (0; \pi)$, то

$$\text{arcctg}(\text{ctga}) = a.$$

2. Если $a \notin (0; \pi)$, то выделим целое число π так, чтобы $0 \leq a - \pi k \leq \pi$, тогда для $0 < a - \pi k < \pi$ получаем

$$\text{arcctg}(\text{ctga}) = a - \pi k, \quad (15)$$

т. е. формула только одна.

Пример 9. Найдите $\text{arcctg}(\text{ctg}23)$.

Решение.

$$23 = 7\pi + (23 - 7\pi) \Rightarrow 0 < 23 - 7\pi < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \text{arcctg}(\text{ctg}23) = 23 - 7\pi.$$

Ответ. $23 - 7\pi$

Часть 3.

Обратные тригонометрические функции и вступительные экзамены

Обратные тригонометрические функции изучаются в школе очень бегло. Задачи на вступительных экзаменах встречаются не так часто и поэтому вызывают затруднения. Приведём примеры, в которых используются различные свойства этих функций.

Пример 1. (МГУ, 1995, ИСАА) Найдите x , если известно, что числа $-1, x+2, \sin(\arcsin x)$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию.

Решение.

Числа $-1, x+2, \sin(\arcsin x)$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, если

$$(x+2)^2 = -1 \cdot \sin \arcsin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 1, \\ (x+2)^2 = -x \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 3}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ (т.к. } \sin \arcsin x \equiv x \text{)}.$$

Ответ. -1 .

Пример 2. (МИФИ) Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = \text{arctg}(\sqrt{3} \cos 8x) + \text{arcctg}(\sin 3x)$$

и все x , при которых оно достигается.

Решение. Так как $-1 \leq \cos 8x \leq 1$ и $-\sqrt{3} \leq \sqrt{3} \cos 8x \leq \sqrt{3}$, $-1 \leq \sin 3x \leq 1$, $\text{arctg}t$ монотонно возрастающая функция, а $\text{arcctg}t$ монотонно убывающая на всей числовой оси, то

$$-\frac{\pi}{3} = -\text{arctg}\sqrt{3} \leq \text{arctg}(\sqrt{3} \cos 8x) \leq$$

$$\leq \text{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{и } \frac{\pi}{4} = \text{arcctg}1 \leq \text{arcctg}(\sin 3x) \leq$$

$$\leq \text{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}.$$

Отсюда следует, что

$$-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} = \frac{13\pi}{12},$$

т. е. функция ограничена сверху числом $\frac{13\pi}{12}$. Но это ещё не значит, что

число $\frac{13\pi}{12}$ является наибольшим значением функции. Проверим, принимает ли заданная функция значение $\frac{13\pi}{12}$.

$$f(x) = \frac{13\pi}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \cos 8x) = \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{arccos} \sin 3x = \frac{3\pi}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 8x = 1, \\ \sin 3x = -1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}, \\ \cos 8\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) = 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}, \\ \cos 4\pi\left(\frac{4k-1}{3}\right) = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы

$$\cos 4\pi\left(\frac{4k-1}{3}\right) = 1 \Rightarrow 4k-1 = 3n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{4k-1}{3} = k + \frac{k-1}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k-1 = 3m, m \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно,

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi(3m+1)}{6} = \frac{\pi(4m+1)}{2}, m \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда следует, что $\frac{13\pi}{12}$ действительно является наибольшим значением и принимается в точках

$$x = \frac{\pi(4m+1)}{2}, m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $f\left(\frac{\pi(1+4m)}{2}\right) = \frac{13\pi}{12}, m \in \mathbb{Z}.$

Пример 3. (МГУ, 2001, геогр. ф-т)

Сравнить числа $\frac{2\pi}{5}$ и $\arccos \frac{3}{10}$.

Решение.

Найдём $\cos \frac{2\pi}{5}$. Заметим, что

$$\sin \frac{2\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = \sin \frac{3\pi}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5} \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{\pi}{5} = 3 - 4 \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \frac{2\pi}{5} > \cos \arccos \frac{3}{10} \equiv \frac{3}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{5} < \arccos \frac{3}{10}.$$

Ответ. $\arccos \frac{3}{10} > \frac{2\pi}{5}.$

В следующих двух примерах совершенно не ясно, как можно решить уравнение. Придётся учесть область определения и множество значений арксинуса и арккосинуса.

