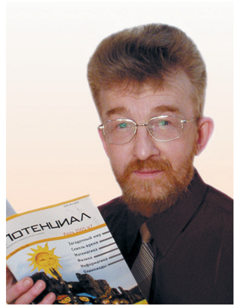

Лукьянов Андрей Александрович
Кандидат физико-математических наук, доцент, лаборатория по работе с одарёнными детьми МФТИ.

О специальной теории относительности (СТО)

Само название «теория относительности» может ввести в заблуждение. Теория вовсе не говорит о том, что всё относительно. Более того, один из постулатов теории гласит, что скорость света в вакууме вовсе не относительна. Она не разная для разных наблюдателей, а напротив, одинакова для всех наблюдателей, – не важно, покоятся они или движутся – навстречу источнику света, от него, вбок, движется ли как-то сам источник света.

В обыденной жизни всё не так. Если, например, звуковая волна движется в воздухе салона самолёта по направлению движения самолёта, то скорость звука относительно наблюдателя, покоящегося вне самолёта на земле, равна сумме скоростей – скорости звука и скорости самолёта. Почему часто можно слышать просто о скорости звука в воздухе (говорят, что она равна примерно 330 м/с), не указывая систему отсчёта? Потому что молчаливо предполагается, что речь идёт о скорости в системе отсчёта, в которой воздух покоится. Иное дело со светом. Когда говорят, что скорость света в вакууме равна примерно 300 000 км/с и тоже НЕ указывают конкретной системы отсчёта, то имеется в виду другое: скорость света будет *одинаковой для всех наблюдателей*. Принятие такого постулата не было простой причудой физиков. Сам этот постулат «родился в муках» и в многочисленных спорах. Лучшего (взамен ему) постулата физики пока не придумали.

Из абсолютности скорости света в вакууме следует относительность другого – размеров тел и промежутков времени в разных системах отсчёта, что ещё лет 110 назад показалось бы абсурдом. Оказалось, что ни длины движущихся тел, ни промежутки времени не были определены с той степенью строгости, которую требует наука.

Ещё один важный пункт специальной (*специальной*!) теории относительности состоит в том, что, строго говоря, в её рамках все рассуждения мы можем вести только для инерциальных систем отсчёта. Для произвольных (в том числе – неинерциальных) систем Эйнштейном была построена другая – так называемая Общая теория относительности. Об инерциальных же системах отсчёта Эйнштейн выдвинул постулат, что *все* явления в них протекают абсолютно одинаково и, соответственно, должны описываться одинаковыми уравнениями. Это, разумеется, не означает, что все величины в разных системах отсчёта должны иметь одинаковое значение. И в механике Ньютона считалось, что все механические явления в разных инерциальных системах отсчёта описываются одними и теми же уравнениями Ньютона. Однако скорости распространения звуковой волны для наблюдателя в салоне самолёта и для наблюдателя на земле будут разными. Теория относительности пошла дальше.

Пусть мы измерили длину некоего стержня в системе отсчёта, где стержень покоился, и длина его оказалась равна L_0. Теория относительности утверждает, что если стержень движется вдоль самого себя со скоростью v относительно некоего наблюдателя, то этот наблюдатель припишет стержню меньшую длину:

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (1)$$

Автор намеренно написал осторожно «припишет стержню меньшую длину» вместо «увидит стержень меньшей длины». Дело в том, что видимая длина – совсем не простая вещь и вовсе не даётся написанной выше простой формулой. Когда человек в данный момент времени видит какое-то тело, то ему в это время приходят в глаз фотоны, испущенные ранее разными частями тела в разные моменты времени. Об этом не задумывался и Эйнштейн. Впервые на эту тонкость в видимых глазом человека или фотокамерой размерах тел обратили внимание лишь в 1959 году. (Эйнштейн умер в 1955 г.). И всё же формула (1) верна! В каком смысле? Например, если бы стержень был заряжен и заряд его равнялся бы Q, то в системе отсчёта, в которой он неподвижен, линейная плотность заряда равнялась бы Q/L_0; а вот для наблюдателя, относительно которого он движется со скоростью v, линейная плотность заряда будет равна

$$Q/L = \frac{Q}{L_0\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

(Сама по себе величина заряда Q не зависит от того, движется заряженное тело или покоится.)

