Сырцов Сергей Рудольфович
Доцент, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института технической акустики НАН Беларуси (г. Витебск).

О падении тел с нулевой высоты

Показано, как решение простой школьной задачи с пружинкой помогает понять и численно оценить достаточно сложные процессы, происходящие в реальных телах.

Почему в детстве бабушки постоянно просили нас не прыгать по домашним диванам и не шлёпаться с разбега на скамейки на детской площадке, опасаясь за их (и нашу) сохранность? Почему повзрослев, мы продолжаем бояться падающих даже с небольшой высоты относительно нетяжёлых предметов – утюгов, кирпичей, гантелей? Ведь если сделать всё по-спокойному – аккуратно положить тот же кирпич на ногу или тихонько сесть на скамейку, ничего экстраординарного не произойдёт – ничто не сломается и никому больно не станет. Немного поучив физику в школе, мы можем ответить на эти вопросы **«энергетическим» способом** (т.е. не вдаваясь в детали) – всё, что движется, обладает кинетической энергией, и она во всем виновата. Так-то оно, конечно, так, но хотелось бы узнать поподробнее, **как** в движущихся телах при их столкновении появляются силы, ломающие скамейки и делающие нам больно. Сделать это мы попробуем в процессе решения простой школьной задачи.

Задача. Тело массой m падает с высоты h на пружину с жёсткостью k_0. Найти максимальные значения деформации пружины и силы упругости, возникающие в ней.

Выделим несколько ключевых положений, которые занимает тело в процессе своего движения на пружине (рис.1):

0 – положение верха несжатой пружины;

1 – равновесное положение груза (пружина сжата на $\Delta_{ст} = x_1 = mg/k_0$);

2(2') – положения максимального сжатия (растяжения) пружины.

Физика происходящего следующая: а) попав на пружину, груз начинает её сжимать, проскакивает равновесное положение 1 и останавливается на уровне 2 (максимально сжав при этом пружину на $x_{max}=x_2$); б) в системе начинаются колебания груза около уровня 1 с амплитудой $A = x_{max} - x_1$ и периодом $T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k_0}}$ (1); в) после затухания колебаний тело оказывается на равновесном уровне 1.

Наша цель – определить x_{max} и $F_{max} = k_0\, x_{max}$.

Данный пример может служить прекрасной иллюстрацией эффективности использования закона сохранения энергии при решении задач механики. В начальном и конечном положениях груз не движется и его кинетическая энергия равна нулю. Поэтому решение нашей задачи основано на приравнивании **изменения гравитационной потенциальной** энергии груза **изменению упругой** энергии деформации пружины. Начальную энергию груза удобно отсчитывать от уровня 2: $П_1 = mg(x_2 + h)$; тогда потенциальная энергия системы в конечном положении 2 заключена только в сжатой пружине и равна $П_2 = k_0\, x^2_2/2$.

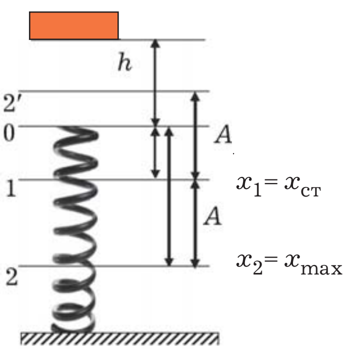

Рис.1

Из закона сохранения механической энергии $П_1 = П_2$ следует квадратное уравнение для определения $x_2 = x_{max}$:

$$mg(x_2+h) = k_0\, x_2^{\,2}/2. \qquad (3)$$

Два корня этого уравнения

$$x_{2,2'} = \Delta_{ст}\cdot\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{ст}}}\right) \qquad (4)$$

соответствуют крайним положениям груза в процессе его колебания на пружине с амплитудой

$$A = \Delta_{ст}\cdot\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{ст}}} \qquad (5)$$

около равновесного положения 1 (в котором сила упругости $F_0 = mg$). Заметим, что в этом положении груз оказался бы и в случае своего **статического** (т.е. очень медленного) опускания на пружину.

