Петрашев Владимир Иванович
Доцент кафедры высшей математики Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова.

О пользе союза физики и математики

Автору предлагаемой статьи представляются противоестественными и непонятными факты, когда ученик буквально «живёт» физикой, но недолюбливает математику, и наоборот. Чтобы как-то посодействовать преодолению такого перекоса, предлагаем подборку задач, демонстрирующую, на наш взгляд, эффективность совместного применения математики и физики.

Задача 1. К потолку лифта, движущегося с некоторым ускорением, прикреплены два груза с массами m_1 и m_2 (см. рис. 1).

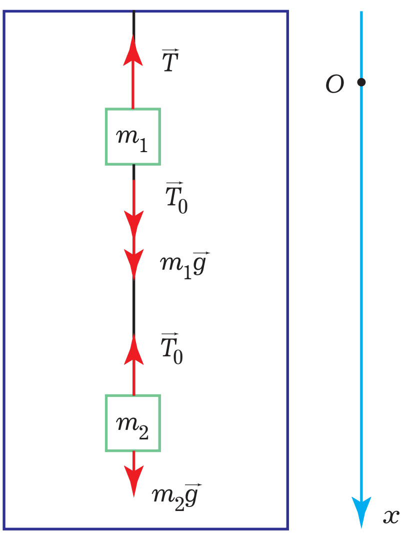

Рис. 1

Натяжение нити между ними равно T_0. Каково натяжение нити, прикреплённой к потолку?

Решение. Решение задачи несложно. Выбрав ось Ox, как показано на рис. 1, запишем второй закон Ньютона для каждого из грузов m_1 и m_2 и получим систему:

$$\begin{cases} -T + T_0 + m_1 g = m_1 a, \\ -T_0 + m_2 g = m_2 a. \end{cases}$$

Умножив обе части первого уравнения системы на m_2, обе части второго – на m_1, исключим неизвестное ускорение a. Получим:

$$-m_2 T + m_2 T_0 + m_1 T_0 = 0,$$

отсюда ответ задачи:

$$T = T_0 + \frac{m_1}{m_2} T_0,$$

и «пятёрка» по физике в дневнике. Но цепкий глаз математика привычно (если такая привычка выработана) анализирует ответ. Если $m_1 = 0$, то

$T = T_0$. Здесь, пожалуй, всё в порядке: если верхнего груза нет ($m_1 = 0$), то нить по всей длине имеет одну и ту же силу натяжения T_0. А вот если при заданных по условию m_1 и T_0 начать увеличивать m_2? Тогда слагаемое $\frac{m_1}{m_2}T_0$ уменьшится, а, следовательно, уменьшится и T. Но ведь, кажется, должно быть наоборот: чем большим будет груз m_2, тем больше натяжение нити T! Уберём вообще груз m_2 или обрежем нить между грузами. Тогда и в том, и в другом случае $T_0 = 0$, и ответ в этом случае даёт: $T = 0$. Но ведь груз m_1 остался! Почему же тогда $T = 0$?! Что-то не так в вашем ответе, уважаемые физики!

Придётся физику из второго уравнения системы найти

$$a = g - \frac{T_0}{m_2}.$$

Отсюда при $T_0 = 0$ и $m_2 \neq 0$ получаем $a = g$ – лифт свободно падает! Но тогда в нём все тела, в том числе и m_1, находятся в невесомости, то есть действительно $T = 0$. Аналогично объясняется и парадокс с уменьшением T при увеличении m_2: из формулы

$$a = g - \frac{T_0}{m_2}$$

следует, что с увеличением m_2 при неизменном T_0 (а мы требовали такой неизменности) увеличивается ускорение лифта, направленное вниз (в системе уравнений оно со знаком «плюс», т. е. сонаправлено с осью Ox). Но тогда действительно натяжение T уменьшается. То есть ответ правильный; но, отражая «математическую атаку» на него, мы глубже проникаем в физическую суть задачи (нам так кажется).

Задача 2. На графике представлена зависимость ускорения тела a от времени t. В какой момент времени скорость тела наименьшая, в какой момент скорость наибольшая?

