Рыбаков Александр Борисович
Кандидат физико-математических наук,
учитель физики в гимназии № 144,
г. Санкт-Петербург.

О процессах установления равновесия

В школьном курсе физики даже самого термина «дифференциальные уравнения» стараются избегать. А между тем, по сути дела такие уравнения появляются на самых первых уроках по механике.

Дифференциальные уравнения – это уравнения, куда входит производная неизвестной функции. В этих заметках мы покажем, что для решения простейших дифференциальных уравнений, возникающих в задачах об установлении равновесия в разных физических системах, никаких специальных знаний и умений не требуется.

Дифференциальные уравнения – важнейший математический аппарат во многих областях физики. Чем раньше ученики, готовящие себя к деятельности в области естественных наук и техники, начнут знакомиться с ними, тем лучше.

1. В самой первой теме по механике мы встречаемся с соотношениями, куда входят производные:

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = a, \qquad (1), (2)$$

где s – координата, v и a – проекции скорости и ускорения, соответственно, на траекторию. Если задана зависимость ускорения от времени $a(t)$, то мы имеем дело с простейшими дифференциальными уравнениями.

Если мы в (1), (2) положим $a = 0$, то имеем уравнения равномерного движения. Если положим $a = const$, то решив уравнения (1), (2), мы приходим к уравнениям равноускоренно-

го движения. А решаются уравнения (1), (2) простым интегрированием.

Производная самым существенным образом входит в большое число определений и законов физики, чаще всего – производная по времени (достаточно сказать, что производные входят во второй закон Ньютона). Поэтому и дифференциальные уравнения возникают в физике буквально на каждом шагу.

В школьных задачах обычно ограничиваются анализом таких ситуаций, где физические величины меняются со временем равномерно, и таким образом избегают дифференциальных уравнений. Но есть множество очень важных даже для школьного курса процессов, где предположить равномерную зависимость физических величин от времени совершенно невозможно (например, радиоактивный распад или разрядка конденсатора). Анализом таких ситуаций мы и займёмся. Будут выписаны возникающие здесь дифференциальные уравнения и показано, как просто они решаются – даже умение интегрировать нам не понадобится!

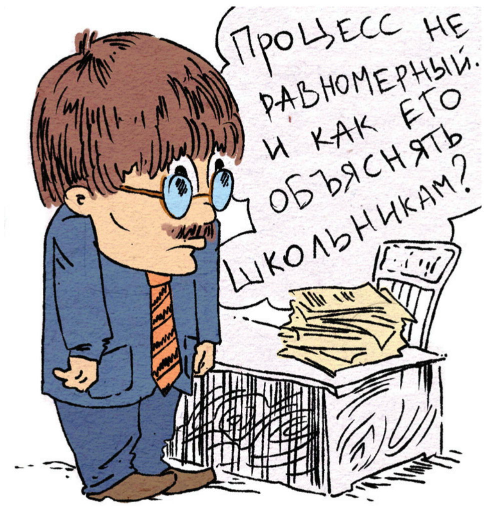
В то же время надо иметь в виду, что дифференциальные уравнения в принципе отличаются от тех, к которым ученики уже привыкли за годы обучения математике. В знакомых ученикам типах уравнений решением является значение переменной. Решение же дифференциальных уравнений – это функция.

Мы ограничились рассмотрением таких систем, где со временем устанавливается состояние равновесия, когда всякие процессы прекращаются. При этом специально выбраны примеры из разных областей физики, чтобы показать, что одни и те же дифференциальные уравнения могут возникать в самых разных физических задачах.

2. В этих заметках мы несколько раз будем обращаться к анализу токопрохождения в замкнутой электрической цепи с различными элементами. Напомним фундаментальное уравнение для цепей, для которых выполняется условие квазистационарности:

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_k U_k \qquad (3)$$

(при обходе контура сумма ЭДС источников тока равна сумме напряжений на всех других элементах цепи).



