Лукьянов Андрей Александрович
Кандидат физико-математических наук, доцент, сотрудник лаборатории по работе с одарёнными детьми МФТИ.

О значащих цифрах в числах, об округлении чисел и погрешностях в измерениях

Рассмотрены важные в экспериментальной физике вопросы о значащих цифрах в числах, о правилах округления чисел, о записи значений величин, полученных в эксперименте. Обсуждаются методы оценки погрешностей величин, которые прямо в опыте не измеряются, но вычисляются через величины, измеренные прямо.

Настоящая статья – ещё один рассказ о работе Олимпиадной школы при МФТИ по курсу «Экспериментальная физика» (сайт Школы http://edu-homelab.ru/), в которой автор вёл занятия с восьмиклассниками. Рассмотренные в статье вопросы никогда не были темой отдельного занятия в нашей Школе, но практически все были предметом рассмотрения на каком-нибудь из занятий. Цель настоящей статьи – систематизировать эти знания.

С вопросами о значащих цифрах в числах и округлении чисел учащиеся нашей Школы сталкивались ещё в тестах, которые давались им при поступлении в Школу.

Тест для приёма в 8 класс (2017)

Сколько значащих цифр в числе?	Округлить до 2-х значащих цифр
23,04	1349 ≈
0,002304	1361 ≈
0,00230	1251 ≈
0,0023	1350 ≈
23,0	1250 ≈
230	1050 ≈

Решения задач теста (подробнее см. ниже)

Сколько значащих цифр?	**Округлить до 2-х значащих цифр**
23, 04 – 4 знач. ц.	1349 ≈ 1300 (не 13! Увы, и такое писали)
0,00**2304** – 4 знач. ц.	13**6**1 ≈ 1400
0,00**230** – 3 знач. ц.	125**1** ≈ 1300
0,00**23** – 2 знач. ц.	1**3**50 ≈ 1400 («**3**» – **нечёт**.)
23, 0 – 3 знач. ц.	1**2**50 ≈ 1200 («**2**» – **чёт**.)
230 – 2 или 3 знач. ц.	1**0**50 ≈ 1000 («**0**» – **чёт**.)

Если число 230 получено от округления, например числа 231, то 2 знач. цифры (**23**0); если число 230 получено от округления, например числа 230,2, то 3 знач. цифры (**230**)

1. О количестве значащих цифр в числах и об округлении чисел

В жизни, в быту, в эксперименте мы редко имеем дело с точно определёнными числами. Разумеется, бывают случаи, когда, например, столкнулись ровно два автомобиля (не два с половиной). Очень небольшое их число – всего два. Не будем говорить о числе звёзд на небе или числе молекул в капле воды. Но попробуйте подсчитать число людей в толпе, количество пчёл в улье, число рыб в аквариуме или количество воробьёв на кусте, – и вы поймёте, что даже целые числа мы порой знаем не очень точно. Если воробьев на кусте было немного и они (мы это сами видели) не перелетали с куста на куст, мы можем с уверенностью сказать, что их число было точно 9 или точно 11. Количество значащих цифр в первом числе равно 1, а во втором 2.

Если же воробьев станет больше или они начнут сновать туда-сюда, пересчитать их будет труднее. Мы можем ограничиться приближённой оценкой, например сказать, что число воробьёв было приблизительно 10. Не точно 10. Может, 8 или 9, а может, и 11 или 12. В данном случае в числе «10» мы не уверены в последнем нуле. Написали мы его, впрочем, сознательно, – для того, чтобы подчеркнуть порядок величины: это был не один воробей, но и не 100. Говорят, что в числе «10» в этом случае лишь одна значащая цифра «1».

В физике не часто имеют дело с целыми числами, – большинство чисел дробные. Оказалось удобным работать с десятичной формой представления дробей, а не с обыкновенными дробями. Дело в том, что обыкновенные дроби труднее сравнивать друг с другом. Например, какое из чисел больше: $\frac{25}{33}$ или $\frac{131}{173}$? «На глаз» сразу не скажешь. Между тем, достаточно беглого взгляда на десятичные представления дробей, 0,757**5**... и 0,757**2**25433..., чтобы понять, что первое число больше.

Первая дробь – это бесконечная десятичная дробь 0,757**5**... = 0,(75) с периодом «75». Вторая дробь – тоже бесконечная периодическая, хотя из первых девяти цифр после запятой этого ещё не видно. Дело в том, что «период» второй дроби содержит аж 43 цифры! – «7572254335260115606936416184971098265895953». При измерениях (даже самых точных) физики никогда не имеют дело с такими длиннющими дробями просто потому, что с такой точностью никакие величины в физике не измеряются. Автору известны лишь две физические величины, **измеренные** с почти неправдоподобной, но всё же не с такой точностью.

