Лукьянов Андрей Александрович
Кандидат физико-математических наук, доцент, сотрудник лаборатории МФТИ по работе с одарёнными детьми.

Об одной знаменитой задаче и о вариациях на её тему

Рассказано о знаменитой задаче кинематики, в которой между двумя движущимися навстречу друг другу телами движется туда–обратно третье тело. Оказалось, что очень старая задача-шутка имеет интересные продолжения, о которых раньше автор не знал. Потому что сочинил их сам.

Задачи бывают разные. Самые интересные задачи, разумеется, рождает жизнь – реальные жизненные ситуации, наблюдения за случившимся в эксперименте. В общем, что-то невыдуманное.

Бывают, однако, и другие задачи – вроде бы выдуманные, – но с такой изюминкой, что нравятся многим. А если они ещё и легко запоминаются, то передаются потом, что называется, из одного поколения в другое, не старея.

Сегодня – как раз о такой задачке. Она по силам школьникам младших классов. Чтобы её решить, достаточно самых элементарных представлений о том, что такое скорость движения и пройденный путь.

Конечно, и эту задачу можно усложнить. И тогда над её решением попыхтит и старшеклассник, а может, и человек с высшим образованием. (Кстати, иногда образованность мешает: начинаешь искать слишком сложные пути решения.)

Исходную задачу автор узнал больше 40 лет назад, – ещё студентом Московского университета. Её рассказали автору как шутку. Так он её много лет и воспринимал, пока в одном из современных задачников не обнаружил любопытное усложнение задачи. Усложнение – на ровном месте.

Это раззадорило автора решить такой усложненный вариант задачи (и даже исправить ответ в задачнике). Но пришлось попыхтеть. По ходу пришлось придумать некую правдоподобную, гипотезу. Её удалось доказать. А потом, присмотревшись к ответу в сложном решении, автор нашёл простое «этюдное» решение. Тут же возникли всякие вариации на тему этой (усложнённой) задачи и даже исходной (простой). С ними автор и хотел бы познакомить читателя.

Исходная задача. **Задача 1**. Два велосипедиста, находившиеся на расстоянии s= 10 км друг от друга, едут по прямой навстречу друг другу со скоростью υ= 20 км/ч каждый. В начальный момент движения от одного из них отлетает ласточка и принимается летать со скоростью v= 100 км/ч вперёд и назад между велосипедистами вплоть до момента их встречи. Какое расстояние S успеет налетать ласточка до этого момента?

Решение.

$$S = V \cdot T = V \cdot \frac{s}{\upsilon + \upsilon} = 25 \text{ км}. \quad (1)$$

Рассказывают [1], что один из выдающихся математиков современности Джон фон Нейман, когда ему предложили эту задачу, задумался лишь на миг и сказал: «*Конечно, 25 км*!» Приятель спросил его: «*Как Вам удалось так быстро получить ответ?*». «*Я просуммировал ряд*», – ответил математик. (Для неискушенного в математике читателя поясним: ласточке придется сделать бесконечно много разворотов. Так что, сумма путей «туда» и «обратно» будет содержать бесконечное число слагаемых. Такие *суммы с бесконечным числом слагаемых* в математике называют *рядами*.)

Усложнение. Задача 2. (Всероссийская олимпиада школьников по физике. Региональный этап. 2019. 7 класс) Велосипедист выезжает из пункта A и едет со скоростью υ = 20 км/ч по прямой в пункт B, находящийся на расстоянии s = 10 км. В момент старта велосипедиста **из п. B в сторону велосипедиста** вылетает ласточка и принимается летать со скоростью V = 100 км/ч вперёд и назад между велосипедистом и п. B вплоть до момента прибытия последнего в этот пункт.

Какой путь больше – тот, который пролетела ласточка, двигаясь по направлению от B к A, $S_{\uparrow}$, или в обратном направлении, $S_{\downarrow}$? На какой из этих путей ласточка истратила больше времени и на сколько? Определить оба пути и оба промежутка времени.

Решение.

$$S_{\uparrow} = s_1 + s_3 + s_5 + \ldots \quad (1),$$

$$S_{\downarrow} = s_2 + s_4 + s_6 + \ldots \quad (2)$$

(см. рис. 1).

Заметим, что слагаемые в суммах (1) и (2) попарно равны друг другу: $s_1 = s_2$, $s_3 = s_4$, $s_5 = s_6$ … (ласточка пролетела путь от п. B до велосипедиста, а потом – путь назад в п. B; причём так много-много раз)

В итоге, суммы (1) и (2) равны друг другу $S_{\uparrow} = S_{\downarrow} = \frac{1}{2} V \frac{s}{\upsilon}$ = 25 км, $T_{\uparrow} = T_{\downarrow} = \frac{1}{2}\frac{s}{\upsilon}$ = 0,25 ч = 15 мин.