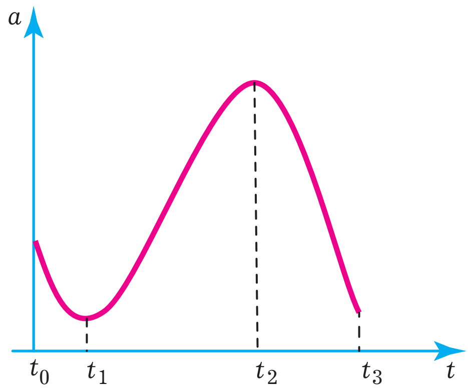

Рис. 2

Решение. Здесь некоторым школьникам-физикам бывает затруднительно понять, почему это у тела наибольшая скорость тела не в момент t_2, когда ускорение максимально, и наименьшая не в t_1 или t_3, когда ускорение наименьшее? Но тут подходит математик и задаёт «наводящий» вопрос: а какой знак(!) у ускорения на отрезке $[t_0; t_3]$? Положительный? Но если тело двигалось с положительным ускорением, как менялась его скорость? Правильно, только возрастала! Поэтому наименьшей она была при $t = t_0$, а наибольшей при $t = t_3$! Спасибо математику!

Задача 3. На лёгкой, длинной, нерастяжимой нити совершает малые колебания ведро с песком. Песок по песчинке высыпается через отверстия в дне ведра. Если пренебречь внешними воздействиями на эту систему, то будет ли меняться с течением времени период колебаний ведра?

Решение. Если эту задачу первым прочитает математик, то он непременно обратит внимание на слова «малые колебания», «нерастяжимой нити» и может сказать, что решение основывается на формуле периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

В ней 2π, g – константы, l – тоже постоянная ввиду «нерастяжимости нити», от массы песка T не зависит, следовательно, T – тоже величина неизменная.

Однако физик может вполне справедливо упрекнуть математика в небрежном обращении к определению математического маятника, где под ним подразумевается «математическая точка». Такой точкой здесь следует считать центр тяжести ведра с песком. Но тогда длиной математического маятника L является не длина «нерастяжимой нити», а расстояние от точки подвеса до центра тяжести системы (рис. 3).

При высыпании песка центр тяжести смещается вниз, L увеличивается, поэтому T возрастает с течением времени. Когда песка останется достаточно мало, центр тяжести системы начнёт подниматься (учитываем массу ведра!), а период колебаний уменьшается.

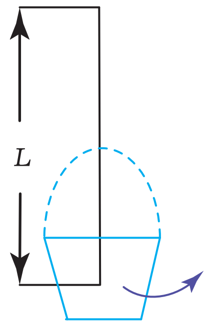

Рис. 3

Задача 4. Две материальные точки движутся с постоянными скоростями v_1 и v_2 по прямым, угол между которыми равен α. Точка, имеющая скорость v_1, проходит точку пересечения этих прямых на τ секунд раньше другой. Каково минимальное расстояние между этими точками? Каким будет это расстояние при $\alpha = 0$ (в том числе при $v_1 = v_2$)? См. рис. 4.

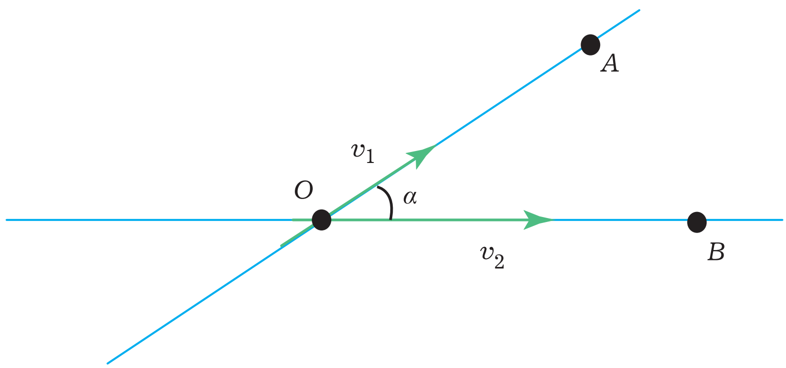

Рис. 4

Решение. Математик начнёт устанавливать зависимость $S(t)$. Пусть в некоторый момент времени t одна точка совпадает с A, другая с B, тогда