Теперь об относительности промежутков времени. Теория относительности утверждает, что длительность одних и тех же событий (например, промежутка времени между «рождением» и «смертью» какой-нибудь элементарной частицы), измеренная разными наблюдателями в разных инерциальных системах отсчёта, будет разной, даже если у них были абсолютно одинаковые часы, но наблюдатели двигались друг относительно друга (не покоились). Самым маленьким окажется промежуток времени Δt_0 для того наблюдателя, который покоился относительно событий, например, наблюдатель следил за рождением, жизнью и распадом нейтрона так, что нейтрон относительно него всё время покоился. Для наблюдателя же, относительно которого нейтрон двигался со скоростью v, время между рождением и распадом нейтрона будет даваться формулой

$$\Delta t = \Delta t_0 \,/\, \sqrt{1 - v^2 / c^2} \qquad (2)$$

и будет больше, чем Δt_0.

Почему же тогда мы не замечаем всех этих эффектов каждый день? Дело в том, что, например, существенно разными длины тел и промежутки протекшего времени будут для разных наблюдателей, лишь когда скорость их относительного движения близка к скорости света. Для скоростей относительного движения много меньших, чем скорость света в вакууме, эффекты теории относительности крайне малы, и с хорошей точностью «работают» формулы обычной механики Ньютона. Напомним, $c \approx 300\,000$ км/с; для сравнения – скорость самых быстрых (гражданских) самолётов не превышает 1 км/с. Соответствующий квадратный корень при этом будет примерно равен

$$\sqrt{1 - v^2 / c^2} \approx 0{,}999\,999\,999\,994.$$

Тем не менее, сверхточные измерения (опыты 1970 и 1980 гг.) показали правильность формул СТО как раз для промежутков времени, протекших на земле и в самолёте.

Совсем иное дело – для частиц в ускорителях или в космических лучах: там частицы двигаются со скоростями, близкими к скорости света в вакууме, и соответствующий корень квадратный $\sqrt{1 - v^2 / c^2}$ уже близок к нулю, а не к единице. Даже в электронно-лучевой трубке телевизора электроны, прежде чем попасть на экран, разгоняются до скоростей, близких к скорости света (СТО – на дому!).

Релятивистский закон сложения скоростей. Пусть имеются две инерциальные системы отсчёта («нештрихованная» S и «штрихованная» S'). Пусть оси координат X и X' у них совпадают по направлению и пусть штрихованная система движется относительно нештрихованной в этом направлении со скоростью v. Пусть ещё имеется частица. Сделали измерения, и оказалось, что в системе S' её скорость направлена вдоль оси X' и равна u'; измерения же в системе S дали значение скорости u вдоль направления оси X. Классическая механика давала простую связь между скоростями:

$$u = u' + v. \qquad (*)$$

Теория относительности даёт более сложное соотношение между скоростями (ещё и не линейное!):

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}. \qquad (3)$$

Для малых скоростей u' и v по сравнению со скоростью света в вакууме c вторым слагаемым в знаменателе можно пренебречь, при этом получаем нерелятивистский закон сложения скоростей (*). Любопытно, что если в системе S'

двигалась не просто частица, но фотон со скоростью $u' = c$, то его скорость в нештрихованной системе S согласно (3) тоже окажется равной $u = c$. (Убедитесь самостоятельно; выкладка очень простая.)

Скажем ещё несколько слов (увы, в «телеграфном стиле») о *динамике частиц в теории относительности* (пока была кинематика). Основное уравнение динамики почти совпадает с соответствующим уравнением механики Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i. \qquad (4)$$

Есть, однако, существенное отличие: импульс частицы равен не просто произведению массы на скорость, но

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (5)$$

Нет и простой школьной формулы

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

(где $\vec{a}$ – ускорение). Сложнее обстоит дело и с энергией частицы, в СТО она равна

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (6)$$

Покоящаяся частица при этом обладает энергией

$$\mathcal{E}_0 = mc^2, \qquad (6')$$

которую назвали энергией покоя. В рамках ньютоновской механики вообще не рассуждали об энергии покоящейся частицы (имеется в виду: в отсутствие полей – электрического или гравитационного). Движущейся частице приписывали кинетическую энергию

$$T = \frac{mv^2}{2}. \qquad (7)$$

В теории относительности тоже вводят кинетическую энергию – по формуле

$$T = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 \qquad (8)$$

(часто её обозначают и буквой K). При малых скоростях (когда $v \ll c$) формула (8) даёт примерно те же значения кинетической энергии, что и нерелятивистская формула (7). Но не пробуйте пользоваться классической формулой (7) для частиц в ускорителе!