Начнём с простой задачи о разрядке конденсатора.

Пусть мы имеем цепь из конденсатора ёмкостью C и резистора с сопротивлением R (в которое мы включаем и сопротивление проводов), см. рис. 1. Пусть в начальный момент конденсатор заряжен до напряжения U (т. е. на его обкладках сосредоточен заряд $Q = CU$). Мгновенные значения силы тока в цепи, напряжения на конденсаторе и величины заряда на его обкладках будем обозначать i, u и q соответственно. Как будут вести себя эти величины со временем после замыкания ключа K?

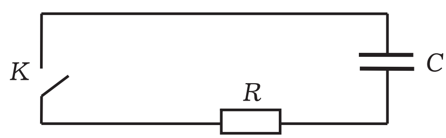


Рис. 1

Для этой цепи уравнение (3) принимает вид:

$$\frac{q}{C} + iR = 0. \qquad (4)$$

По определению силы тока

$$i = \frac{dq}{dt}. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $q(t)$:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}q. \qquad (6)$$

Обратите внимание – вид уравнения (6) ясно говорит нам, что у произведения RC размерность времени (RC и называют *постоянной времени* для этой цепи).

В математике разработаны формальные приёмы для решения дифференциальных уравнений разных типов, но мы пойдём своим путём – попытаемся догадаться о решении уравнения (6). Что «говорит» нам это уравнение? Что производная неизвестной функции $q(t)$ пропорциональна самой функции. Не известна ли нам функция, обладающая таким свойством? Покопавшись в памяти или в учебнике математики, мы, конечно, вспомним, что таким свойством обладает экспонента.

В дальнейших рассуждениях важную роль будет играть функция

$$y(x) = y_0 e^{-kx} \quad (k > 0) \qquad (7)$$

(о предэкспоненциальном множителе можно сказать, что $y_0 = y(0)$).

Вспомним правила дифференцирования и убедимся, что

$$\frac{dy}{dx} = -ky. \qquad (8)$$

С интересующей нас сейчас точки зрения можно сказать, что функция (7) является решением дифференциального уравнения (8) при любом y_0. В дальнейшем в физических задачах мы должны будем выбирать y_0 так, чтобы удовлетворить начальным условиям.

Легко видеть, что (8) лишь обозначениями отличается от уравнения (6), следовательно, решение уравнения (8) имеет вид:

$$q(t) = Qe^{-t/RC} \qquad (9)$$

(мы отсчитываем время от момента замыкания ключа).

Из (9) в соответствие с (5) получим

$$i(t) = \frac{Q}{RC}e^{-t/RC} = Ie^{-t/RC}, \qquad (10)$$

где $I = i(0)$ – сила тока в цепи в момент времени $t = 0$.

Мы видим, что сила тока в цепи i и заряд на обкладках q зависят от времени одинаковым образом. Если на графике выбрать масштабы так, чтобы совпали начальные значения этих величин, то графики совпадут – см. рис. 2.

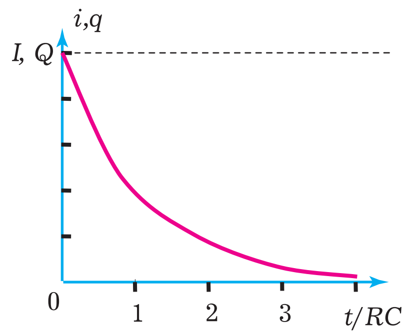


Рис. 2

Со временем зависимости $i(t)$ и $q(t)$ всё теснее прижимаются к оси времени, но ни при каком значении t не обращаются в ноль. О таком поведении функций говорят, что они приближаются к нулю *асимптотически*.

Сейчас мы увидим, что очень плодотворным оказывается вопрос о величине площади под этой кривой. В частности, является ли площадь под кривой на рис. 2 конечной величиной или она бесконечно велика? Мы помним, что площадь под кривой – это определённый интеграл, причём в данном случае верхний предел равен бесконечности. Поэтому математик этот же вопрос поставил бы в другой форме, как вопрос о величине интеграла

$$\int_0^\infty i(t)dt = I\int_0^\infty e^{-t/\tau}dt. \qquad (11)$$

(где введено обозначение $\tau = RC$).

