



Иванов Анатолий Ефимович
 Кандидат технических наук,
 доцент кафедры «Основы физики»
 МГТУ имени Н.Э. Баумана.

О геометрической (лучевой) оптике

Геометрическая (лучевая) оптика – раздел, в котором изучаются закономерности распространения света при условиях, когда можно пренебречь явлениями дифракции и интерференции. Эти явления обнаруживаются тем труднее, чем меньше длина волны λ .

Геометрическая оптика – предельный случай волновой реальной оптики, когда длина волны света намного меньше характерного размера тела или области, охваченной процессом: $\lambda \ll L$.

Исходные понятия и определения

а) Точечный источник света – источник, излучающий свет по всем направлениям равномерно и размерами которого по сравнению с расстоянием от источника до места наблюдения можно пренебречь.

Электромагнитные волны, испускаемые источником с длиной волны от 0,38 до 0,77 мкм, – это световые волны. Они переносят энергию. Плотность потока энергии $\vec{S} = w \cdot \vec{c}$, где w – плотность энергии электромагнитного поля, c – скорость распространения волны, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ – вектор Умова – Пойнтинга. Будем предполагать, что источник излучает энергию равномерно во все стороны.

Если среда однородна и изотропна, то излучаемая источником волна

является всюду сферической (радиус R). Частным случаем сферической волны является плоская волна. Плоская волна есть волна от точечного источника при $R \rightarrow \infty$.

б) Луч света – абстрактное математическое понятие, которое используется для характеристики направления распространения световой волны, т.е. это линия, вдоль которой распространяется свет. О существовании луча в таком смысле можно говорить лишь постольку, поскольку он входит в состав светового пучка, содержащего бесконечное множество лучей. Реальное существование имеют не математические лучи и бесконечно тонкие пучки света, а *пучки конечного поперечного сечения*,

вырезаемые, например, диафрагмами. Поэтому под лучом в физическом смысле этого слова мы будем понимать конечный, но достаточно узкий световой пучок, который ещё может существовать изолированно от других пучков. Иначе можно сказать так: физический луч – это линия, ка-

точечный источник,
лучи – радиальные линии

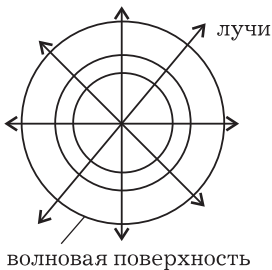


Рис. 1

сательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора плотности потока энергии \vec{S} .

В случае волны, распространяющейся в изотропной среде, лучи нормальны к волновым поверхностям; например, рис. 1 и рис. 2.

плоская волна,
лучи – параллельные линии

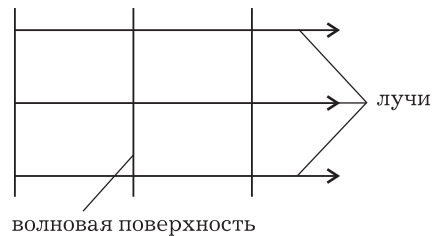


Рис. 2

Основные законы геометрической оптики

1. Закон прямолинейности света.

В оптически однородной и изотропной среде свет распространяется прямолинейно.

2. Закон отражения.

Отражённый луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью, восстановленной в точке падения луча на границе двух сред. Угол падения равен углу отражения.

3. Закон преломления.

Преломлённый луч (на границе двух сред 1 и 2) монохроматического света лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью, восстановленной в точке падения луча на этой границе. Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных веществ и равна отношению показателя преломления второй среды относительно первой:

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \text{const},$$

или $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, где n_1 и n_2 – показатели преломления сред 1 и 2, $v_1 = c/n_1$, $v_2 = c/n_2$, c – скорость света в вакууме, v_1 и v_2 – в среде.

Докажем закон преломления, пользуясь принципом Ферма. Найдём точку, в которой должен преломиться луч, распространяясь от A до B , чтобы оптическая длина пути была минимальна (рис. 3). Для произвольного луча оптическая длина пути равна

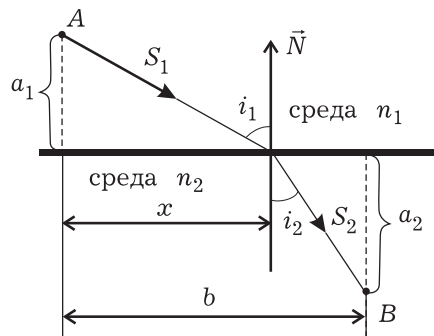


Рис. 3

$$L = n_1 S_1 + n_2 S_2 = \\ = n_1 \sqrt{a_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}.$$

Чтобы найти экстремальное значение, продифференцируем L по x и приравняем производную нулю:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{n_1 x}{2\sqrt{a_1^2 + x^2}} - \frac{n_2(b-x)}{2\sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow n_1 \frac{x}{S_1} - n_2 \frac{b-x}{S_2} = n_1 \sin i_1 - n_2 \sin i_2 = 0,$$

то есть

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

Что и требовало доказать.