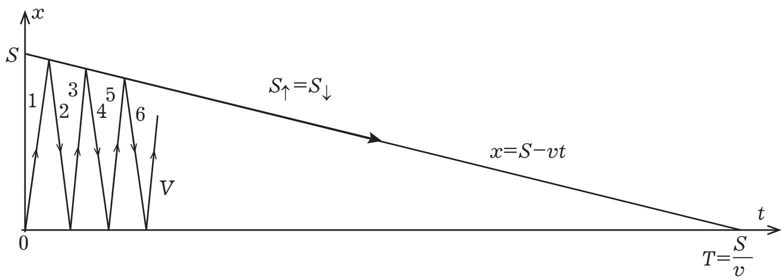


Рис.1

Дальнейшее усложнение исходной задачи. **Задача 3**. Велосипедист выезжает из пункта A и едет со скоростью υ = 20 км/ч по прямой в пункт B, находящийся на расстоянии s = 10 км. В начальный момент движения **от велосипедиста** отлетает ласточка и принимается летать со скоростью V = 100 км/ч вперёд и назад между велосипедистом и п. B вплоть до момента прибытия велосипедиста в этот пункт. Какой путь больше – тот, S_1, который пролетела ласточка, двигаясь по направлению от A к B или в обратном направлении, S_2, и на сколько больше? На какой из этих путей ласточка потратила больше времени и на сколько? Определить оба эти пути и оба промежутка времени.

Решение.

$$S_{\downarrow} \equiv S_1 = s_1 + s_3 + s_5 + s_7 + ... \quad (1),$$

$$S_{\uparrow} \equiv S_2 = s_2 + s_4 + s_6 + ... \, (2)$$

(см. рис.2). $s_1 = s$ (путь, который пролетела ласточка от только что стартовавшего велосипедиста до п. B), $s_2 = s_3$, $s_4 = s_5$, $s_6 = s_7$, ... (ласточка пролетела путь от п. B до велосипедиста, а потом пролетела путь назад в п. B; причём так много-много раз).

В итоге, в сумме (1) первое слагаемое равно s (расстоянию между пунктами A и B), а сумма остальных

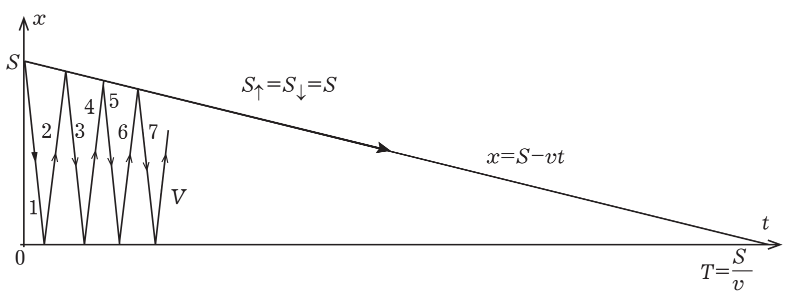


Рис.2

слагаемых в точности равна сумме в (2), т.е. $S_1 - S_2 = s$, или $VT_1 - VT_2 = s$, , или еще иначе

$$T_1 - T_2 = \frac{s}{V}. \qquad (3)$$

Сумма времён T_1 и T_2 даёт время движения велосипедиста от п. A до п. B:

$$T_1 + T_2 = \frac{s}{\upsilon} \qquad (4),$$

которое, разумеется, совпадает с полным временем движения ласточки.

Решая систему уравнений (3-4), находим:

$$T_1 = \frac{V+\upsilon}{2V} \cdot \frac{s}{\upsilon} = 0{,}3 \text{ ч} \qquad (5)$$

$$\text{и} \quad T_2 = \frac{V-\upsilon}{2V} \cdot \frac{s}{\upsilon} = 0{,}2 \text{ ч} \qquad (6)$$

$$S_1 = \frac{V+\upsilon}{2} \cdot \frac{s}{\upsilon} = 30 \text{ км}, \qquad (7)$$

$$\text{и} \quad S_2 = \frac{V-\upsilon}{2} \cdot \frac{s}{\upsilon} = 20 \text{ км}. \qquad (8)$$

Обобщение предыдущей задачи.