Ответ на этот вопрос получить нетрудно.

Вспомним, что соотношение (1) на самых первых уроках по кинематике привело нас к выводу о смысле площади под кривой $v(t)$ – это путь, пройденный телом. Точно так же и полностью аналогичное (1) соотношение (5) приводит к выводу, что площадь под кривой $i(t)$ – это полный заряд, перенесённый по цепи, т. е. начальный заряд на конденсаторе Q.

Итак, фигура, ограниченная осями координат и графиком функции $i(t)$, хоть она и простирается вдоль оси абсцисс бесконечно далеко, имеет вполне определённую площадь!

Приравнивая интеграл (11) заряду $Q = UC = IRC$, мы получаем

$$\int_0^\infty e^{-t/\tau}dt = \tau. \qquad (12)$$

Удивительное дело! Мы нашли непростой интеграл, ничего не зная о том, как вообще вычисляют интегралы! Конечно, от обозначений ничего не зависит, и мы не обязаны всегда считать, что в интеграле (12) переменная t – это именно время, поэтому стоит выписать (12), отвлекаясь от конкретной задачи:

$$\int_0^\infty e^{-x/a}dx = a. \qquad (13)$$

Заметим, что площадь под кривой $q(t)$ никакого наглядного физического смысла не имеет.

Теперь о другом. Всё-таки нам хотелось бы получить какой-то, пусть в математическом отношении не строгий, но практический ответ о времени этого процесса. За время τ начальное значение заряда на конденсаторе (и тока в цепи) уменьшается в e = 2,7 раз, за 2τ – в 7,4 раза. Вот почему говорят, что τ – *характерное время* этого процесса. Итак, разрядка конденсатора происходит *за время порядка RC*.

3. Теперь займёмся математическим описанием процесса, на первый взгляд, во всех отношениях очень далёкого от разрядки конденсатора.

Речь пойдёт о радиоактивном распаде.

Обычно, рассказывая о радиоактивном распаде, учебники сначала говорят, что процесс распада – вероятностный, а потом выписывают закон радиоактивного распада. Но связь между первым утверждением и вторым обычно не прослеживается. А нам теперь это сделать несложно.

Пусть для интересующих нас здесь ядер вероятность распасться за единицу времени равна λ. Это значит, что за малое время dt из N наличных ядер распадутся λNdt ядер. То есть зависимость числа нераспавшихся ядер от времени $N(t)$ подчиняется уравнению:

$$dN = -\lambda Ndt, \text{ или } \frac{dN}{dt} = -\lambda N. \qquad (14)$$

Это уравнение лишь обозначениями отличается от (6) или (8). Так что его решение можно выписать сразу:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-t/\tau}, \qquad (15)$$

где мы ввели характерное время процесса $\tau = 1/\lambda$. Формула (15) и называется законом радиоактивного распада. За время τ исходное число радиоактивных ядер уменьшается в e раз. А график зависимости $N(t)$ такой же, как на рис. 2.

Полное число распадов в образце за единицу времени называется *активностью* A образца. Из предыдущего уже ясно, что

$$A = \lambda N, \qquad (16)$$

значит, активность меняется со временем по тому же закону, что $N(t)$.

В школьном курсе обычно предпочитают записывать закон (16) в виде

$$N(t) = N_0 2^{-t/T_{1/2}}, \qquad (17)$$

где $T_{1/2}$ – период полураспада, т. е. время, за которое число нераспавшихся ядер уменьшается в два раза. Приравнивая правые части (15) и (17), нетрудно установить связь между характерными временами:

$$T_{1/2} = \ln 2\ \tau = 0{,}69\tau. \qquad (18)$$

Определение среднего арифметического (известное ученикам с младших классов) можно распространить и на интересующий нас здесь случай и доказать, что τ – среднее время жизни ядер (мы не будем выписывать возникающие здесь интегралы – читателю придётся в это поверить). В научной литературе равным образом используются оба характерных времени: и τ, и $T_{1/2}$.