Первая из них – показатель степени в «законе обратных квадратов». Известно, что точечные заряженные тела притягиваются или отталкиваются (в зависимости от знака зарядов) с силой, которая обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами: $F \propto \dfrac{1}{r^2}$. Возникает вопрос: «А в точности ли показатель степени равен двум?» (Оказывается, для физики это – принципиально важный вопрос.) Экспериментально исследовалось, какой может быть поправка к закону обратных квадратов, $F \propto \dfrac{1}{r^{2+\alpha}}$. В настоящее время **экспериментально доказано**, что эта поправка $|\alpha| < 10^{-16}$ [1].

Второе известное автору сверхточно **измеренное** число – разность модуля заряда электрона $|e_-|$ и заряда протона e_+. **Экспериментально установлено**, что эти две величины равны друг другу с относительной точностью не ниже 10^{-21}: $\dfrac{|e_+ - |e_-||}{e_\pm} < 10^{-21}$ [1]. Кстати, порознь величины $|e_-|$ и e_+ с такой точностью не определены.

Для школьных целей часто достаточно точности $|e_-| \cong e_+ \equiv e \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, т.е. хватает двух значащих цифр. Иногда требуется повышенная точность $e \approx 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл. Но это всё равно очень далеко от бесконечного числа цифр, например, в числах $\pi = 3{,}141592654\ldots$ или $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$, или просто в дроби 1/7 = = 0,142857142857...= 0,(142857). Число $e \approx 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл содержит всего 8 значащих цифр. Не семь! Увы, школьники часто **путают** *значащие* цифры в числах и цифры, *стоящие после запятой*. Это не одно и то же!

Приведём несколько простых примеров из книги Я.И. Перельмана [2]

Приближённые числа

«Пусть требуется вычислить площадь прямоугольного участка, длина которого 68 м, а ширина 42 метра. Если бы числа 68 и 42 были точные, площадь участка в точности равнялась бы

$$68 \times 42 = 2856 \text{ м}^2.$$

Но числа 68 и 42 не точные, а приближённые: в длине не ровно 68 м, а немного больше и или меньше. Мы можем выразить длину участка в метрах так: 68,?

Подобным же образом и ширину участка выразим как 42,?

Проделаем теперь умножение приближённых чисел: 68,?×42,?

Выполнение действий видно из следующей схемы:

```
       6 8,?
   ×   4 2,?
      ------
       ? ? ?
     1 3 6 ?
   2 7 2 ?
   ---------
   2 8 5 ?, ??
```

Мы видим, что четвёртая цифра результата нам не известна; она должна получаться от сложения трёх цифр (? + 6 + ?), из которых две не известны.

Недостоверна также и третья цифра результата: мы написали 5, но ведь от сложения столбца ? + 6 + ?

могло получиться число, большее 10 и даже 20; значит вместо 5 может оказаться 6 или 7.

Вполне надежны только две первые цифры результата (28). Поэтому, желая быть добросовестными, мы должны утверждать лишь, что искомая площадь заключает около 28 сотен квадратных метров. Каковы цифры десятков и единиц в числе квадратных метров, нам не известно.

Итак, правильный ответ в задаче: 2800. Причём, ноли здесь означают не заведомое отсутствие единиц в соответствующих разрядах, а лишь отсутствие достоверных знаний о них. Иначе говоря, ноли означают здесь то же, что означают вопросительные знаки в предыдущих обозначениях.

Ошибочно думать, что ответ 2856, полученный по правилам арифметики точных чисел, вернее ответа 2800. Ничуть – ведь мы видели, что последние две цифры (56) доверия не заслуживают: поручиться за них нельзя. Ответ 2800 предпочтительнее, чем 2856, потому что он не вводит заблуждение; он прямо утверждает, что достоверны лишь цифры 2 и 8 на месте тысяч и сотен, а какие цифры идут дальше, не известно. Ответ же 2856 обманчив: он внушает неверную мысль, будто последние цифры столь же надёжны, как первые две.

«*Нечестно писать больше цифр, чем столько, за сколько мы можем поручиться*». (Перри)

Л.А.А.: **Правила округления чисел** продемонстрируем на примере задач теста для приема в нашу Школу (см. в начале статьи).

1. 13**4**9 ≈ 1300: Если первая слева из отбрасываемых цифр («4») меньше 5, то оставляемые цифры не изменяются.

2. 13**6**1 ≈ 1400: Если первая слева из отбрасываемых цифр («6») больше 5, то к последней оставляемой цифре («3») прибавляют 1.

3. 125**1** ≈ 1300: Если первая слева из отбрасываемых цифр равна 5 и среди остальных отбрасываемых цифр имеются ненулевые («1»), то к последней сохраняемой цифре прибавляется 1.

4.1 1**3**50 ≈ 1400: Если первая слева из отбрасываемых цифр равна 5 и все остальные равны нулю, то последняя оставляемая цифра увеличивается на 1, если она **нечётная** («3»).

4.2 1**2**50 ≈ 1200: Если первая слева из отбрасываемых цифр равна 5 и все остальные равны нулю, то последняя оставляемая цифра не изменяется, если она **чётная** («2»).

