Подлесный Дмитрий Владимирович
Декан факультета довузовской подготовки, заведующий кафедрой общей физики Саровского государственного физико-технического института Национального исследовательского ядерного университета МИФИ (СарФТИ НИЯУ МИФИ), кандидат педагогических наук, доцент, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, заслуженный учитель Республики Мордовия.

Александров Дмитрий Анатольевич
Член жюри Всероссийских олимпиад школьников по физике, заместитель заведующего кафедрой общей физики Московского физико-технического института (МФТИ).

О движении тела, брошенного под углом к горизонту

Значительную долю упражнений на равноускоренное движение составляют задачи о свободном падении тел в однородном поле тяжести в пренебрежении сопротивлением воздуха. Нахождение условий максимальной дальности полёта тела в таких задачах связано с рядом трудностей, что особенно заметно, если точки бросания и падения находятся на разных высотах.

В настоящей публикации речь пойдёт о сравнительно новом подходе к решению ряда таких задач. Как станет ясно ниже, этот подход по своей сути может быть назван «геометрическим».

Простая задача

Рассмотрим вначале наиболее простую задачу из рассматриваемого класса. Её решение хорошо известно.

Задача 1. Под каким углом α к горизонту надо бросить камень с начальной скоростью v_0, чтобы дальность его полёта была максимальной? Точка бросания находится на одном горизонтальном уровне с точкой приземления.

Решение. Перемещение по горизонтали определяется по формуле:

$$L = v_0 \cos\alpha \cdot t.$$

Полное время полёта можно найти, приравняв к нулю перемещение по вертикали:

$$0 = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Откуда

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Подставляя t в выражение для L, получим

$$L = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Из последнего выражения видно, что максимальная дальность достигается при $\sin 2\alpha = 1$, т. е. если $\alpha = 45^\circ$.

Относительной простотой своего решения эта задача обязана тому, что здесь точки бросания и падения камня находятся на одном горизонтальном уровне. В более общем случае между этими точками есть разность высот h.

Более сложная задача

Задача 2. Камень бросают с башни высотой h с начальной скоростью v_0 (рис. 1). Под каким углом α к горизонту надо бросить камень, чтобы дальность его полёта была максимальной?

Замечание. Сразу же хочется обратить внимание на часто встречающуюся ошибку, допускаемую школьниками. На поставленный вопрос даётся ответ $\alpha = 45^\circ$, что абсолютно неверно! Ответ будет таким, только если камень бросают с поверхности земли, т. е. в случае, описанном в предыдущей задаче.

В условии задачи не сказано, что следует понимать под дальностью: это может быть как расстояние, измеренное по горизонтали, так и расстояние по прямой (наклонной) между начальной и конечной точками траектории. Но ответ на поставленный вопрос от этой неоднозначности не зависит, т. к. зависимость между двумя указанными расстояниями монотонна и максимума они достигают при одном и том же угле бросания.

Приведём два способа решения: старый – *«классический»*, описанный во многих задачниках и пособиях, и новый – *«геометрический»*, предлагаемый «на вооружение» читателю.

Первый способ *(«классический»)*. Рассмотрим движение камня в системе координат xOy, показанной на рис. 1.

Движение камня происходит с постоянным ускорением $\vec{g}$. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \\ y = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Пусть τ – время полёта камня. Тогда в момент времени $t = \tau$: $x = L$,

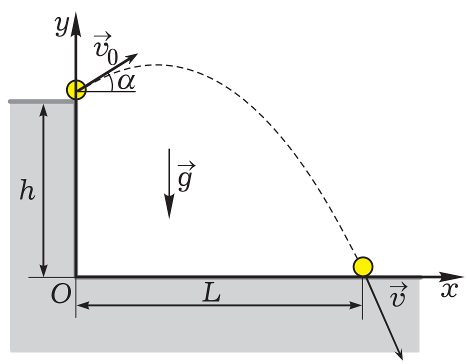

Рис. 1

а $y = 0$. Таким образом, мы приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} L = v_0 \cos\alpha \cdot \tau, \\ 0 = h + v_0 \sin\alpha \cdot \tau - \dfrac{g\tau^2}{2}. \end{cases} \qquad (1)$$

Далее можно было бы найти из второго уравнения (а оно квадратное) время полёта

$$\tau = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}},$$

и подставив в первое уравнение, найти дальность

$$L = v_0 \cos\alpha \times$$
$$\times\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}\right), \qquad (2)$$

а затем искать максимум этого выражения методами математического анализа. Этот путь достаточно сложен и, главное, не интересен, т. к. превращает задачу в скучное упражнение по математике, поэтому мы поступим иначе.