Пользуясь формулами (5) и (6), можно получить ещё два важных соотношения между импульсом и энергией:

$$\vec{p} = \mathcal{E} \cdot \vec{v}/c^2 \qquad (9)$$

и

$$\mathcal{E} = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}. \qquad (10)$$

Из последней формулы следует важный (для фотонов!) вывод: для частиц с нулевой массой ($m = 0$) соотношение между энергией и импульсом совсем простое – линейное: $\mathcal{E} = pc$. Можно было рассуждать и наоборот: поскольку для фотонов в вакууме $\nu = c/\lambda$, то после умножения на постоянную Планка имеем:

$$h\nu = \frac{h}{\lambda}c,$$

т. е. имеем линейное соотношение между энергией и импульсом $\mathcal{E} = pc$. Но тогда в силу (10) получаем нулевую массу для фотонов: $m = 0$.

Пример 1. π^+ и π^0 мезоны родились одновременно в лабораторной системе отсчёта (ЛСО) на расстоянии $L = 50$ нм и движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой со скоростями $v_1 = 0{,}6c$ и $v_2 = 0{,}8c$, где c – скорость света в вакууме. Времена жизни π^+ и π^0 мезонов равны соответственно

$$\tau_1 = 2{,}60 \cdot 10^{-8} \text{ с}$$

и

$$\tau_2 = 8{,}40 \cdot 10^{-17} \text{ с}.$$

Успеют ли мезоны долететь друг до друга до того, как распадётся хотя бы один из них? (Времена жизни частиц – это времена их жизни в системе отсчёта, в которой они «всю жизнь» покоились!)

Решение. В ЛСО время до возможного столкновения мезонов равно

$$t = L/(v_1 + v_2) \approx 1{,}2 \cdot 10^{-16} \text{ с},$$

причём, $\tau_2 < t < \tau_1$, поэтому кажется, что π^0 мезон распадётся раньше, чем произойдёт столкновение. Однако по часам π^0 мезона к моменту встречи пройдёт лишь время

$$t_2 = t\sqrt{1 - v_2^2/c^2} \approx 7{,}1 \cdot 10^{-17} \text{ с} < \tau_2,$$

т. е. π^+ и π^0 мезоны всё же долетят друг до друга прежде, чем кто-либо из них распадётся.

Замечание. Почему при расчёте времени сближения частиц мы пользовались нерелятивистской суммой скоростей $v_1 + v_2$, а не пользовались формулой теории относительности

$$u = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}? \qquad (3)$$

Дело в том, что формула (3) относится к тому случаю, когда одна скорость измерена линейкой и часами одной системы отсчёта, а другая – другой линейкой и другими часами (другой системы отсчёта). В данном случае мы вообще не переходили из одной системы отсчёта в другую. Просто в ЛСО одна частица пролетела путь $v_1 t$, а другая $v_2 t$; сумма этих двух путей и равнялась начальному расстоянию между мезонами. Другое дело, если бы мы спросили себя: какова скорость одного мезона относительно другого? В этом случае мы должны были бы мысленно перейти в систему отсчёта, связанную с одним из мезонов. При этом как раз нужно пользоваться формулой (3), и она даёт значение

$$\frac{1{,}4c}{1{,}48} \approx 0{,}946c$$

для скорости относительного движения.

Пример 2. Ускоряющее напряжение в электронно-лучевой трубке кинескопа 25 кВ. Какую долю от скорости света в вакууме составляет скорость электрона, прошедшего такую разность потенциалов?

Решение. Пройдя ускоряющую разность потенциалов U = 25 кВ, электрон приобретёт кинетическую энергию

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = eU = 25\text{кэВ} =$$

$$= 25 \cdot 10^3 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Отсюда находим скорость

$$v \approx 9{,}04 \cdot 10^7 \text{ м/с} \approx 0{,}301\, c.$$

Эта скорость составляет более 30% от скорости света! И всё это – не на ускорителе, а дома!

Удивительно, но даже для таких быстрых электронов формулы механики Ньютона дают примерно такие же значения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = eU.$$

Для скорости при этом получаем значение

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \approx 9{,}4 \cdot 10^7 \text{ м/с} \approx 0{,}31\, c.$$

Пример 3. Какой должна быть скорость частицы, чтобы её релятивистский импульс был в 2 раза больше нерелятивистского?

Решение.

$$\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 2mv.$$

Отсюда

$$\sqrt{1-v^2/c^2} = 1/2$$

и

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c \approx 0{,}866c.$$

Пример 4. Какой должна быть скорость частицы, чтобы её энергия была в 2 раза больше её энергии покоя?

Решение.