4.3 1**0**50 ≈ 1000: Ноль – **чётное** число.

Правило 4.1 – 4.3 носит название «**правила чётной цифры**». Вместо него могло быть принято и «правило нечётной цифры». О каком-то из этих двух правил нужно было в своё время условиться. Это чрезвычайно важно, когда производится очень большое число округлений, например в банковском деле.

Цифры значащие и незначащие [2]

«Под значащими цифрами в учении о приближённых вычислениях разумеют все цифры, кроме ноля, а также ноль в том случае, если он стоит между другими значащими цифрами. Например, в числах 37**00** и **0, 00**62 все ноли – **незначащие**; в числах 1**0**5 и 2**00**6 ноли **значащие**; в числе 0,0708 первые два ноля – незначащие, третий же ноль – значащая цифра.

В некоторых случаях значащий ноль может стоять и в конце числа. Округляя, например, число 2,5400002, мы получаем число 2,54**000**, в котором **все ноли на конце – значащие**, так как указывают на заведомое отсутствие единиц в соответствующих разрядах. Поэтому, если в условии задачи или в таблице вы встречаете 4,0 или 0,80, то должны рассматривать их как двузначные.

Округляя число 289,**9** до 29**0**, мы также получаем на конце **значащий ноль**.»

Л.А.А.: В тесте в начале статьи на вопрос о числе значащих цифр в числе 230 мы сказали осторожно: 2 или 3 значащие цифры. Если число 230 получено от округления, например, числа 231, то 2 значащие цифры (**23**0); если число 230 получено от округления, например, числа 230,2, то 3 значащие цифры (**230**).

Л.А.А.: Рассмотрим разные приближённые значения ускорения свободного падения вблизи поверхности Земли: 1) $g \approx 9{,}81$ м/с^2; 2) $g \approx 9{,}8$ м/с^2; 3) $g \approx 10$ м/с^2. Сколько значащих цифр в этих числах? Ответ: в первом – три, во втором – две, **в третьем – тоже две! Не одна!** Нуль в числе $g \approx 10$ м/с^2 подчеркивает, что число единиц **не** 1, **не** 2, **не** 3,... – именно ноль. Значение $g \approx \mathbf{10}$ м/с^2 получено **не** в результате округления чисел 1**1** или 1**4**. Ноль это показывает. Он – значащая цифра в числе.

Сложение и вычитание приближённых чисел [2]

«Результат сложения или вычитания приближённых чисел не должен оканчиваться значащими цифрами в тех разрядах, *которые отсутствуют хотя бы в одном числе*. Если такие цифры получились, их следует отбросить посредством округления. Например, 34**00** + 275 ≈ 37**00** (**не** 3675). В числе 3400 измеряющий, очевидно, пренебрёг десятками (на это указывают ноли в конце числа). Поэтому и в сумме мы тоже пишем ноли (могли бы написать вопросительные знаки), т.к. не знаем этих цифр.»

Умножение, деление и возведение в степень приближённых чисел [2]

«Результат умножения, а также деления чисел не должен заключать больше значащих цифр, чем имеется их в более коротком данном. (Из двух чисел то «короче», которое содержит меньше значащих цифр.) Лишние цифры заменяются нолями. Например, **37** × 245 ≈ **91**00 (**не** 9065).

Число значащих цифр степени приближённого числа не должно превышать числа их в основании степени. Излишние цифры заменяются нолями. Например,

157^2 ≈ 24 6**00** (**не** 24649).»

2. Инструментальная погрешность и погрешности в процессе измерений

Проводя любые измерения, мы вынуждены говорить о погрешностях в измерениях, причем, не просто говорить ***о*** них, но делать конкретные числовые оценки этих погрешностей.

Иногда вместо слов «погрешность измерения» говорят об «ошибках измерений». Есть «борцы за чистоту языка», которые даже настаивают на термине «погрешность». Мы, напротив, **не** будем делать различий между словами «погрешность» и «ошибка» (см. книгу МФТИ [3]), считая, что в обоих случаях речь идет **не** о нелепых измерениях, но о неточности измерений, а неточности, погрешности, ошибки – обязательные спутники любого измерения. Можно сказать, что они – части измерительного процесса.

Простейший и самый наглядный пример измеряемой величины – длина (ширина, высота). Поговорим об измерениях величин на примере измерения длины.

Обычно молчаливо исходят из **предположения**, что имеется **истинная** длина, например ширина стола. Предположим, у нас имеется очень качественная стальная линейка метровой длины. Мы прикладываем её к столу и обнаруживаем, что ширина стола $a_1 = 85{,}1$ см (инженер бы сказал 851 мм). Вы для проверки измеряете ширину крышки ещё раз и с удивлением обнаруживаете, что теперь получилось всего $a_2 = 85{,}0$ см. Здравый смысл подсказывает, что линейка вряд ли изменила свою длину, и расстояние между штрихами на ней тоже, сомнительно, чтобы изменились. (Строго говоря, мы не имеем права рассуждать об изменении длины линейки. Она у нас **по определению** – то с чем сравнивают другие длины.) Изменилась ли за пару минут ширина стола? Сомнительно. Он не резиновый, а деревянный (и не разваливался на глазах). Притом, прикладывали линейку мы к одной и той же грани стола! (Нас бы, разумеется, не очень удивило, если бы две разные грани крышки стола были чуть-чуть разной длины. «Так у нас пилят!» – проворчали бы мы.)