Найдём, под каким углом следует бросить камень, чтобы он упал на расстоянии L от подножия башни. Исключив время из системы (1) и воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha,$$

получим для $\mathrm{tg}\,\alpha$ квадратное уравнение:

$$(\mathrm{tg}\,\alpha)^2 - \frac{2v_0^2}{gL}\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{2v_0^2 h}{gL^2} + 1 = 0. \qquad (3)$$

Рассмотрение дискриминанта этого уравнения показывает, что оно имеет корни, только если

$$L \le \frac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}. \qquad (4)$$

Полученный результат имеет простой физический смысл, так как очевидно, что с данной начальной скоростью камень нельзя забросить сколь угодно далеко. Максимально возможная дальность полёта камня, как это следует из неравенства (4), определяется выражением:

$$L_{\max} = \frac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}. \qquad (5)$$

Из уравнения (3) теперь найдём тангенс искомого угла α. Подставляя выражение (5) в уравнение (3), получим уравнение с совпадающими корнями (полный квадрат, $D = 0$):

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}.$$

Заметьте, для получения данного результата даже «хитрым» способом пришлось провести значительные вычисления. А теперь то же самое получим другим способом.

Второй способ *(«геометрический»)*. Как уже отмечалось, дальность полёта камня может быть выражена как $L = v_0 \cos\alpha \cdot \tau$, а его конечная скорость v не зависит от угла бросания α и определяется выражением:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh},$$

что следует из закона сохранения механической энергии.

Теперь рассмотрим зависимость скорости камня от времени при его полёте. В векторном виде эта зависимость имеет вид:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t.$$

Таким образом, для конечной скорости имеем:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\tau.$$

Воспользовавшись правилом треугольника при сложении векторов, получим рис. 2, где через β обозначен угол, образуемый вектором конечной скорости камня с вектором его начальной скорости.

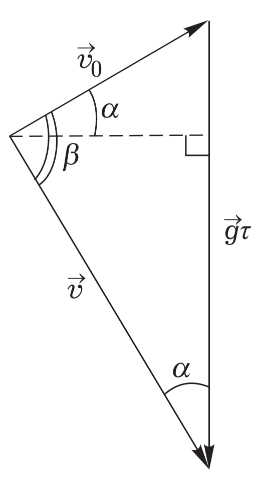

Рис. 2

Выразим теперь площадь треугольника (назовём его «*треугольником скоростей*») двумя способами. С одной стороны, как половину произведения стороны основания на высоту, а с другой стороны, как половину произведения двух сторон на синус угла между ними. В результате мы приходим к уравнению:

$$\frac{1}{2}g\tau \cdot v_0\cos\alpha = \frac{1}{2}v_0 v\sin\beta.$$

Используя последнее уравнение, нетрудно получить выражение для дальности полёта $L = v_0\cos\alpha$ через величины v_0, v, и β:

$$L = \frac{v_0 v}{g}\sin\beta.$$

В полученном выражении только угол β может зависеть от угла бросания α Становится очевидным, что для достижения максимальной дальности полёта камень надо бросать под таким углом α, чтобы вектор конечной скорости $\vec{v}$ оказался перпендикулярным вектору начальной скорости $\vec{v}_0$! (При $\beta = 90^\circ$ функция $\sin\beta$ принимает максимальное значение, равное единице.)

С учётом сказанного можно сделать вывод, что «*треугольник скоростей*» является прямоугольным, и из рисунка 2 для искомого угла α получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}.$$

Заметьте, насколько проще мы получили тот же результат!

Полезные теоремы об оптимальном бросании камня

Вывод о перпендикулярности конечной и начальной скоростей, полученный в результате решения предыдущей задачи, можно обобщить и на случай бросания камня с наклонной поверхности (рис. 3), сформулировав следующее утверждение.

Теорема 1. Для достижения максимальной дальности при заданном значении начальной скорости $\vec{v}_0$ камень надо бросать под таким углом к горизонту, чтобы вектор конечной скорости $\vec{v}$ оказался перпендикулярным вектору начальной скорости $\vec{v}_0$, т. е. «треугольник скоростей» должен быть прямоугольным.

Задача о бросании камня может быть сформулирована иначе.

Задача. Как надо бросать камень, чтобы из заданной точки A попасть в заданную точку B (рис. 3) при минимально возможной начальной скорости $\vec{v}_0$?

Ответом на поставленный вопрос будет второе утверждение.

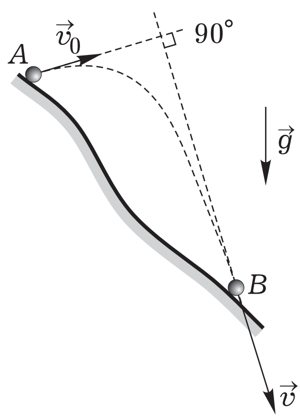

Рис. 3

Теорема 2. Для того чтобы добросить камень из точки A в другую заданную точку B с наименьшей возможной начальной скоростью, его необходимо бросать так, чтобы векторы начальной и конечной скорости оказались перпендикулярны, т. е. при наименьшей начальной скорости «треугольник скоростей» будет прямоугольным.

Сформулированные теоремы можно назвать *«теоремами о треугольнике скоростей»*. Доказательства этих утверждений предоставляем читателю.