Максимальную деформацию (сжатие) в процессе колебания груза пружина приобретает при его нахождении в положении 2:

$$x_{max} = x_2 = \Delta_{ст}\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{ст}}}\right). \qquad (6)$$

Максимальная сила упругости определяется по закону Гука:

$$F_{max} = k_0\, x_{max} = mg\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{ст}}}\right). \qquad (7)$$

При нахождении груза в положении 2' в пружине возникает максимальное растягивающее усилие

$$F'_{max} = k_0\, x_{2'} = mg\left(1-\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{ст}}}\right). \qquad (8)$$

Соотношения (6) – (7) отвечают на поставленные в задаче вопросы и полны сюрпризов и неожиданностей. Как и следовало ожидать, максимальные деформация и сила упругости в пружине **существенно зависят от высоты падения груза *h***. Нагрузки, воздействия которых на другие тела зависят не только от их веса $P_0=mg$, но и наличия у них кинетической энергии, называются **динамическими**. С проявлением особенностей действия такой нагрузки мы и столкнулись в нашей простой задаче. Главная из них – пружина ведёт себя так, как будто на неё **статически укладывают груз увеличенного** веса $P=Kmg > mg$. Динамический коэффициент

$$K=\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}\right) \qquad (9)$$

характеризует отличие влияния на пружину **движущейся нагрузки от статической.** С увеличением h значение K существенно возрастает, и движущаяся нагрузка превращается в грозную силу. Например, при падении кирпича (m=5 кг) с высоты всего h=12см на пружину с $k\approx$5кн/м коэффициент $K\approx6$ и на пружину начинает «действовать» целая стопка кирпичей!

Ну а что будет, если высота падения груза стремится к нулю: $\boldsymbol{h \to 0}$? **Здравый смысл** подсказывает, что эффектами, связанными с движением нагрузки в этом случае, можно пренебречь. Действительно, казалось бы, нагрузке неоткуда падать, и отличие величины её воздействия на пружину от статического случая должно исчезнуть. Как бы не так! Из полученных соотношений следует, что K=2 и **максимальные значения деформации и силы упругости вдвое превышают свои статические значения!** И здесь нет никакого подвоха – кинетическая энергия и здесь даёт о себе знать и уравнения описывают все правильно. Оказывается, мало привести в контакт нагрузку с пружиной – результат того, что произойдёт, дальше зависит от того, **как это сделать**.

Если не контролировать процесс приложения нагрузки и предоставить пружине и грузу самим разбираться между собой, то даже при h=0 **(внезапное действие или мгновенное приложение нагрузки)** груз всё равно начинает падать, сжимая пружину. Приобретая при этом скорость, он проскакивает равновесное положение 1 и, продолжая сжимать пружину, останавливается только в положении 2. В нём пружина и испытывает наибольшую деформацию, а сила упругости достигает своего максимального значения, определяемого выражением (7).

Интересно проследить для h=0 за балансом энергии системы при различных вариантах нагружения пружины. Независимо от способа приложения нагрузки, потенциальная энергия $mg\Delta_{\textbf{ст}}/2$ груза в конечном итоге превращается в потенциальную энергию деформированной пружины $E_{\text{деф}}=k\,\Delta_{\text{ст}}{}^2/2$ (и груз оказывается на уровне 1). Но при **постепенном** увеличении нагрузки (от нуля до mg) система последовательно переходит от одного равновесного состояния в другое, пока не окажется в положении 1. Никакого превращения механической энергии в тепловую при этом не происходит. При **мгновенном** же приложении нагрузки, в **результате возникновения колебаний** в энергию деформации пружины может превратиться энергия **в 4 раза большая** – $E_{\text{деф}}$=2 $mg\Delta_{\text{ст}}$. Так как $E_{\text{деф}}$~Δ^2, это приводит к **удвоению максимальных**

деформаций (и, соответственно, сил упругости). По мере затухания колебаний (все колебания когда-нибудь затухают) 3/4 начальной механической энергии системы **переходит во внутреннюю энергию, т. е. в тепло.**

Конечно, объекты из реальной жизни (стержни, балки и т.п.) внешне мало напоминают пружинку из нашей школьной задачи (рис. 2). Поэтому не может не удивлять, что увеличение деформаций и **напряжений** $\sigma = F/S$ (силы упругости на единицу площади) даже в сложных строительных конструкциях под действием падающих на них тел определяется соотношениями, **совпадающими с «пружинными» из нашей задачи:**

$$\sigma = \sigma_{ст} K = \sigma_{ст}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}\right), \qquad (10)$$