В чём же причина отличия длин $a_1 = 85{,}1$ см и $a_2 = 85{,}0$ см в двух наших измерениях? – **Причин, как минимум, две**. **Первая** из них: любой самый лучший в мире прибор не даёт абсолютно точного значения измеряемой величины. Располагая обычной линейкой (даже хорошей, стальной), мы **не** можем сказать, что ширина стола, например, равнялась 851,1 мм: цена деления линейки 1 мм, о десятых долях миллиметра мы мало что можем сказать. Смотря на шкалу чуть-чуть под разными углами, мы иногда скажем, что край стола ближе к отметке 850 мм ($\leq 850{,}4$ мм), а в другом случае – ближе к 851 мм ($\geq 850{,}6$ мм). Итак, во-первых, имеется **инструментальная погрешность**. Для линейки абсолютная инструментальная погрешность составляет 1 мм. Сами штрихи на шкале линейки могут быть прочерчены с замечательной точностью, но минимальное расстояние между ними (между центрами штрихов) всё равно будет равно 1 мм.

Иногда говорят, что абсолютная погрешность линейки вдвое меньше, т.е. составляет $\Delta a = 0{,}5$ мм, дескать, легко на глаз отличить 850,3 мм ≈ 850 мм от 850,7 мм ≈ 851 мм. Эти две длины отличить, конечно, нетрудно. Но ситуация сложнее вот в каком смысле. Сначала мы с некоторой погрешностью ($\approx$0,5 мм) совмещаем нуль линейки с **одним краем** стола, а затем определяем (с такой же погрешностью ($\approx$0,5 мм)), с каким штрихом на линейке совпал **другой край** стола. Т.е. у нас есть возможность сделать промах дважды. Нужно ли просто складывать 0,5 мм и 0,5 мм (получая 1 мм)? Вопрос не такой простой. Он существенно выходит за рамки школьной программы, и мы его обсуждать в деталях не будем. Скажем лишь, что реально погрешность измерения с учётом определения положений относительно линейки **двух** краев стола

$$\Delta a \approx \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2} = 0{,}5 \cdot \sqrt{2} \approx 0{,}7 \approx 1 \text{ мм}.$$

Вторая возможная причина отличия ширин стола $a_1 =$ 85,1 см и $a_2 = 85{,}0$ см в двух наших измерениях – то, что, как теперь говорят, мы сами «накосячили». «Накосячили» в буквальном смысле: чуть-чуть косо прикладывали линейку к столу. Какой бы хорошей (точной) ни была линейка, её всегда можно косо приложить к измеряемому объекту и получить непонятно что. Не всегда мы делаем это намеренно или по небрежности. Есть масса непредвиденных обстоятельств (например, едва заметные неровности стола, какие-то щербинки на нём).

Зная, что в разных измерениях мы получаем слегка различные значения измеряемой величины, повторные измерения делают сознательно. Пусть проведено n измерений, которые дали значения a_1, a_2, ... , a_n (некоторые, разумеется, могут совпадать). Считается, что к истинному значению измеряемой величины ближе всего будет среднее арифметическое этих величин

$$\overline{a} \equiv \langle a \rangle = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}. \qquad (1)$$

В частном случае однократного измерения $\overline{a} = a_1$.

Почему берут среднее арифметическое, а, например, не среднеквадратичное $\sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$? Здесь начинается серьёзная **теория ошибок**. Притом, именно только начинается! Это сложная наука, основанная на теории вероятностей, причём совсем не в школьном варианте (с высшей математикой). Скороговорками о ней не расскажешь. Поэтому больше мы о втором источнике погрешностей говорить не будем. В вузе об этой науке узнаете в нужном объёме.

Не будем подробно говорить и о третьем источнике – **грубых просмотрах**. Например, край стола совпал со штрихом линейки 85,1 см, а нам показалось, что 86,1 см. Что ж, нужно быть внимательным при измерениях. Но внимательным нужно быть и при анализе полученных данных. Если какое-то отдельно взятое измерение сильно отличается от всех остальных, его лучше считать грубым промахом и выбросить из рассмотрения. Что считать грубым промахом? Вопрос этот совсем не простой. Обсуждение его можно найти в книге [4].

3. Абсолютная и относительная погрешности

Далее мы сосредоточим свое внимание лишь на **инструментальной погрешности**.

Как уже было сказано, в случае измерения, например, ширины стола простой линейкой мы имеем шанс сделать промах дважды – на одном конце стола и на другом.