Пример 4. (МГУ, 2001, химфак)

$$\arcsin \frac{6x-7}{2x-1} = \pi(2-x)$$

Решение. Запишем область определения и множество значений функции

$$y = \arcsin \frac{6x-7}{2x-1} :$$

$$\begin{cases} \left| \frac{6x-7}{2x-1} \right| \leq 1, \\ \pi|2-x| \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|6x-7|-|2x-1|}{|2x-1|} \leq 0, \\ -1 \leq 2x-4 \leq 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (8x-8)(4x-6) \leq 0, \\ 3 \leq 2x \leq 5. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[1; \frac{3}{2}\right], \\ x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Оказывается, что уравнение существует и может иметь решение в единственной точке. Проверим, является ли оно в этой точке тождеством, т. е. является ли $x = \frac{3}{2}$ его решением. Подставляем $x = \frac{3}{2}$ в уравнение:

$$\arcsin \frac{6 \cdot \frac{3}{2} - 7}{2 \cdot \frac{3}{2} - 1} = \pi \left(2 - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}.$$

Ответ. $\frac{3}{2}$.

Пример 5. (МГУ, 2001, геогр. ф-т)
Решите уравнение

$$2\arcsin(3^x - 8) - 3\arccos(11^x - 120) = \frac{2\pi}{x}.$$

Решение.

$$\text{Найдём ОДЗ: } \begin{cases} -1 \leq 3^x - 8 \leq 1, \\ -1 \leq 11^x - 120 \leq 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 \leq 3^x \leq 9, \\ 119 \leq 11^x \leq 121. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Оказывается, что уравнение существует в единственной точке. Проверим, является ли оно в этой точке тождеством, т. е. является ли $x = 2$ его решением. Подставляем $x = 2$ в уравнение:

$$\begin{aligned} 2\arcsin(3^2 - 8) - 3\arccos(11^2 - 120) &= \\ &= \frac{2\pi}{2} \Leftrightarrow \pi - 0 \equiv \pi. \end{aligned}$$

Ответ. 2.

Пример 6. (МГУ, 2002, мехмат)
Найти все значения параметра a , при каждом из которых сумма арктангенсов корней уравнения

$$x^2 + (1 - 2a)x + a - 4 = 0$$

больше, чем $\frac{\pi}{4}$.

Решение.

Дискриминант уравнения

$$\begin{aligned} D &= (1 - 2a)^2 - 4a + 16 = 4a^2 - 8a + 17 > 0, \\ a &\in (-\infty; +\infty). \end{aligned}$$

Поэтому уравнение имеет два разных корня. По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = 2a - 1, \quad x_1 x_2 = a - 4.$$

Для любых x_1, x_2 имеем

$$-\frac{\pi}{2} < \arctg x_1 < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \arctg x_2 < \frac{\pi}{2}.$$

По условию, $\arctg x_1 + \arctg x_2 > \frac{\pi}{4}$,

отсюда следует, что $\frac{\pi}{4} < \arctg x_1 + \arctg x_2 < \pi$ и существует котангенс суммы $(\arctg x_1 + \arctg x_2)$. Кроме того, на этом промежутке

$$\begin{aligned} \arctg x_1 > -\arctg x_2 &\Rightarrow \operatorname{tg} \arctg x_1 > \\ > -\operatorname{tg} \arctg x_2 &\Rightarrow x_1 + x_2 = 2a - 1 > 0. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}(\arctg x_1 + \arctg x_2) &= \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg}(\arctg x_1) \operatorname{tg}(\arctg x_2)}{\operatorname{tg}(\arctg x_1) + \operatorname{tg}(\arctg x_2)} = \\ &= \frac{1 - x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{1 - (a - 4)}{2a - 1} = \\ &= \frac{5 - a}{2a - 1} < 1 \Leftrightarrow \frac{3a - 6}{2a - 1} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a > 2, \text{ т.к. } 2a - 1 > 0. \end{aligned}$$

Ответ. $a \in (2; +\infty)$.