где $\Delta_{ст}$ и $\sigma_{ст}$ – деформация и напряжение в системе при статически приложенной нагрузке. В частности, при падении **с нулевой высоты** вновь наблюдается увеличение напряжения в **два раза (*K*=2)!**

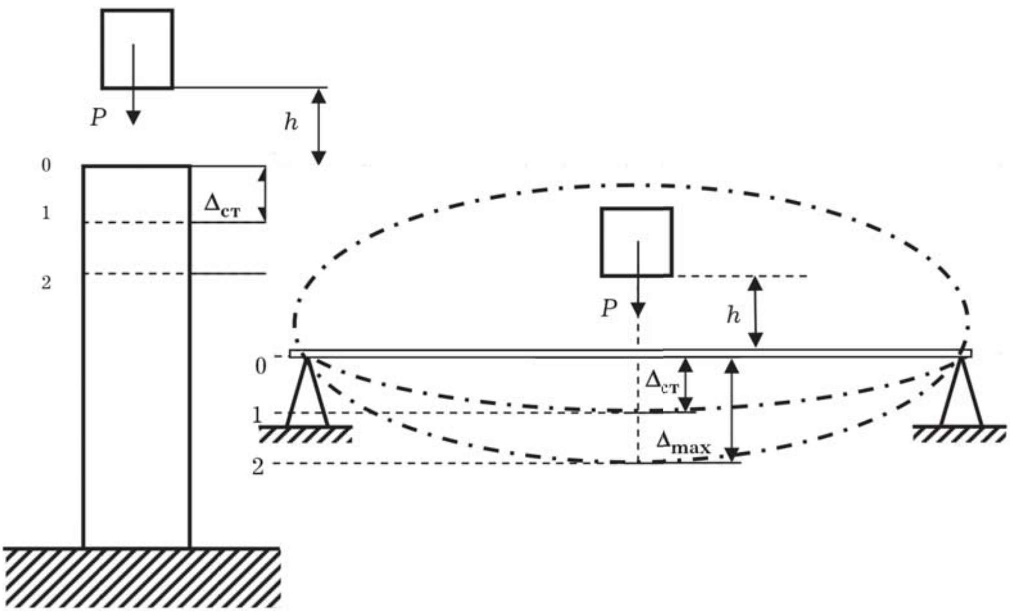

Рис.2

Понятно, что такое совпадение **не может быть случайным** – за схожестью результатов должны стоять **глубокие физические причины.** Эти причины изучаются рядом специальных наук – сопротивлением материалов, строительной механикой и др. Анализ, проведённый в их рамках, показывает, что приложение динамических нагрузок к конструкциям любой степени сложности **вызывает появление в них колебаний** и рассмотренных выше эффектов, сопутствующих им.

Изображенные на рис.2 конструкции (и множество других) роднит с нашей пружинкой то, что все перемещения в них можно охарактеризовать одной переменной величиной – вертикальным отклонением частиц системы от равновесного положения. Все такие конструкции относятся к системам с **одной степенью свободы.** Поэтому совсем не удивительно, что период **возникающих в них колебаний** определяется по знаменитой формуле математического маятника (с длиной, равной статической деформации системы), которую знает любой школьник:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\Delta_{ст}}{g}}. \qquad (11)$$

Теперь можно дать и оценку медлительности (статичности) приложения нагрузки. Если время её приложения $t \gg T$, то такую нагрузку можно считать **статичной**; если же $t \leq T$, то можно говорить о **внезапности** её приложения.

Часто из-за большой жёсткости реальных конструкций (малые $\Delta_{ст}$) амплитуда колебания слишком мала, чтобы их можно было заметить невооружённым глазом. Но главный вывод, сделанный нами при решении задачи, остаётся в силе – **«каждая система в процессе возникающих колебаний достигает своего критического положения 2, в котором оно испытывает наибольшую силовую нагрузку (существенно больше статической)».** В решении нашей задачи содержится и ответ на важный для практики вопрос – **как избежать возникновения повышенных деформаций и напряжений?** Полученные соотношения подсказывают – нужно увеличить значение $\Delta_{ст}$ т.е **повысить податливость** (уменьшить жёсткость) системы. Сделать это можно, например, путем использования смягчающих удар пружин – этот приём широко применяется в строительстве (рис.3).