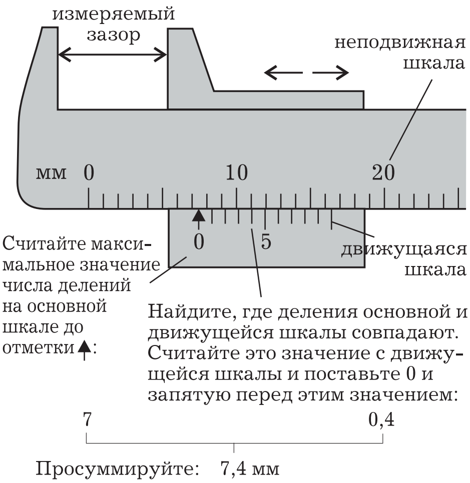

Рис. 1. Из книги [5]

В случае штангенциркуля (см. рис.1) у нас нет необходимости выставлять нуль шкалы на одном из концов, поэтому количество возможных промахов сразу уменьшается вдвое. (Правда, штангенциркулем ширину стола не измеряют!)

В обоих случаях точность измерения ограничена ценой деления – для линейки $\Delta a =$ 1мм, для штангенциркуля чаще всего $\Delta a = 0{,}1$ мм или $\Delta a = 0{,}02$ мм.

Про измеряемую величину a мы можем сказать, что **с большой вероятностью** (не станем давать точного математического определения термина вероятность) она лежит в интервале от $\bar{a} - \Delta a$ до $\bar{a} + \Delta a$. Это записывают в виде $a = \bar{a} \pm \Delta a$. Есть шанс, впрочем, что измеряемая величина может оказаться и вне интервала $(\bar{a} - \Delta a; \bar{a} + \Delta a)$. Каков этот шанс? Совсем не маленький – примерно 3 из 10 (30%). Даже оказаться вне вдвое большего интервала $(\bar{a} - 2\Delta a; \bar{a} + 2\Delta a)$ шансы можно оценить как 5 из 100 (5%).

Величину Δa называют **абсолютной погрешностью** измерения. Она не всегда наглядно показывает, как точно измерена величина. Например, про измерение ширины стола (порядка метра) с погрешностью в миллиметр – (1000 ± 1) мм – можно сказать, что это измерение с неплохой точностью. Но если с такой же погрешностью $\Delta a =$ 1мм измерить диаметр a шарика в подшипнике, например, при $a \approx 2$ мм, то это будет никудышным измерением (может, 1 мм, а может, и 3 мм!). Реально диаметры шариков в подшипниках измеряют значительно точнее, например $(2{,}000 \pm 0{,}001)$ мм, т.е. $\Delta a =$ 0,001 мм = 1 мкм (1 микрометр).

Важным показателем точности измерения является **относительная погрешность**, определяемая как отношение $\varepsilon_a = \dfrac{\Delta a}{\bar{a}}$. Умноженная на 100, эта величина дает значение в процентах. Например,

- для измерения ширины стола получаем $\varepsilon_a = \dfrac{1}{1000} = 0{,}001$ (или 0,1%);
- в гипотетическом примере с плохим измерением диаметра шарика в подшипнике $\varepsilon_a = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ (т.е. 50%);
- для реальных шариков в подшипниках $\varepsilon_a = \dfrac{0{,}001}{2{,}000} = 0{,}0005$ (или 0,05%).

4. О записи результатов измерений

Погрешности редко удаётся оценить с точностью лучше 20% (даже со всей настоящей теорией ошибок, основанной на высшей математике). Поэтому, например, результат измерения массы грамотный физик-экспериментатор вряд ли запишет в виде $m = 0{,}87612 \pm 0{,}00824$ г (с тремя значащими цифрами в погрешности), запишет проще: $m = 0{,}876 \pm 0{,}008$ г – с одной значащей цифрой в погрешности. Всегда ли с одной?

Общее правило таково. При записи погрешности следует округлять её величину до двух значащих цифр, если первая из них единица, и до одной значащей цифры во всех остальных случаях. Так, правильно писать: $\pm 1{,}4$; $\pm 0{,}0014$; но ± 3; $\pm 0{,}08$. Не следует писать $\pm 3{,}2$ и $\pm 0{,}084$.

Примеры правильной записи результатов измерений:

$1{,}2 \pm 0{,}2$; $1{,}24 \pm 0{,}03$;
$1{,}234 \pm 0{,}012$; $0{,}900 \pm 0{,}004$.

В последнем примере неправильно было бы писать 0,9: это означало бы, что о следующих цифрах ничего не известно; запись 0,900 показывает, что две следующие за девяткой цифры именно нули. Это хотели подчеркнуть такой записью числа.

Если масса тела равна 58,3 кг с погрешностью в десятых долях килограмма, то нельзя записать ее как 58 300 г. Читающего такая запись может вести в заблуждение: может показаться, что масса известна с точностью несколько грамм. Правильная запись такая: $5{,}83 \cdot 10^4$ г.