Примеры численных значений показателя преломления (для длины волны, равной $\lambda = 0,589$ мкм – жёлтый свет):

Воздух	Стекло	Вода	Алмаз
1,0003	1,515	1,333	2,42

Полное отражение. Преломление света при переходе из среды оптически более плотной в среду оптически менее плотную имеет некоторые существенные особенности. Как следует из формулы (1), угол преломления при этом всегда больше угла падения. Этим объясняется тот факт, что, например, все предметы кажутся ближе расположенными к поверхности воды, чем на самом деле. (См. задачу 1.)

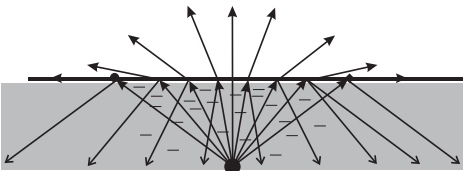


Рис. 4

Можно найти такой угол падения i_0 , при котором угол преломления i_2 станет равным 90° , т.е. преломленный луч будет скользить вдоль по-

верхности раздела (рис. 4). При углах падения, больших i_0 , преломленный луч вовсе исчезнет, а энергия отражённого света будет равна энергии падающего. Явление, при котором падающий на поверхность раздела двух прозрачных сред свет полностью отражается от этой поверхности, называется *полным внутренним отражением*.

Угол падения, при котором угол преломления равен 90° , называется предельным углом полного отражения.

Закон преломления для этого случая имеет следующий вид:

$$\frac{\sin i_0}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (2)$$

Для границ раздела среда–воздух

$$\sin i_0 = \frac{1}{n_1}.$$

Полным внутренним отражением объясняется блеск пузырьков воздуха в воде, блеск асфальта в жаркую солнечную погоду («мокрый» асфальт) при езде на автомобиле.

Дисперсия света. Показатель преломления разный в различных веществах и зависит от длины волны, эта зависимость $n = f(\lambda)$ называется *дисперсией* света (*dispersio* – рассеяние, лат.). Дисперсия света была открыта И. Ньютоном. Благодаря дисперсии луч белого света, пройдя через преломляющую линзу, оказывается разложенным на различные монохроматические лучи. Эти лучи на экране образуют дисперсионный спектр (разноцветные полосы). Такой спектр легко наблюдать при помощи призмы.

Рассмотрим сначала ход монохроматического луча через призму, изготовленную из стекла или других прозрачных материалов; луч дважды преломится на границе раздела двух сред

(рис. 5). Для простоты будем полагать, что призма находится в вакууме.

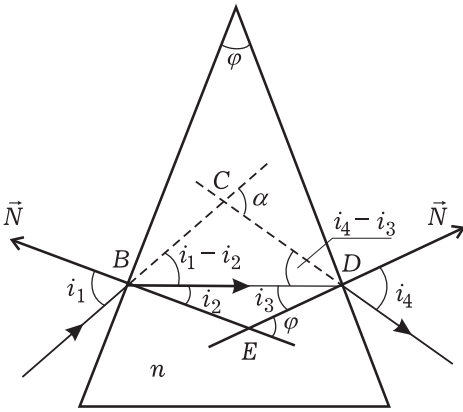


Рис. 5

n – абсолютный показатель преломления призмы;
 φ – преломляющий угол призмы.

Будем считать, что $\varphi \ll 1$, т.е. $\sin \varphi \approx \varphi$, рассматриваем тонкую призму.

Кроме того будем полагать, что $i_1 \ll 1$, т.е. $\sin i_1 \approx i_1$.

После двукратного преломления луч отклонится на угол α , называемый *углом отклонения*.