Заметим, впрочем, что дифференцировать и интегрировать экспоненту проще и удобнее, чем степенную функцию.

4. Ещё один пример.

Рассмотрим замкнутую цепь из сопротивления R и индуктивности L, см. рис. 3. Пусть в начальный момент по цепи идёт ток I (подумайте, как можно создать такие начальные условия). Как ток в этой цепи i будет меняться со временем?

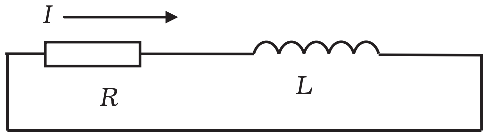


Рис. 3

Напряжение на катушке индуктивности лишь знаком отличается от напряжения на резисторе:

$$L\frac{di}{dt} = -Ri. \qquad (19)$$

Мы снова пришли к уравнению (6) в других обозначениях. Так что

$$i(t) = Ie^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (20)$$

Характерным временем в этой задаче является L/R.

Обратите внимание, как просто, «в два счёта», мы, приобретя уже какой-то опыт, разобрались с новой ситуацией.

5. Теперь рассмотрим пример из механики.

Моторная лодка массы m подходит к причалу со скоростью v_0. Мотор на лодке выключают, и далее она двигается по инерции, постепенно уменьшая скорость под действием силы сопротивления воды. Будем считать, что величина силы сопротивления пропорциональна скорости лодки:

$$F = kv. \qquad (21)$$

Как будет со временем меняться скорость лодки?

Направим ось x вдоль скорости лодки. Будем отсчитывать время от момента выключения мотора. Проекция второго закона Ньютона на ось x

$$m\frac{dv}{dt} = -kv. \qquad (22)$$

Видно, что параметры m и k войдут в решение только в виде отношения m/k, причём эта дробь имеет размерность времени, поэтому введём характерное время $\tau = m/k$.

Мы уже понимаем, что скорость будет меняться со временем по закону

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} = v_0 e^{-t/\tau}. \qquad (23)$$

И снова возникает вопрос – какой путь пройдёт лодка до остановки? Ясно, что это вопрос о величине площади под кривой $v(t)$. Заметим, что вид результата нам заранее известен. Ведь в задаче есть всего два параметра: начальная скорость v_0 и характерное время τ. Ясно, что путь до остановки S может зависеть от этих параметров единственным образом: $S = Cv_0\tau$, где C – безразмерная константа. Опыт решения задач показывает, что очень часто безразмерная константа в ответе, полученном методом размерностей, оказывается близкой к 1.

Но нам несложно получить и точный ответ. Для определения полного пути лодки S надо проинтегрировать от $t = 0$ до $t = \infty$ соотношение, следующее из (23):

$$dx = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt. \qquad (24)$$

А с таким интегралом мы выше уже разобрались. Учитывая (12), получим

$$S = v_0\tau, \qquad (25)$$

т. е. константа C оказалась равной 1, как мы и подозревали.

Заметим, что путь, пройденный за время t, со временем асимптотически приближается к S.

6. Теперь обратимся к примерам, где возникает чуть более сложное уравнение.

Рассмотрим процесс зарядки конденсатора. ЭДС источника тока обозначим $\mathcal{E}$. Пусть в начальный момент конденсатор не заряжен. Все обозначения – такие же, как в п. 2, см. рис. 4.

Со временем система придёт в состояние равновесия, при этом ток обратится в ноль, на конденсаторе установится напряжение $U = \mathcal{E}$, т. е. на его обкладках будет заряд $Q = C\mathcal{E}$.