Если в тексте указана величина 356 мм без указания погрешности, считается, что погрешность не превышает 1 мм (не превышает одной единицы в последней значащей цифре).

5. Погрешности косвенных измерений

Существует совсем немного величин, измеряемых непосредственно (говорят «**прямо**»). Длина измеряется линейкой (рулеткой, штангенциркулем, микр*о*метром), время – часами, секундомером; масса – весами, температура – термометром, сила тока – амперметром, напряжение – вольтметром. Большинство других величин мы рассчитываем по формулам, измерив предварительно те величины, для которых имеются приборы.

Например, площадь прямоугольника вычисляют по формуле $S = a \cdot b$, измерив предварительно стороны a и b.

Ранее в статье **Измерение малых длин. Погрешности измерений** [7] мы вычисляли диаметр проволоки D, пользуясь формулой $D = \dfrac{l}{n}$ (А), – разделив длину l, занятую на карандаше проволокой, на число витков n. **Прямыми** измерениями мы получили величины l и n, величина D была получена, говорят, **косвенно** (вычислением). Аналогично с площадью прямоугольника.

Желательно было бы иметь способ оценки погрешностей (абсолютной и относительной) для таких косвенно полученных из опыта величин. В статье **Измерение малых длин. Погрешности измерений** [7] мы уже пользовались (правда, не доказав) тем, что относительная погрешность $\varepsilon_D = \dfrac{\Delta D}{D}$ (Б) дроби $D = \dfrac{l}{n}$ (А) равна сумме относительных погрешностей числителя и знаменателя: $\varepsilon_D = \varepsilon_l + \varepsilon_n$ (В). Во многих школах об этом рассказывают, поэтому мы не останавливались на обосновании формулы (В).

Наша цель теперь разобраться в этих вопросах чуть глубже.

5.1. Абсолютная погрешность суммы двух величин

Предположим, надо измерить полупериметр прямоугольника со сторонами a и b, т.е. сумму величин $p = a + b$. Каждая из этих величин измерена со своей погрешностью: $a = \overline{a} \pm \Delta a$, $b = \overline{b} \pm \Delta b$. Абсолютные погрешности Δa и Δb не обязательно равны друг другу (например, одну сторону мы измеряли обычной линейкой, а другую – штангенциркулем).

Часто пишут сразу

$$p = a + b = \overline{a} \pm \Delta a + \overline{b} \pm \Delta b =$$
$$= (\overline{a} + \overline{b}) \pm (\Delta a + \Delta b) = \overline{p} \pm \Delta p, \qquad (*)$$

то есть
$$\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} \qquad (2)$$
и
$$\Delta p = \Delta a + \Delta b. \qquad (3)$$

Считается, что это – просто алгебра. На самом деле всё не так просто, хотя для оценки абсолютной погрешности суммы величин формула (3) годится.

Уточнение для тех, кто не заметил неаккуратности в таких рассуждениях. Когда пишут $a = \overline{a} \pm \Delta a$, то имеют в виду, что в реальных измерениях мы можем получить как величину немного больше истинного значения (знак «+»), так и меньше (знак «−»). Аналогично с $b = \overline{b} \pm \Delta b$. Однако, когда написали в формуле (*) $a + b = \overline{a} \pm \Delta a + \overline{b} \pm \Delta b$ и далее $(\overline{a} + \overline{b}) \pm (\Delta a + \Delta b)$, то молчаливо предположили, что длины **обеих сторон** прямоугольника **одновременно** измерили либо чуть-чуть завышенными, либо **одновременно** чуть-чуть заниженными. (Считали, что нужно брать один и тот же знак при Δa и при Δb.) В действительности это совсем не так. Измерения длин сторон проводились независимо – одну из длин мы могли получить несколько меньше истинного значения, другую – несколько больше.

Какой же вид должна иметь правильная формула (3) для абсолютной погрешности суммы величин? – Приведём её без вывода:

$$\Delta p = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}\,. \qquad (3^*)$$

По порядку величины обе формулы – (3) и (3*) – дают примерно одну и ту же величину, но по формуле (3) вычисления вести легче, поэтому ею для быстрых оценок и пользуются.

Добавим ещё, что если одна из погрешностей существенно превосходит другую (например, длину a мы измеряли линейкой, $\Delta a = 1$ мм, а длину другой стороны b измеряли штангенциркулем, $\Delta b = 0{,}1$ мм, так что $\Delta a >> \Delta b$), то обе формулы дают практически одно и то же (уже не просто по порядку величины).

Хуже обстоит дело, когда $\Delta a = \Delta b$. Все же для оценок простая формула годится: мы ошибаемся не в 10 раз и даже не в 2 раза, но всего примерно на 40%. В оценках погрешностей такая ошибка допустима.