Согласно закону преломления:

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n, \quad \frac{\sin i_3}{\sin i_4} = \frac{1}{n}.$$

Легко показать что $i_2 \ll 1, i_3 \ll 1, i_4 \ll 1$ при $i_1 \ll 1$ и $\varphi \ll 1$, поэтому закон преломления запишется в виде:

$$\frac{i_1}{i_2} = n, \quad \frac{i_3}{i_4} = \frac{1}{n} \Rightarrow i_1 = ni_2, \quad i_4 = ni_3. \quad (3)$$

Величина угла отклонения α зависит от n и φ . Из треугольника BDC следует:

$$\alpha = (i_1 - i_2) + (i_4 - i_3).$$

С учётом (3)

$$\alpha = i_2(n - 1) + i_3(n - 1),$$

или $\alpha = (n - 1)(i_2 + i_3), \quad \alpha = (n - 1)\varphi.$

Таким образом,

$$\alpha = \alpha(i_1, n, \varphi).$$

Так как показатель преломления зависит от длины волны, т.е. $n = n(\lambda)$, то для красного и фиолетового света

$$\alpha_{кр} = (n_{кр} - 1)\varphi,$$

$$\alpha_{ф} = (n_{ф} - 1)\varphi.$$

Разность

$$\alpha_{ф} - \alpha_{кр} = (n_{ф} - n_{кр}) \cdot \varphi = D - \text{угол дисперсии.}$$

Объясняется разложение света тем, что белый свет состоит из электромагнитных волн с разной длиной волны, и показатель преломления света зависит от его длины волны (рис. 6). Наибольшее значение он имеет для света с самой короткой длиной волны – фиолетового. Наименьшим показателем преломления обладает самый длинноволновый свет – красный.

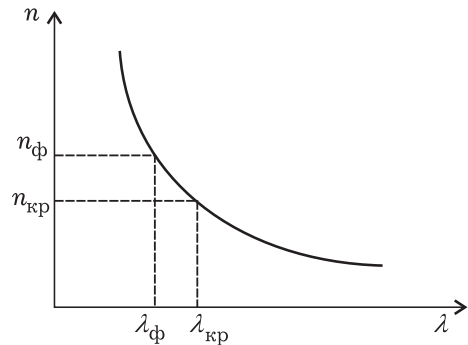


Рис. 6

На рис. 7 представлена картина разложения белого света при преломлении в призме. Для прозрачных тел показатель преломления фиолетовых (ф) лучей наибольший, затем следуют лучи синие (с), голубые (г), зелёные (з), жёлтые (ж), оранжевые (о) и, наконец, красные (к), которые имеют наименьший показатель преломления. В соответствии с этим угол отклонения α для фиолетовых лучей наибольший, для красных – наименьший,

и луч белого цвета, падающий на призму, по выходе из неё окажется разложенным на ряд цветных лучей, т.е. образуется спектр лучей.

Призмы часто применяются в спектрометрах и спектрографах для получения спектров.

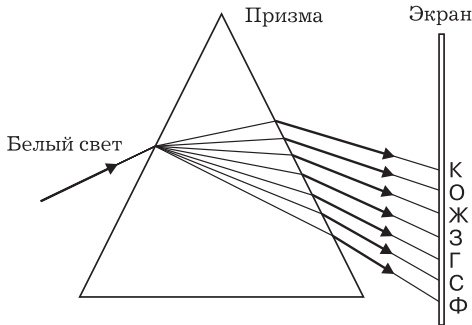


Рис. 7

4. Закон независимости световых лучей. При пересечении лучи не возмущают друг друга. Это верно при малых интенсивностях света. При интенсивностях, достигаемых с помощью лазеров, независимость световых лучей перестаёт соблюдаться.

5. Закон обратимости световых пучков. Если навстречу лучу, претерпевшему ряд отражений и преломлений, пустить другой луч, то он пойдёт по тому же пути, что и первый (прямой) луч, но в обратном направлении.

Этот закон непосредственно вытекает из принципа Ферма. Действительно, оптический путь, который минимален в случае распространения света из точки 1 в точку 2, окажется минимальным и в случае распространения в обратном направлении.

Задачи

1. Светящуюся точку, находящуюся в воде (показатель преломления воды $n_1 = 1,33$) (см. рис. 8), рассматривают невооружённым глазом (показатель преломления воздуха $n_2 = 1,0003$). Каково будет кажущееся расстояние светящейся точки до границы раздела сред h , если точка находится от этой границы на расстоянии $h_0 = 2$ м, а глаз расположен так, что в него попадают лучи, падающие на границу раздела под небольшими углами?