Задача 4. (Всероссийская олимпиада школьников по физике. Региональный этап. 2019. 8 класс) Велосипедист выезжает из пункта A и едет со скоростью υ= 20 км/ч по прямой в пункт B, находящийся на расстоянии s= 10 км. В начальный момент движения от велосипедиста отлетает ласточка и принимается летать вперед и назад между велосипедистом и п. B вплоть до момента прибытия велосипедиста в этот пункт. Из-за того, что на маршруте дует ветер, скорость ласточки при её движении от A к B оказывается равна V_1 = 90 км/ч, а при движении от B к A V_2 = 60 км/ч. Какое расстояние S успеет налетать ласточка до момента прибытия велосипедиста в п. B? (Именно эту задачу нашел автор в современном задачнике; она и раззадорила автора.)

Решение. Аналогично предыдущей задаче $S_1 - S_2 = s$ (см. рис.3), или

$$V_1T_1 - V_2T_2 = s, \qquad (1)$$

$$T_1 + T_2 = \frac{s}{\upsilon}. \qquad (2)$$

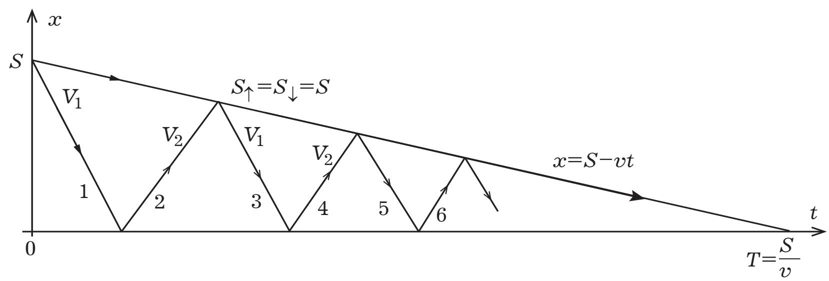


Рис.3

Решая систему (1-2), находим

$$T_1 = \frac{V_2+\upsilon}{V_1+V_2} \cdot \frac{s}{\upsilon} = \frac{4}{15} \approx 0{,}27 \text{ ч}, \qquad (3)$$

$$T_2 = \frac{V_1-\upsilon}{V_1+V_2} \cdot \frac{s}{\upsilon} = \frac{7}{30} \approx 0{,}23 \text{ ч}. \qquad (4)$$

$$S = V_1T_1 + V_2T_2 = \left(V_1\frac{V_2+\upsilon}{V_1+V_2} + V_2\frac{V_1-\upsilon}{V_1+V_2}\right) \cdot \frac{s}{\upsilon} \qquad (5)$$

$$= 24 \text{ км} + 14 \text{ км} = 38 \text{ км}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РАССМОТРЕНИЯ

1. Велосипедист выезжает из пункта А и едет со скоростью υ= =20 км/ч по прямой в пункт *B*, находящийся на расстоянии s = 10 км. В момент старта велосипедиста **из п. В в сторону велосипедиста** вылетает ласточка и принимается летать вперёд и назад между велосипедистом и п. *B* вплоть до момента прибытия велосипедиста в этот пункт. Из-за того, что на маршруте дует ветер, скорость ласточки при её движении от *A* к *B* равна V_1 = 100 км/ч, а при движении от *B* к *A* V_2 = 60 км/ч. Определить среднюю скорость ласточки.

Ответ: 75 км/ч.

2. Мотоциклист и велосипедист одновременно выезжают – первый из пункта *A* и едет по прямой в пункт *B*, а второй – из *B* в *A*. Расстояние между *A* и *B* равно s = 30 км, скорости мотоциклиста и велосипедиста υ_1 = 40 км/ч и υ_2 =20 км/ч, соответственно. В начальный момент движения от мотоциклиста отлетает ласточка и принимается летать вперёд и назад между мотоциклистом и велосипедистом вплоть до момента их встречи. Из-за того, что на маршруте дует ветер, скорость ласточки при её движении от *A* к *B* равна V_1 = 100 км/ч, а при движении от *B* к *A* равна V_2 = 60 км/ч. Какое расстояние S успеет налетать ласточка до момента прибытия велосипедиста в п. *B*? **Рекомендация**. Чтобы свести задачу к задаче 4, перейдите в систему отсчёта, в которой, например, велосипедист покоится.

Ответ: 42,5 км (**не** 45 км!).

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Смаллиан Р***. Как же называется эта книга? – М.: Мир, 1981. – 238 с. (№ 212).

Вопросы на понимание и легкие задачи по физике 1. Кинематика

Рассмотрено несколько нетрудных задач ***по кинематике равномерного и кусочно-равномерного движения***, некоторые из которых можно отнести к вопросам на понимание. Опыт показывает, что учащиеся часто делают ошибки не в трудных задачах, а именно в лёгких, иногда просто потому, что не знают определений используемых величин. В дальнейшем предполагается рассмотрение лёгких вопросов и задач из других разделов физики.