Пример 7. (МФТИ, 2002) Решите уравнение

$$\arctg \frac{2x-1}{x} + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. В примерах такого вида лучше перенести $\arcsin x$ в правую часть, чтобы удобнее вычислять значения тригонометрических функций левой и правой частей:

$$\arctg \frac{2x-1}{x} + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arctg \frac{2x-1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ |x| \leq 1, \\ -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \arcsin x < \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} \arctg \frac{2x-1}{x} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x \right). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ |x| \leq 1, \\ \arcsin x > 0, \\ \frac{2x-1}{x} = \operatorname{ctg} \arcsin x \equiv \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 1, \\ x \neq 0, \\ \arcsin x > 0, \\ 2x-1 = \sqrt{1-x^2}. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}.$$

Ответ. $\frac{4}{5}$.

Пример 8. (МГУ, 2003, мехмат) Найти все значения параметра α , при каждом из которых уравнение $\sin \arccos(5x) = \alpha + \arcsin \sin(7x-3)$ имеет единственное решение.

Решение. Для упрощения уравнения выразим $\arcsin \sin(7x-3)$ через x . Заметим, что

$$-1 \leq 5x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-0,2; 0,2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x-3 \in [-4,4; -1,6] \Rightarrow$$

$$\pi + (7x-3) \in [\pi-4,4; \pi-1,6] \subset \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Так как $\sin(\pi + (7x-3)) = -\sin(7x-3)$,

то $\sin(7x-3) = -\sin(\pi + (7x-3))$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad \arcsin \sin(7x-3) &= \\ &= \arcsin(-\sin(\pi + (7x-3))) = \\ &= -\arcsin \sin(\pi + 7x-3) = 3-7x-\pi. \end{aligned}$$

Так как $\arccos 5x \in [0; \pi]$,

$$\begin{aligned} \text{то} \quad \sin \arccos 5x &= \sqrt{1-\cos^2(\arccos 5x)} = \\ &= \sqrt{1-(5x)^2}. \end{aligned}$$

Теперь можно переписать уравнение $\sin \arccos(5x) = \alpha + \arcsin \sin(7x-3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-(5x)^2} = \alpha - \pi - 7x + 3.$$

Решим его с помощью замены переменных: $5x = t$. Тогда уравнение примет вид

$$\sqrt{1-t^2} = \alpha - \pi + 3 - \frac{7}{5}t.$$

Исследуем решение этого уравнения графически. График левой части – полуокружность $y = \sqrt{1-t^2}$, а график правой части – всевозможные параллельные прямые $y = \alpha - \pi + 3 - \frac{7}{5}t$.

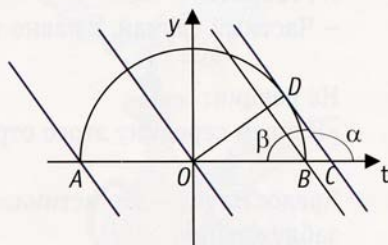


Рис.21

Как видно из рис.21, условию задачи удовлетворяют лишь те прямые, которые пересекают полуокружность один раз (синие). Первая из таких прямых проходит через точку $A(-1;0)$, для неё:

$$\alpha - \pi + 3 - \frac{7}{5} \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pi - \frac{22}{5},$$

и так до прямой, проходящей через точку $B(1;0)$. Сама прямая уже не подходит. Для неё

$$\alpha - \pi + 3 - \frac{7}{5} \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pi - \frac{8}{5}.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют $\alpha \in \left[\pi - \frac{22}{5}; \pi - \frac{8}{5} \right)$.

Кроме того, один раз пересекает полуокружность касательная, тангенс угла наклона которой к оси Ox равен $-\frac{7}{5}$:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{7}{5}.$$

$$\text{Тогда } \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{7}{\sqrt{74}} \Rightarrow OC = \frac{1 \cdot \sqrt{74}}{7},$$

поэтому точка C имеет координаты $\left(\frac{\sqrt{74}}{7}; 0 \right)$.

Найдём теперь α , при которых прямая $y = \alpha - \pi + 3 - \frac{7}{5}t$ проходит через точку

C (значит, является касательной, т. к. перпендикулярна радиусу OD):

$$\alpha - \pi + 3 - \frac{7}{5} \cdot \frac{\sqrt{74}}{7} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \pi + 3 + \frac{\sqrt{74}}{5}.$$

$$\text{Ответ. } \left[\pi - \frac{22}{5}; \pi - \frac{8}{5} \right), \pi + 3 + \frac{\sqrt{74}}{5}.$$