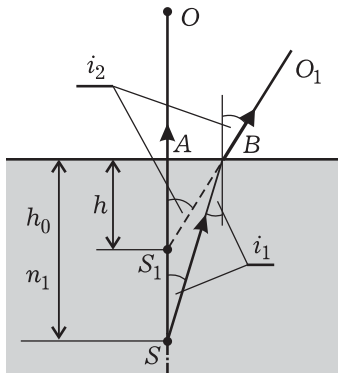


Рис. 8

Решение. Закон преломления:

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2,$$

или, учитывая малость углов:

$$n_1 \cdot i_1 = n_2 \cdot i_2. \quad (1)$$

Глаз увидит светящуюся точку в точке S_1 , лежащей на пересечении лучей OS и O_1S_1 .

Из треугольников ABS_1 и ABS следует: $AB = htg i_2 = h_0 tg i_1$, или, учитывая малость углов:

$$h \cdot i_2 = h_0 \cdot i_1 \Rightarrow h = h_0 \frac{i_1}{i_2}.$$

С учётом (1)

$$h = h_0 \frac{n_2}{n_1} = 2 \cdot \frac{1,0003}{1,33} = 1,5 \text{ м.}$$

Ответ. $h = 1,5$ м.

2. Постройте изображение $A'B'$ предмета AB в плоском зеркале (рис. 9). Укажите область видимости изображения.

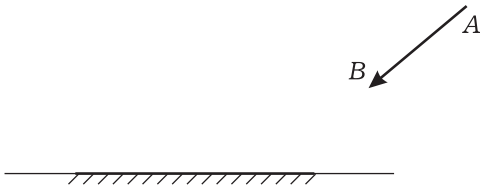


Рис. 9

Решение. Построение представлено на рис. 10.

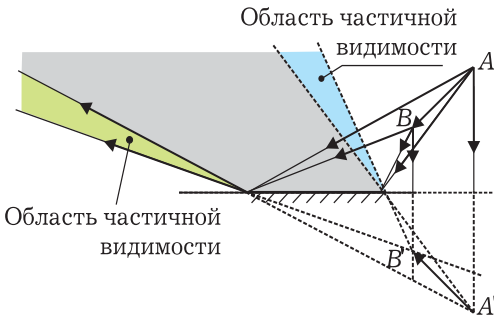


Рис. 10

3. Определите, в каких точках комнаты находящийся в ней человек видит в зеркале изображение экрана телевизора AB (рис. 11).

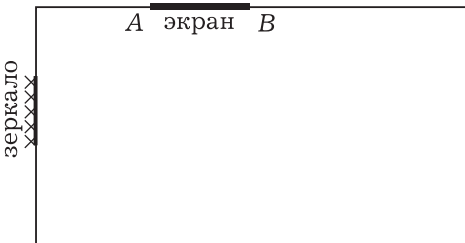


Рис. 11

Решение. Построение изображения в зеркале представлено на рис. 12. Зеркало играет роль «окна», через которое наблюдатель смотрит на изображение телевизора AB на экране. Вертикальной штриховкой отмечена область, откуда видно изображение точки B ; горизонтальной – точки A ; двойной – и точки A , и точки B .

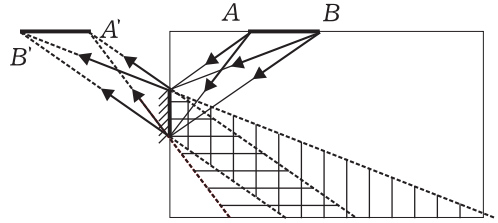


Рис. 12

4. Высота солнца над горизонтом составляет $\alpha = 38^\circ$. Под каким углом β к горизонту следует расположить плоское зеркало, чтобы осветить солнечными лучами дно вертикального колодца?

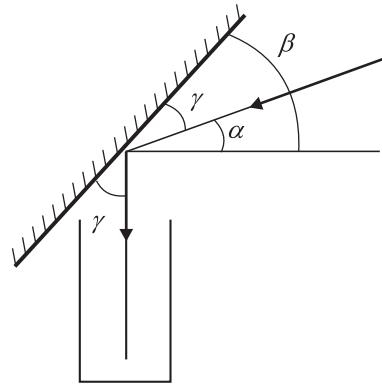


Рис. 13

Решение. Угол β , под которым надо расположить зеркало, находится из геометрического построения лучей (рис. 13):

$$\gamma + \alpha + \frac{\pi}{2} + \gamma = \pi ; \quad (1)$$

$$\beta = \gamma + \alpha . \quad (2)$$

Из (1) следует:

$$\gamma = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} . \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получаем:

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = 45^\circ + 19^\circ = 64^\circ .$$

Ответ. $\beta = 64^\circ$.