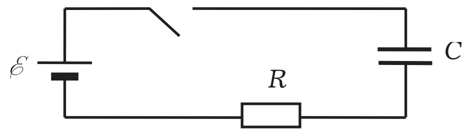


Рис. 4

Уравнение (3) для этой цепи имеет вид

$$\mathcal{E} = iR + U_C, \qquad (26)$$

Перепишем это уравнение в виде дифференциального уравнения относительно неизвестной функции $q(t)$:

$$RC\frac{dq}{dt} + q - Q = 0. \qquad (27)$$

Один из известных приёмов решения дифференциальных уравнений – введение новых переменных, в которых уравнение будет проще. Вот и введём новую функцию

$$y = q - Q.$$

Поскольку $Q = const$, то $dq = dy$, и (27) в новых переменных примет вид:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{RC}y. \qquad (28)$$

Да это же наш старый знакомый – уравнение (6) или (8)! Ясно, что

$$y(t) = y_0 e^{-t/RC} = -Qe^{-t/RC}. \qquad (29)$$

Здесь мы учли, что $y_0 = y(0) = -Q$.

Возвращаясь обратно к функции $q(t)$, получим:

$$q(t) = Q(1 - e^{-t/RC}). \qquad (30)$$

График этой зависимости представлен на рис. 5.

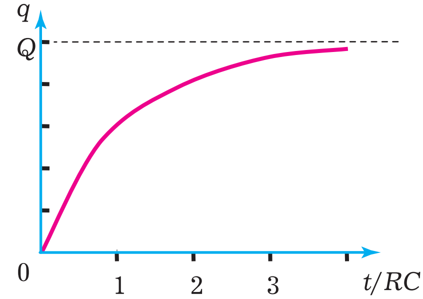


Рис. 5

А величина тока по-прежнему зависит от времени в соответствии с (10). И все высказанные выше соображения о характерных временах процесса остаются справедливыми и здесь.

7. Теперь рассмотрим пример из механики.

Пусть парашютист, покинув самолёт, летит, не раскрывая парашют (затяжной прыжок). Будем считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости парашютиста: $F = kv$. Мы хотим найти зависимость вертикальной проекции скорости парашютиста от времени $v(t)$.

Сначала разберёмся в этой ситуации качественно. Парашютист покидает самолёт с нулевой вертикальной скоростью. Со временем скорость растёт и растёт сила сопротивления. В конце концов, сила сопротивления сравняется с силой тяжести, после чего скорость парашютиста меняться не будет. Величину установившейся скорости будем обозначать w.

Теперь попытаемся привлечь математику. Направим ось координат по вертикали вниз, проекция второго закона Ньютона на эту ось имеет вид:

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt}. \qquad (31)$$

Запишем (31) в таком виде, чтобы его похожесть на (27) бросалась в глаза:

$$\frac{m}{k}\frac{dv}{dt} + v - \frac{mg}{k} = 0. \qquad (32)$$

Рассуждая как и выше, несложно получить:

$$v(t) = w(1 - e^{-tk/m}). \qquad (33)$$

График этой зависимости нам уже известен (см. рис. 5). Характерное время процесса установления m/k.

8. Надеюсь, теперь читатели смогут по образцам, приведённым выше, самостоятельно проанализировать процесс установления тока в цепи с индуктивностью и источником тока после замыкания ключа – см. рис. 6.

Рис. 6

Мы приведём ответ:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-Rt/L}). \qquad (34)$$

Заключение

Итак, процессы установления равновесия в системах разной физической природы обладают общими чертами, в частности, зачастую описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями. Мы показали, что эти дифференциальные уравнения вполне доступны элементарному анализу – нам даже интегрировать нигде не пришлось.

Надо иметь в виду, что мы ограничились лишь математическими аспектами задачи. Но необходимо помнить, что за каждым нашим примером стоит какая-то модель, какое-то приближение к действительности. В наших же заметках многие важные физические соображения остались «за сценой».