$$OA = v_1 t,\quad OB = v_2(t + \tau),$$

а квадрат расстояния между ними по теореме косинусов из треугольника OAB равен:

$$S^2(t) = v_1^2 t^2 + v_2^2 (t+\tau)^2 - - 2v_1 v_2 t(t+\tau)\cos\alpha.$$

Если вы, читатель, прочитав статью А.И. Ромашкевича в журнале «Потенциал» №12, 2013 г., стр. 26 – 36, воспользуетесь всё же этим математическим методом и, найдя производную функции $S^2(t)$, правильно вычислите минимум $S(t)$, то вслед за автором статьи мы скажем – это дело вашего вкуса. Можем только предложить ещё один математический вариант, без производной. Так как зависимость квадрата расстояния от времени t – квадратичная, то нам надо лишь найти координаты вершины параболы $(t_0,\ S^2(t_0))$, а затем и $S(t_0)$ – минимум расстояния.

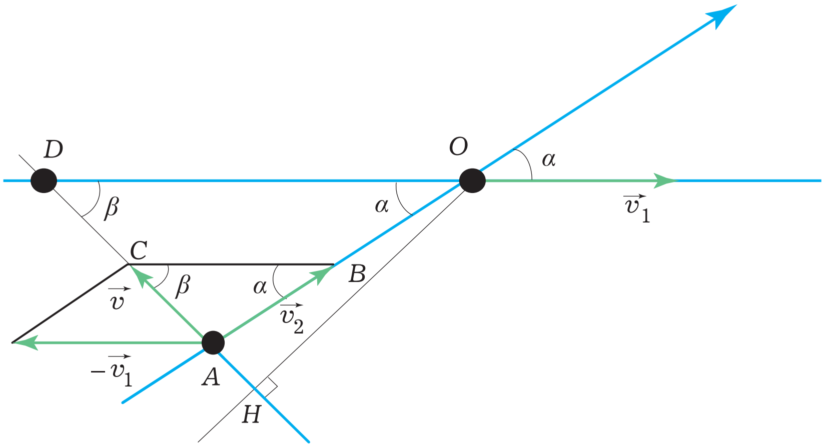

Рис. 5

А мы будем использовать предложенный автором упомянутой статьи физический вариант.

Пусть первая точка в некоторый момент времени совпадает с точкой O – точкой пересечения прямых. Свяжем с этой точкой систему отсчёта. Тогда в этой системе земля движется со скоростью $-\vec{v}_1$, а по этой движущейся земле перемещается точка A со скоростью $\vec{v}_2$ $(AO = v_2\tau)$. В итоге A движется относительно точки O со скоростью

$$\vec{v} = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

по прямой, вдоль которой направлен вектор $\vec{v}$. Тогда кратчайшим расстоянием между рассматриваемыми точками будет длина перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую AD. Здесь нам понадобится немного геометрии. Из треугольника ABC:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha}$$

по теореме косинусов. Треугольники ABC и ADO подобны с коэффициентом подобия τ:

$$\frac{AO}{v_2} = \tau,$$

поэтому $DO = v_1\tau$. По теореме синусов из треугольника ABC:

$$\frac{v}{\sin\alpha} = \frac{v_2}{\sin\beta}.$$

Отсюда

$$\sin\beta = \frac{v_2\sin\alpha}{v}.$$

Из треугольника ADO:

$$OH = DO\sin\beta =$$

$$= v_1\tau\frac{v_2\sin\alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_1\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{v_1v_2\tau\sin\alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha}} = S_{min}$$

есть минимальное расстояние. Мы, в отличие от упоминавшейся выше статьи, не задали численные значения величин, чтобы дать возможность физику продолжить проверку соответствия полученного результата и реальной действительности в некоторых частных, очевидных случаях.