5. Плоское зеркало движется со скоростью $v = 1,5$ см/с, направленной по нормали к его плоскости. С какой по

модулю и направлению скоростью \vec{u} должен двигаться точечный источник S , чтобы его отражение S' в зеркале оставалось неподвижным?

Решение. Закон сложения скоростей (рис. 14) в проекции на ось Ox :

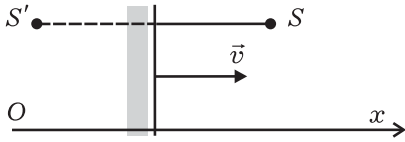


Рис. 14

для отражения

$$0 = v + v_{\text{отн}S'}, \quad (1)$$

для источника

$$u = v + v_{\text{отн}S}. \quad (2)$$

Из (1) следует: $v_{\text{отн}S'} = -v$. По определению, относительная скорость источника $v_{\text{отн}S} = -v_{\text{отн}S'} = +v$. Следовательно, $u = v + v = 2v = 3 \text{ см/с}$.

Ответ. $u = 2v = 3 \text{ см/с}$.

6. Кубический сосуд с непрозрачными стенками расположен так, что глаз наблюдателя не видит его дна, но полностью видит стенку CD , то есть $i_1 = 45^\circ$. Какое количество воды нужно налить в сосуд, чтобы наблюдатель смог увидеть предмет F , находящийся на расстоянии $b = 10 \text{ см}$ от угла D ? Ребро сосуда $a = 40 \text{ см}$. Показатель преломления воды $n_2 = 4/3$.

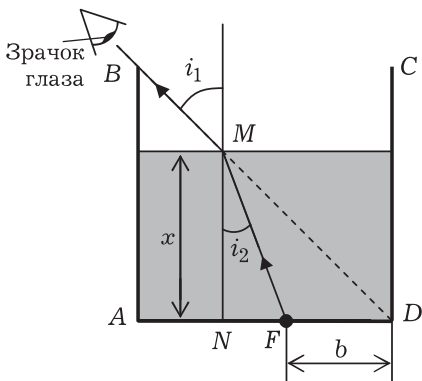


Рис. 15

Решение. Пусть высота налитой воды x , тогда $ND = x$ (рис. 15).

Закон преломления:

$$\sin i_1 = n_2 \sin i_2. \quad (1)$$

Из прямоугольного треугольника MNF следует:

$$NF = x - b = x \cdot \text{tg} i_2. \quad (2)$$

Из тригонометрии:

$$\begin{aligned} \text{tg} i_2 &= \frac{\sin i_2}{\cos i_2} = \frac{\sin i_2}{\sqrt{1 - \sin^2 i_2}} = \\ &= \frac{\sin i_1}{n_2 \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i_1}{n_2^2}}} = \frac{\sin i_1}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i_1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получаем выражение для x :

$$x = \frac{b}{1 - \frac{\sin i_1}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i_1}}} = \frac{b \cdot \sqrt{n_2^2 - \sin^2 i_1}}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i_1} - \sin i_1}.$$

Объем воды, который нужно налить в сосуд, чтобы наблюдатель смог увидеть предмет F , равен:

$$\begin{aligned} V &= x \cdot a^2 = \frac{b \cdot \sqrt{n_2^2 - \sin^2 i_1} \cdot a^2}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i_1} - \sin i_1} = \\ &= \frac{0,1 \cdot \sqrt{(4/3)^2 - (1/\sqrt{2})^2} \cdot 0,4^2}{\sqrt{(4/3)^2 - (1/\sqrt{2})^2} - (1/\sqrt{2})} = 0,043 \text{ м}^3 = 43 \text{ л} \end{aligned}$$

Ответ. $V = \frac{b \cdot \sqrt{n_2^2 - \sin^2 i_1} \cdot a^2}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i_1} - \sin i_1} = 43 \text{ л}$

7. Каким должен быть внешний радиус R изгиба световода (рис. 16), сделанного из прозрачного вещества с показателем преломления $n = 4/3$, чтобы при диаметре световода $d = 1 \text{ мм}$ свет, вошедший в световод перпендикулярно плоскости сечения, распространялся, не выходя наружу через боковую поверхность?