1. Лучшие спортсмены мира пробегают 100 м примерно за 10 с. Выразить эту скорость в км/ч.

Решение.

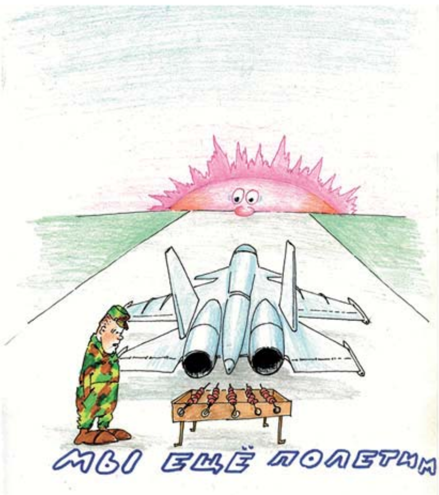
$$v=\frac{100\text{м}}{10\text{с}}=10\frac{\text{м}}{\text{с}}=10\cdot\frac{(1/1000)\text{км}}{(1/3600)\text{ч}}=$$

$$=10\cdot 3{,}6\,\text{км}/\text{ч}=36\,\text{км}/\text{ч}.$$

Скорость в метрах в секунду связана с этой же скоростью в километрах в час множителем «3,6»:

$$v\,(\text{м/с}) = 3{,}6\times v\,(\text{км/ч}).$$

Как запомнить, надо ли умножать на 3,6 или делить на него? – Автору в своё время помогло: он легко запомнил, что скорость в километрах в час численно больше, чем та же скорость в метрах в секунду: скорость 36 км/ч кажется больше, чем 10 м/с. В связи с этой задачей автору всегда вспоминается известный мультфильм, в котором измеренный в попугаях удав казался длиннее, чем он же, измеренный в мартышках.



2. Самые быстрые самолёты развивают скорость в «три Маха», т.е. скорость в 3 раза бо**о**льшую, чем скорость звука в воздухе. Выразить эту скорость в км/с и в км/ч.

Ответ: $v_{\text{зв}} \approx 330$ м/с $\approx (1/3)$ км/с, $3v_{\text{зв}} \approx 1$ км/с $= 3600$ км/ч.

3. Первая космическая скорость (скорость, с которой вращаются по околоземной орбите космические корабли) $\approx 7{,}9$ км/с. А) Во сколько раз она больше скорости самых быстрых самолетов? Б) Сколько времени потребовалось бы космическому кораблю, чтобы преодолеть путь, равный «диаметру» Москвы (около 30 км)?

Ответ: А) примерно в 8 раз. Б) менее 4-х секунд.

4. Человек поднимался в гору со скоростью 1 км/ч, а вниз спускался со скоростью 9 км/ч (фактически, сбегал с горы). Какой была средняя путевая скорость человека?

Решение. Это – очень простая задача. К сожалению, большинству учащихся она кажется ещё проще, чем на самом деле, и поэтому примерно 90% из них решают её не правильно. Неправильное решение состоит, обычно, в том, что берут полусумму скоростей:

$$(9+1)/2 = 5\text{ км/ч}.$$

Увы, слишком многие школьники никакой другой *средней* скорости, кроме средней арифметической, признавать не желают! Между тем, задача просто *на определение* того, *что называют* средней (путевой!) скоростью. Имеем:

$$v_{cp}=\frac{s}{t}=\frac{s}{t_1+t_2}=\frac{s}{\dfrac{s/2}{v_1}+\dfrac{s/2}{v_2}}=$$

$$=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}=1{,}8\,\text{км}/\text{ч}.$$

Отличие от неправильного значения (5 км/ч) более чем в 2,5 раза! Примерно, как между «двойкой» и «пятеркой» на экзамене.

Даже после объяснения задачи решение оставляет впечатление обмана или фокуса. Ну, а в каком же случае средняя скорость будет равна половине суммы скоростей «(9+1)/2 = =5 км/ч»? В случае следующей задачи, где речь идет не о половине *пути*, а о половине *времени*.

5. Человек половину времени двигался со скоростью 1 км/ч, в другую половину – со скоростью 9 км/ч. Определить среднюю скорость человека за всё время движения.

Решение.

$$v_{cp} = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2}{t} = \frac{v_1 \frac{t}{2} + v_2 \frac{t}{2}}{t} =$$

$$= \frac{v_1 + v_2}{2} = 5 \text{ км / ч}.$$

Замечание. Полусумма скоростей $(v_1+v_2)/2$ может встречается еще в одном важном случае – в случае *равноускоренного* движения!