Нами рассмотрен случай, когда угол α между $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – острый. Положим $\alpha = 0$. Физически это значит, что точки движутся в одном направлении и по одной прямой. При $\alpha = 0$ $\sin\alpha = 0$, числитель формулы для S_{min} обращается в нуль. И в самом деле, в процессе движения какая-то из точек в некоторый момент обогнала другую, и расстояние между ними было равно нулю, или обгон ещё предстоит. Всё равно $S_{min} = 0$.

Однако пунктуальный математик заметит, что для равенства нулю дроби недостаточно равенства нулю числителя. Знаменатель при этом должен быть отличен от нуля! При $\alpha = 0$ $\cos\alpha = 1$, и знаменатель принимает вид:

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2} = |\, v_1 - v_2 \,|.$$

Он отличен от нуля, когда $v_1 \neq v_2$, то есть приведённые выше рассуждения справедливы, когда точки движутся с различными скоростями (только тогда возможен обгон!).

А если $v_1 = v_2$, $\alpha = 0$, получаем

$$S_{\min} = \frac{0}{0},$$

с точки зрения математики бессмысленное (неопределённое) выражение. Однако физик легко найдёт ему толкование: точки движутся по прямой в одном направлении с одинаковыми скоростями, следовательно, расстояние между ними неизменно. Его-то и будем считать минимальным (или максимальным, если угодно). Следовательно, при $\alpha = 0$ и $v_1 = v_2$ минимальное расстояние может быть любым (а именно таким, каким оно было в начале движения точек).

Несколько иначе обстоят дела, если угол α между $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ равен 180°. В этом случае $\sin\alpha$ будет равен 0, что опять же физически означает движение точек вдоль одной прямой, но в противоположных направлениях. Ясно, что в этом случае минимальное расстояние может быть только равным 0. Это же следует и из формулы для S_{min}, так как $\cos\alpha = -1$ и знаменатель равен

$$v_1 + v_2 \neq 0.$$

«Крючкотвор»-математик может сказать, что если одна из точек покоится, например, $v_1 = 0$, а $v_2 \neq 0$, то, например, при $\alpha = 90^\circ$ получим

$$S_{min} = 0.$$

Но первая точка покоится где-то на своей дороге, а вторая движется по перпендикулярной ей. Как же расстояние между ними станет равным нулю?!

«Реалист»-физик парирует вывод: по условию обе точки проходят перекрёсток, только с разницей в τ секунд. Поэтому покоящаяся точка в соответствии с этим условием находится не где-то, а на перекрёстке, куда через τ с попадёт вторая, движущаяся, и расстояние станет равным 0.

Нам представляется, что привычка такого физико-математического анализа результатов решения задач весьма полезна как для проверки правильности решения, так и для построения и оценки моделей различных процессов.

Задача 5. На невесомом стержне длиной L висит небольшой деревянный шарик массой M. Летящая горизонтально со скоростью v пуля массой m застряла в шарике. На какой максимальный угол от вертикали отклонится стержень?

Решение. Математик, знающий закон превращения кинетической энергии в потенциальную, может немедленно записать уравнение