Рассмотрим теперь «треугольник перемещений» при равноускоренном движении и сформулируем для него соответствующие утверждения (теоремы). Как известно, перемещение $\vec{s}$ тела, движущегося с постоянным ускорением $\vec{a}$ и с начальной скоростью $\vec{v}_0$, зависит от времени t по закону:

$$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

Применяя правило треугольника при сложении векторов, приходим к рисунку 4. Векторный треугольник на рис. 4 может быть назван «треугольником перемещений».

Рассмотрим вектор $\vec{b}$, являющийся «медианой» в рассматриваемом треугольнике. Нетрудно видеть, что он равен

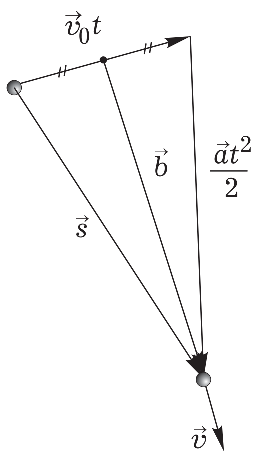

Рис. 4

$$\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} = \frac{t}{2}\vec{v}_0 + \vec{a}t = \frac{t}{2}\vec{v},$$

и следовательно, направление вектора скорости $\vec{v}$ совпадает с направлением вектора $\vec{b}$. Мы приходим, таким образом, к нашему следующему утверждению.

Теорема 3. При равноускоренном движении в любой момент времени вектор скорости направлен вдоль медианы в «треугольнике перемещений»!

Вернёмся теперь к задачам на «оптимальное» бросание камня. (Это задачи на достижение максимальной дальности полёта при заданной начальной скорости или попадание в цель при минимальной начальной скорости.) В случаях «оптимального» бросания камня треугольник перемещений будет равнобедренным! В самом деле, конечная скорость камня должна быть перпендикулярна начальной скорости, а в то же время она направлена вдоль медианы. Значит, рассматриваемая медиана в «треугольнике перемещений» одновременно является и высотой. Следовательно, треугольник перемещений – равнобедренный.

Итак, мы доказали ещё одно утверждение.

Теорема 4. При «оптимальном» бросании камня «треугольник перемещений» является равнобедренным.

Теоремы 3 и 4 можно назвать *«теоремами о треугольнике перемещений»*.

Обратимся теперь к очередной известной задаче и решим её рассмотренным «геометрическим» способом, в основу которого положены сформулированные выше теоремы.

Примеры применения теорем об оптимальном бросании камня

Задача 3. Камень бросают с горы, имеющей постоянный угол наклона γ к горизонту (рис. 5). Под каким углом α к поверхности горы надо бросить камень, чтобы дальность его полёта s была максимальной?

Решение. Исходя из того, что при бросании на максимальную дальность «треугольник перемещений» равнобедренный, и используя

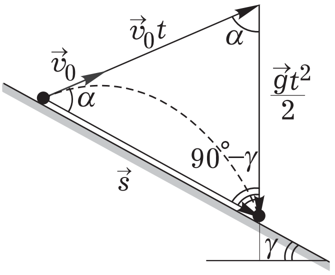

Рис. 5

геометрию рис. 5, мы сразу приходим к уравнению:

$$2\alpha + (90^\circ - \gamma) = 180^\circ,$$

решая которое, находим искомый угол:

$$\alpha = 45^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Задача 4. Камень брошен с башни так, что дальность полёта максимальна. Его начальная скорость $v_0 = 30$ м/с, конечная $v_1 = 40$ м/с. Найдите время полёта камня. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Согласно теореме 1 треугольник скоростей в этом случае должен быть прямоугольным (рис. 6). Применяя к нему теорему Пифагора, запишем:

$$(gt)^2 = v_0^2 + v_1^2.$$

Откуда

$$t = \frac{\sqrt{v_0^2 + v_1^2}}{g} = 5 \text{ с}.$$

В качестве полезного упражнения можно попробовать решить эти задачи стандартным методом и почувствовать разницу.

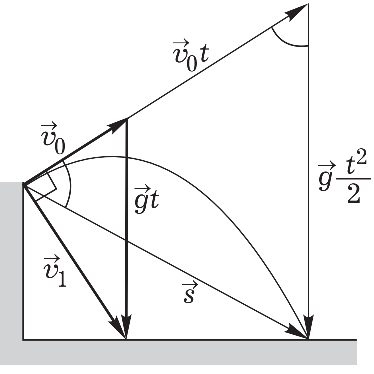

Рис. 6

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5. Камень брошен с башни так, что дальность его полёта максимальна. Найдите время полёта камня, если точка падения камня отстоит от точки бросания на расстояние $s = 80$ м. Сопротивление воздуха не учитывать. (Ответ: 4 с.)

Задача 6. С какой минимальной скоростью v_0 и под каким углом α к горизонту необходимо бросить камень с поверхности земли, чтобы он смог перелететь через тонкую стену высотой h? Точка бросания камня находится на расстоянии L от стены.

(Ответ: $v_0 = \sqrt{gh + g\sqrt{L^2 + h^2}}$,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h + \sqrt{h^2 + L^2}}{L}.)$$