Решение. Луч AB образует наименьший угол падения α_0 на внешнюю поверхность. Условие невыхода света: угол α_0 должен быть больше предельного угла полного внутреннего отражения, т.е.

$$n \sin \alpha_0 \geq 1 \Rightarrow \sin \alpha_0 \geq \frac{1}{n}. \quad (1)$$

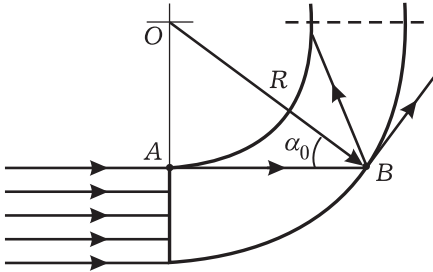


Рис. 16

Из треугольника OAB следует:

$$\sin \alpha_0 = \frac{R-d}{R}. \quad (2)$$

Решение системы уравнений (1) – (2) относительно R :

$$R \geq \frac{nd}{n-1},$$

или

$$R \geq \frac{4 \cdot 10^{-3}}{3(\frac{4}{3}-1)} \geq 4 \cdot 10^{-3} \text{ м} \geq 4 \text{ мм.}$$

Ответ. $R \geq \frac{nd}{n-1} = 4 \text{ мм.}$

8. Какую форму должна иметь поверхность зеркала, способного собирать широкий параллельный пучок световых лучей в одну точку? Как должен быть направлен пучок по отношению к этой поверхности?

Решение. Пучок параллельных лучей падает на зеркальную поверх-

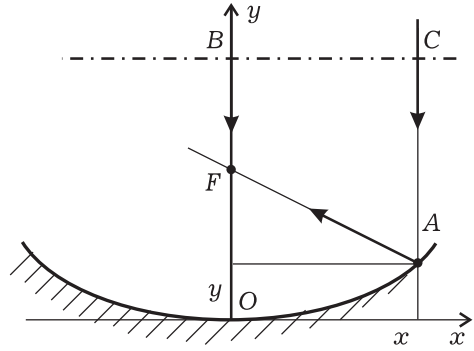


Рис. 17

ность, фокусирующую все лучи в точке F . Рассмотрим два параллельных луча: центральный, идущий вдоль оси OY , и произвольный, падающий на зеркало в точке A с координатами (x, y) (рис. 17).

На основании принципа Ферма свет распространяется по такому пути, оптическая длина которого $L = nS$ минимальна – все пути света между двумя точками *тавтохронны* (требуют для своего прохождения одинакового времени), поэтому

$$CA + AF = BO + OF. \quad (1)$$

Так как

$$BO = CA + y, \quad (2)$$

то в соответствии с теоремой Пифагора

$$AF = \sqrt{x^2 + (f-y)^2}, \quad (3)$$

где f – фокусное расстояние ($OF = f$).

Решая совместно (1) – (3), получаем

$$x^2 + f^2 + y^2 - 2fy = y^2 + f^2 + 2fy$$

или $x^2 - 4fy = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{4f}$ – уравнение параболы.

Из соображений симметрии это – поверхность вращения вокруг оси симметрии пучка – *параболоид вращения*.

Литература

1. *Иванов А.Е.* Оптика. Учебное пособие для поступающих в вузы. – М.: Изд-во МГКЕУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – 447 с.
2. *Тарасов Л.В., Тарасова А.Н.* Беседы о преломлении света. – М.: Наука, 1982. – 178 с. – (Библиотечка «Квант». Вып. 18).
3. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Оптика. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. – 1985.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Блиц-ответы

- Доверяете ли вы доллару и евро?
- Да, но чувствую их недоверие ко мне.

- Как изменяется долгота дня в течение года и почему?
- Летом дни длинные, а зимой короткие, потому что летом жарко, и они удлиняются, а зимой холодно, и они укорачиваются.

- Почему ты лысого человека называешь бедняжкой?
- Потому что ему шляпу не на что надеть.

- Что тебе больше нравится – решать задачи или экспериментировать?
- Читать фантастику!

- Кого можно назвать «повелителем планет»?
- Директора обсерватории.

- Что вы можете рассказать о молекулах соли?
- Они прекрасно сочетаются с молекулами огурца!

- Какая буква идёт после «А»?
- Все другие.

- Что делать, когда дела идут очень плохо?
- Радоваться, пока они не стали ещё хуже!

- Как вы наказываете сына?
- Ставлю в угол, где хуже всего ловится wi-fi.

- Ты знаешь, что завтра отключат горячую воду?
- Да, я уже налила её во все кастрюли.

- Когда компьютер заменит человека?
- Тогда, когда научится перекладывать всю ответственность на другой компьютер.