$$\frac{mv^2}{2} = (m + M)gh$$

(рис. 6), найдя из него h, получить

$$\cos\alpha = \frac{L-h}{L} = 1 - \frac{h}{L} = 1 - \frac{mv^2}{2(m+M)gL}.$$

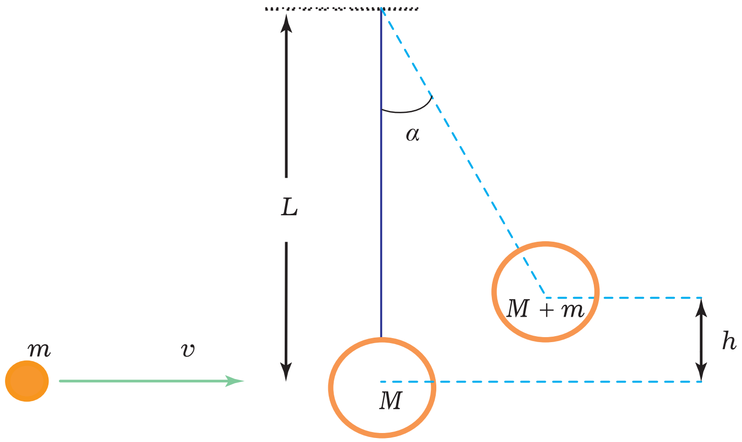

Рис. 6

Но физик скорее всего резонно заметит, что предложенная математическая модель физических процессов слишком упрощённая. Она, например, не учитывает, что при столкновении и застревании пули часть её кинетической энергии пошла на выделении тепла Q. То есть здесь не сохраняется механическая энергия. И поэтому надо сначала применить закон сохранения импульса:

$$mv = (m + M)u,$$

где u – начальная скорость системы шарик – пуля. Отсюда

$$u = \frac{m}{m + M}v.$$

Только теперь применяем закон сохранения механической энергии

$$\frac{(m+M)u^2}{2} = (m+M)gh$$

и получаем

$$\cos\alpha = 1 - \frac{m^2v^2}{2(m + M)^2 gL}.$$

Кстати, можем найти и количество тепла, выделившегося при взаимодействии пули и шарика:

$$Q = \frac{mv^2}{2} - \frac{(m+M)u^2}{2} =$$

$$= \frac{mv^2}{2}\left(1 - \frac{m}{m+M}\right)$$

как разность кинетических энергий системы до столкновения и после него.

– Очень хорошо, – говорит математик, – но из твоей уточнённой модели, а именно из формулы для $\cos\alpha$, следует, что косинус при достаточно больших значениях v (или достаточно малых L) может принимать значения, меньшие -1?! Мне понятно, что при $\cos\alpha = 0$ стержень, к которому прикреплён шарик, перпендикулярен вертикали, а при

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

шарик находится выше точки подвеса, и стержень составляет с вертикалью, направленной вниз, тупой угол 120°. Но что значит $\cos\alpha = -2$, например?!

Слово физику: это значит, что уравнение сохранения механической энергии, из которого получена формула для $\cos\alpha$, можно записать лишь в том случае, когда ВСЯ кинеская энергия пули велика, а длина стержня L мала (поэтому потенциальная энергия системы шар – пуля относительно начального положения шара не превышает $(m + M)g2L$), то вся кинетическая энергия системы не может перейти в потенциальную. Шар с пулей будет бесконечно долго вращаться вокруг точки подвеса (если всеми силами трения пренебречь), и не имеет смысла говорить о максимальном угле....

Формулы безмолвны, только пытливому уму, владеющему методами и физики, и математики, они могут рассказать о своей глубинной сути. Желаем вам успеха в постижении этой сути.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Порозовевший город

Не думайте, что все явления природы уже хорошо известны. Даже в обычных городских условиях возникают «необычные» природные явления. Например, в феврале 1989 года жители Петропавловска увидели в какой-то момент город... розовым. Всё приобрело вдруг удивительный вид: деревья, дом, облака окрасились на некоторое время в розовый цвет, а затем эта красивая картинка исчезла.

Свидетели этого события были поражены. Никому прежде наблюдать такое явление или читать о нём не приходилось. Что же произошло? Сотрудники местного гидрометеобюро прежде всего успокоили тогда горожан тем, что произошедшее – «шутка» природы, вполне естественное и безопасное явление, и дали ему такое объяснение.

Сильный ветер поднял в воздух пыль, снег, льдинки, когда над Петропавловском шла смена воздушных масс. Восточный поток воздуха образовал над городом верхний тонкий слой облачности, а западный – низкий плотный слой облаков, послуживший экраном для солнечных лучей. Отражаясь, они проходили сквозь воздух, насыщенный снежинками и кристалликами льда, которые служили призмочками, разлагающими свет на известные компоненты. И город попал преимущественно в «розовую» часть лучей. Но вскоре из-за поворота Земли вокруг своей оси эти солнечные лучи покинули его, и всё приобрело обычный цвет.