6. Автомобиль 20% пути (p_1 = =0,2) ехал со скоростью v_1 = 80 км/ч, а оставшийся путь – со скоростью v_2 = 20 км/ч. Какую долю q_1 общего времени автомобиль двигался со скоростью v_1 = 80 км/ч?

Решение.

$$q_1 = \frac{t_1}{t_1 + t_2} = \frac{p_1 s / v_1}{p_1 s / v_1 + (1 - p_1) s / v_2} =$$

$$= \frac{p_1 v_2}{p_1 v_2 + (1 - p_1) v_1} = \frac{1}{17} \approx 0{,}059 (\approx 6\%).$$

7. 80% (p_1 = 0,8) пути автомобиль ехал со скоростью v_1 = 80 км/ч, а оставшийся путь – со скоростью v_2 = 20 км/ч. Какую долю q_1 общего времени автомобиль двигался со скоростью v_1 = 80 км/ч?

Ответ. q_1 = 0,5 (50%).

8. Автомобиль 20% времени (q_1 = = 0,2) ехал со скоростью v_1, равной 80 км/ч, а оставшееся время – со скоростью v_2 = 20 км/ч. Какую долю p_1 пути автомобиль двигался со скоростью v_1 = 80 км/ч?

Решение.

$$p_1 = \frac{s_1}{s_1 + s_2} = \frac{v_1 \cdot q_1 t}{v_1 \cdot q_1 t + v_2 \cdot (1 - q_1) t} =$$

$$= \frac{v_1 \cdot q_1}{v_1 \cdot q_1 + v_2 \cdot (1 - q_1)} = 0{,}5 \text{ (т.е. } 50\%).$$

9. Автомобиль 80% времени (q_1 = 0,8) ехал со скоростью v_1 = 80 км/ч, а оставшееся время – со скоростью v_2 = 20 км/ч. Какую долю p_1 пути автомобиль двигался со скоростью v_1 = 80 км/ч?

Ответ. $p_1 \approx 0{,}94$ (т.е. 94%).

10. Тело за каждую секунду проходит путь 1 м. Почему такое движение совсем не обязательно равномерное? Приведите контрпример.

Решение. Представьте себе, что тело периодически сначала 0,5 с движется со скоростью 2 м/с, а затем 0,5 с покоится, потом снова 0,5 с движется со скоростью 2 м/с и снова 0,5 с покоится и т.д.. Постройте график функции $v(t)$ и вспомните, что пройденный путь численно равен площади под графиком функции; (см. рис.).

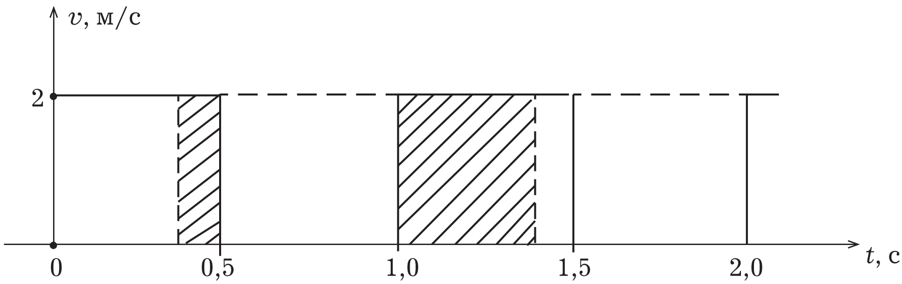


Рис. 1

Возьмите *любой* интервал в 1 с (пусть его начало будет где угодно – где-то в интервале, в котором тело двигалось или покоилось, – безразлично где!) и посмотрите, какой будет площадь под графиком функции $v(t)$. Эта площадь будет одной и той же.

Чем запутали читателя составители задачи? – В определении равномерного движения речь идет *не о секунде*, даже – *не о любой* секунде: **при равномерном движении тело *за любые равные промежутки* времени испытывает равные перемещения** (в частности – **проходит равные пути**). На графике видно, что **не за любые** *полсекунды* (или четверть секунды) тело проходит равные пути: путь, пройденный телом за первые полсекунды равен 2 м/с× ×0,5 с = = 1 м; за следующие полсекунды пройденный путь равен 0 м/с×0,5 с = =0 м – ноль метров!

11. Сравните пути, пройденные телом а) за полторы секунду от 0 до 1,5 с и б) за полторы секунды от 0,5 с до 2 с.

Ответ: 2 м и 1 м соответственно.

В следующих номерах журнала мы продолжим разговор о простых задачах и вопросах на понимание уже в других разделах физики.