5.2. Относительная погрешность произведения величин и дробей

Длины сторон прямоугольника $a = \overline{a} \pm \Delta a$ и $b = \overline{b} \pm \Delta b$; относительные погрешности $\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{\overline{a}}$ и $\varepsilon_b = \frac{\Delta b}{\overline{b}}$. Определим абсолютную и относительную погрешности вычисления по этим данным площади $S = a \cdot b$ (как раз произведения величин).

Часто рассуждают следующим упрощенным способом: $a = \overline{a} \pm \Delta a$ и $b = \overline{b} \pm \Delta b$, поэтому для площади прямоугольника имеем

$$S = a \cdot b = (\overline{a} \pm \Delta a)(\overline{b} \pm \Delta b) =$$
$$= \overline{a} \cdot \overline{b} \pm \overline{a} \cdot \Delta b \pm \overline{b}\Delta a + \Delta a \cdot \Delta b \approx$$
$$\approx \overline{a} \cdot \overline{b} \pm \overline{a} \cdot \Delta b \pm \overline{b}\Delta a$$

(пренебрегаем слагаемым $\Delta a \cdot \Delta b$).
И далее:

$$S \approx \overline{a} \cdot \overline{b} \pm (\overline{a} \cdot \Delta b + \overline{b}\Delta a) = \overline{S} \pm \Delta S,$$

где $\overline{S} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ и

$$\Delta S = \overline{a} \cdot \Delta b + \overline{b}\Delta a. \qquad (4)$$

Отсюда получают формулу для относительной погрешности измерения площади прямоугольника

$$\varepsilon_S = \frac{\Delta S}{\overline{S}} = \frac{\overline{a} \cdot \Delta b + \overline{b}\Delta a}{\overline{a} \cdot \overline{b}} =$$
$$= \frac{\Delta a}{\overline{a}} + \frac{\Delta b}{\overline{b}} = \varepsilon_a + \varepsilon_b. \qquad (4')$$

То есть относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей отдельных сомножителей

Для квадрата, $\overline{a} = \overline{b}$, тогда получаем

$$S \approx \overline{a}^2 \pm 2\overline{a} \cdot \Delta a = \overline{S} \pm \Delta S, \qquad (5)$$

где $\Delta S = 2\overline{a} \cdot \Delta a$ – абсолютная погрешность площади квадрата. Для относительной погрешности площади тогда получаем формулу

$$\varepsilon_S = \frac{\Delta S}{\overline{S}} \approx 2\frac{\Delta a}{\overline{a}} = 2\varepsilon_a. \qquad (5')$$

Легко понять, что происхождение множителя «2» здесь – от 2-й степени в формуле для площади квадрата $S = a^2$.

Аналогично для объема куба:

$$V \approx \overline{a}^3 \pm 3\overline{a}^2 \cdot \Delta a = \overline{V} \pm \Delta V,$$
$$\Delta V \approx 3\overline{a}^2 \cdot \Delta a \qquad (6)$$
$$\text{и } \varepsilon_V = \frac{\Delta V}{\overline{V}} \approx 3\frac{\Delta a}{\overline{a}} = 3\varepsilon_a. \qquad (6')$$

Снова происхождение множителя «3» здесь – от 3-й степени в формуле для объема куба $V = a^3$.

Эту же схему рассуждения распространяют на физические величины – на формулы, содержащие степени от величин. Например, согласно закону Джоуля – Ленца имеем $P = \frac{U^2}{R}$, где U – напряжение на резисторе с сопротивлением R, а P – количество тепла, выделяющегося в нём в единицу времени. Относительную погрешность мощности часто оценивают по формуле (докажите ее **самостоятельно**)

$$\varepsilon_P = 2\varepsilon_U + \varepsilon_R. \qquad (7)$$

Заметьте, множитель «2» стоит при относительной погрешности напряжения, которое входило в формулу для мощности во 2-й степени.

Уточнения. Дефект в рассуждениях при выводе формул (4) – (7) тот же, что и при выводе формулы (3) предыдущего пункта для абсолютной погрешности суммы величин: мы молчаливо предполагали, что разные величины одновременно получены, например, несколько завышенными (или одновременно несколько заниженными) по сравнению с истинным значением.

Уточнения формул (4) – (7), выводящиеся в математических курсах теории ошибок на основе теории вероятностей с привлечением высшей математики, учитывают независимость измерения разных величин (т.е. независимость появления знаков «+» и «–» при погрешностях $\pm\Delta a, \pm\Delta b, \pm\Delta c, \ldots$ разных величин).