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 2mc^2.$$

Дальше – в точности, как в предыдущем примере.

Пример 5. На Стэндфордском линейном плазменном ускорителе электроны разгонялись до кинетической энергии K = 4 ГэВ. Оценить длину волны де Бройля электрона.

Решение. В данном случае кинетическая и полная энергия электрона (обе примерно равны друг другу и равны $4 \cdot 10^9$ эВ) значительно больше энергии покоя электрона ($0{,}5 \cdot 10^6$ эВ). Поэтому уж точно нужно пользоваться формулами СТО. Согласно (10) имеем:

$$K = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} - mc^2 \approx$$

$$\approx \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} \approx pc,$$

откуда $p \approx K/c$.

Далее по формуле де Бройля находим

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{h}{K/c} = \frac{hc}{K} \approx 3{,}1 \cdot 10^{-16}\ \text{м}$$

(эта длина меньше размеров атомных ядер).

Иногда неправильно считают, что формула де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

относится к нерелятивистской механике Ньютона, поэтому, мол,

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$

На самом деле де Бройль с самого начала писал релятивистские формулы! Поэтому в общем случае в формулу де Бройля нужно подставлять релятивистский импульс частицы

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Пример 6. На Стэндфордском линейном плазменном ускорителе электроны разгонялись до кинетической энергии K = 4 ГэВ на расстоянии L = 10 см. Оцените, как долго происходил разгон одного электрона? Энергия покоя электрона $\mathcal{E}_0$ = 0,511 МэВ.

Решение. Из релятивистского (!) уравнения движения электрона

$$\frac{dp}{dt} = eE,$$

где E – напряжённость ускоряющего электрон электрического поля, которое мы считаем постоянным и равным U/L, где U – напряжение, находим

$$p = eEt = \frac{eU}{L}t = \frac{K}{L}t. \qquad (*)$$

При малых (не релятивистских) скоростях (импульсах) частицы её энергия приближённо равна

$$\mathcal{E} = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

(второе слагаемое в подкоренном выражении мало; при этом можно воспользоваться приближённой математической формулой: при $|x| << 1$ $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$). Наоборот, при больших скоростях (импульсах) главное слагаемое в подкоренном выражении – второе; при этом $\mathcal{E} \approx K \approx pc >> \mathcal{E}_0 = mc^2$. По условию задачи $K >> \mathcal{E}_0$, поэтому импульс электрона в конце разгона можно принять приближённо равным

$$p \approx \mathcal{E}/c \approx K/c. \qquad (**)$$

Сравнивая (*) и (**), находим

$$t \approx L/c \approx 0{,}33 \text{ нс}.$$

Почему получился такой простой ответ (как будто не было ускоренного движения электрона, а он просто двигался со скоростью света)? Дело в том, что электроны довольно быстро (за малую долю от общего времени разгона) достигают скоростей, близких к скорости света в вакууме c. Разгон их, конечно, продолжается и дальше, их скорость становится всё ближе и ближе к скорости света. Но можно сказать, что они почти всё время движутся со скоростью, примерно равной скорости света (чуть-чуть меньше). Средняя скорость электронов примерно равна скорости света в вакууме.

Пример 7. Доказать, что *свободный* электрон не может *излучить* фотон.

Решение. В системе отсчёта, в которой электрон до предполагаемого излучения фотона покоился, энергия электрона есть энергия покоя $\mathcal{E}_0 = mc^2$, а импульс равен нулю. Если бы электрон излучил фотон, он приобрёл бы импульс, равный по модулю импульсу фотона, но противоположно ему направленный, т. к. по закону сохранения импульса векторная сумма импульсов замкнутой системы должна оставаться равной нулю. Но это означает, что электрон увеличил бы скорость – от нулевой до некоторого конечного значения v, а значит, увеличил бы энергию до значения

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > \mathcal{E}_0 = mc^2$$

(иначе

$$\mathcal{E} = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} > \mathcal{E}_0 = mc^2 \text{).}$$

Но энергией (положительной!) будет обладать при этом ещё и фотон $\mathcal{E}_ф = h\nu$. Сумма энергий электрона $\mathcal{E}$ и фотона $\mathcal{E}_ф$ будет, разумеется, больше энергии покоя $\mathcal{E}_0$ электрона до предполагаемого излучения фотона, а это противоречит закону сохранения энергии.

Этот же результат мог быть получен и из формул механики Ньютона (не обязательно – из формул теории относительности). Попробуйте самостоятельно доказать, что *свободный* электрон не может *поглотить* фотон.