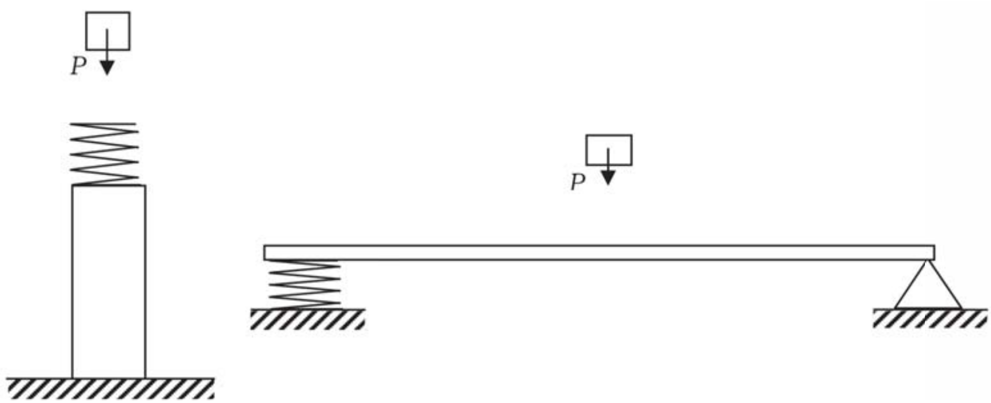

Рис.3

Наличие даже небольших промежуточных упругих элементов (перчаток, тапочек и т.п.) может существенно облегчить участь и наших конечностей при встрече с упомянутыми выше кирпичами, утюгами и гантелями. На этом же принципе основано использование легко деформируемых материалов (пенопласт, мягкий полистирол) в качестве защитных упаковочных материалов. А вот удвоения напряжений от внезапного действия нагрузок можно избежать только одним способом –

этой внезапности не допускать! В том же строительстве, например, настоятельно не рекомендуется быстро удалять все поддерживающие опалубку железобетонного перекрытия стойки. Теперь нам понятно, почему даже с нулевой высоты лучше не падать на скамейки, а аккуратно на них садиться.

Известно, что в любой школьной задаче рассматриваются сильно упрощённые и идеализированные объекты и процессы. Не удалось избежать сильной идеализации и нам. В частности, при решении мы **«забыли»** об упругих свойствах падающего тела, считая его жёсткость существенно больше пружинной $k»k_0$ (12). На самом деле это условие не всегда выполняется. Но и здесь школьных знаний вполне хватает, чтобы прояснить ситуацию. Так как согласно третьему закону Ньютона силы, действующие на груз и пружину, одинаковы, то энергия достаётся преимущественно телу с меньшей жесткостью: $E_{деф} = F^2/2k \sim 1/k$. Поэтому в случае выполнения условия (12) энергией деформации (и самой деформацией) падающего груза можно пренебречь, что и было нами сделано при записи соотношений (6) – (7). Если же падающее тело не столь жёсткое, то на его деформацию расходуется часть энергии системы, а энергия, достающаяся пружине, уменьшается. Вследствие этого уменьшаются и определяемые соотношением (10) напряжения в различных конструкциях – падающие «мягкие» кирпичи не столь опасны, чем обычные.

Остаётся только удивляться, как много можно понять в достаточно сложных физических процессах, проанализировав решение простой школьной задачи. Конечно, чтобы рассчитать динамические напряжения в реальных конструкциях и механизмах, одних школьных знаний мало. Надо постараться поступить в хороший институт, чтобы постичь специальные науки, для этого предназначенные. Но начинать надо, всё-таки, **с уважительного отношения к урокам физики в школе и вдумчивого анализа решаемых на них задач.**

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Закон всегда закон

Налетел я на столб в воскресенье,
Отлетел на асфальт без движенья.
Всё оттого, что угол паденья
Равен углу отраженья.

О. Григорьев

Профессионализм превыше всего

Врач больницы подходит к кровати тяжело больного коммерсанта и спрашивает медсестру:

- Какая у него температура?

- 39,5.

В этот момент больной открыл глаза и сказал:

- Как дойдёт до 40 – продавайте!