Для относительной погрешности площади прямоугольника со сторонами a и b, измеренными с относительными погрешностями $\varepsilon_a = \Delta a / \overline{a}$ и $\varepsilon_b = \Delta b / \overline{b}$ вместо простой формулы $(4')$ имеем более точную, но и более сложную формулу

$$\varepsilon_S = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2}\,. \qquad (4^*)$$

Тогда для квадрата со сторонами, измеренными одной и той же линейкой:

$$\varepsilon_S = \sqrt{2} \cdot \varepsilon_a \approx 1{,}4 \cdot \varepsilon_a\,. \qquad (5^*).$$

Для объёма параллелепипеда со сторонами a, b и c, измеренными с относительными погрешностями $\varepsilon_a = \Delta a / \overline{a}$, $\varepsilon_b = \Delta b / \overline{b}$ и $\varepsilon_c = \Delta c / \overline{c}$, имеем

$$\varepsilon_V = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2 + \varepsilon_c^2}\,.$$

Тогда для куба со сторонами, измеренными одной и той же линейкой, вместо простой формулы $(6')$ получаем:

$$\varepsilon_V = \sqrt{3} \cdot \varepsilon_a \approx 1{,}7 \cdot \varepsilon_a\,. \qquad (6^*).$$

Для относительной погрешности мощности в законе Джоуля – Ленца вместо простой формулы (7) имеем

$$\varepsilon_P = \sqrt{4\varepsilon_U^2 + \varepsilon_R^2}\,. \qquad (7^*)$$

Для оценок экспериментаторы чаще пользуются простыми формулами (4) – (7), а не сложными (4*) – (7*).

Дополнительные задачи для самостоятельного рассмотрения

1. Ширина штрихов миллиметровых линеек согласно ГОСТу СССР от 1977 г. должна быть равна $(0{,}25 \pm 0{,}05)$ мм. На фотографии (рис. 2) показаны две прозрачные линейки, наложенные одна на другую своими штрихами. Докажите, что ширины штрихов линеек $\approx 0{,}25$ мм.

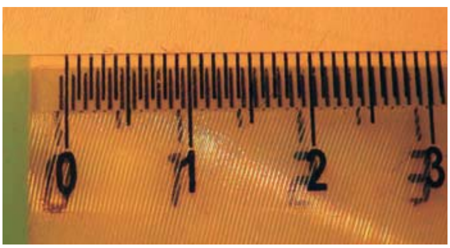

Рис. 2

2. Казалось бы, имея целью производить измерения более точно, лучше пользоваться линейкой с очень тонкими штрихами. Почему это не так? (Дело не только в том, что очень тонкие штрихи очень плохо видны.)

3. По правилам записи погрешностей п. 4 погрешность $\pm 0{,}26$ округлили: $0{,}26 \approx 0{,}3$. На сколько процентов округление изменило величину погрешности?

4. По правилам записи погрешностей п. 4 погрешность $\pm 0{,}14$ округлили: $0{,}14 \approx 0{,}1$. На сколько процентов округление изменило величину погрешности?

5. Пусть скорость V = 3,33 м/с складывается со скоростью u = 451 м/с. Можно ли сказать, что результирующая скорость $w = V + u$ равна 454,33 м/с? Как правильно записать ответ?

6. Ширину стола измеряют обычной линейкой длиной 30 см. Она уложилась ровно 3 раза. Какова абсолютная и относительная погрешности измерения ширины стола? Измерение проведено один раз. (Из теста на приёмных испытаниях в Олимпиадную школу, 2017.)

Литература

1. *Матвеев А.Н.* Электричество и магнетизм: Учебное пособие. – М.: Высш. школа, 1983. – 463 с. (с. 31 и с. 44 – 47).

2. *Перельман Я.И.* Занимательная арифметика. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Транзиткнига», 2003. – 225 с.

3. *Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М., Можаев В.В., Ногинова Л.В., Самарский Ю.А., Францессон А.В.* Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие / под ред. Гольдина Л.Л. – М.: Наука , 1983. – 704 с.

4. *Зайдель А.Н.* Ошибки измерений физических величин: Учебное пособие. 2-е изд. – СПб.: Издательство «Лань». 2005. – 112 с. (с. 550).

5. *Попл Ст.* Физика в диаграммах. – М.: Астрель, АСТ, 2006. – 160 с. (Оксфордское учебное пособие).

6. *Ланге В.Н.* Экспериментальные физические задачи на смекалку. – М.: Наука, 1974. – 96 с. (№ 44, с. 11 и с. 48 – 49).

7. *Лукьянов А.А.* Измерение малых длин. Погрешности измерений // Потенциал, 2014, № 9, с. 47 – 51.

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Беспокойство – это неудовлетворённость, а неудовлетворённость – первейшее условие прогресса.

Т. Эдисон

Неудача – это возможность начать заново, но уже более мудро.

Е.Каледина

Равнодушие – тяжкая болезнь души.

А.Токвиль

Отдых – это перемена занятий.

И.П. Павлов

Простота есть ближайшая родственница ума и дарований.

Ф.Н. Глинка

Остроумие – это далеко не то, что ум; ум отличается изобретательностью, остроумие же только находчивостью.

К. Вебер

Желание – великая вещь: за ним всегда следуют Действие и Труд, а Труд почти всегда сопровождается Успехом… Желание – ключ, открывающий ворота блестящему и радостному успеху.

Пастер