Шишлянникова Алимпиада Васильевна
учитель математики средней общеобразовательной школы №1 г. Губкинского ЯНАО.

О числе корней уравнения, содержащего знак модуля

В процессе работы с математическими задачами иногда возникает необходимость в составлении уравнений с наперёд заданным числом корней. Если квадратное уравнение с нужным числом решений многие запишут без раздумий, то составить уравнение вида

$$|x-a_1|+|x-a_2|+ \\ +|x-a_3|+\ldots+|x-a_n|=m \qquad (1)$$

с заданным числом корней сможет не каждый.

Однако и для этих уравнений можно сформулировать правило по определению числа решений.

Пусть для определённости в уравнении (1)

$$a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{n-1}<a_n.$$

Выясним, как зависит число корней уравнения от соотношения между числами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и m.

Графически левая часть уравнения (1) представляет собой ломаную двух типов (рис. 1, если n-чётное, и рис. 2, если n-нечётное). Число решений определяется числом пересечений графика с прямой $y=m$.

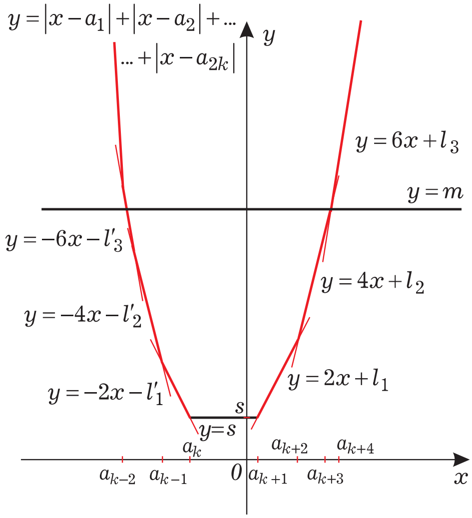

Рис. 1

Если $n=2k$, то число корней определяется значением величины

$$s=a_{2k}+a_{2k-1}+a_{2k-2}+\ldots+a_{k+1}- \\ -(a_k+a_{k-1}+\ldots+a_1),$$

то есть разницей между суммами k бо́льших и k ме́ньших чисел a_n. Графически s – координата точки пересечения графика с осью Oy.

При $m = s$ $x \in [a_k; a_{k+1}]$,

$m < s$ корней нет $(x \in \varnothing)$,

$m > s$ два корня.

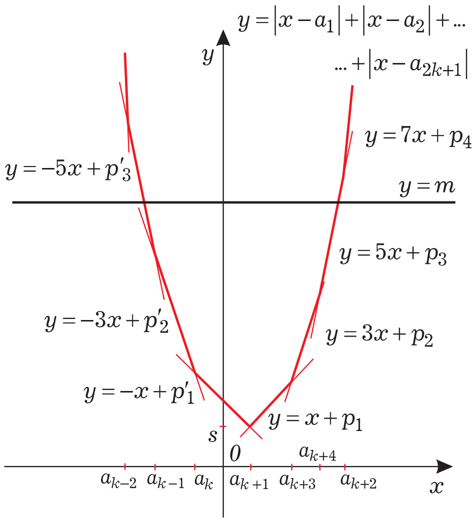

Рис. 2

Если $n = 2k+1$, то число корней определяется значением величины

$$s = a_{2k+1} + a_{2k} + a_{2k-1} + \ldots + a_{k+2} - $$
$$-(a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1),$$

то есть разницей между суммами k бо́льших и k ме́ньших чисел a, без учёта a_{k+1}. Графически $s = y(a_{k+1})$, где

$$y(x) = |x - a_1| + |x - a_2| +$$
$$+|x - a_3| + \ldots + |x - a_{2n+1}|.$$

При $m = s$ один корень $(x = a_k + 1)$,

$m < s$ корней нет $(x \in \varnothing)$,

$m > s$ два корня.

Практическое использование этого результата может быть следующим:

♦ можно определять число корней, не решая самого уравнения;

♦ выбрав произвольно числа a_n в левой части уравнения (1), можно по значению s легко подобрать число m таким образом, чтобы уравнение имело наперёд заданное число корней.

Примеры. Определить число корней уравнения при всех значениях m.

1) $|x - 7| + |x + 10| = m$

Пусть $a_1 = -10$, $a_2 = 7\,(a_1 < a_2)$, тогда

$s = a_2 - a_1 = 7 - (-10) = 17$.

При $m = 17$ $x \in [-10; 7]$,

$m < 17$ $x \in \varnothing$,

$m > 17$ два корня.

2) $|x - 2| + |x + 3| + |x - 5| = m$

Пусть $a_1 = -3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$ $(a_1 < a_2 < a_3)$, тогда

$s = a_3 - a_1 = 5 - (-3) = 8$.

При $m = 8$ $x = a_2 = 2$ один корень,

$m < 8$ $x \in \varnothing$,

$m > 8$ два корня.

3) $|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + |x - 7| = m$

Пусть $a_1 = -3$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$, $a_4 = 7$ $(a_1 < a_2 < a_3 < a_4)$, тогда

$$s = a_4 + a_3 - (a_2 + a_1) =$$
$$= 7 + (-1) - (-2 + (-3)) = 11.$$

При $m = 11$ $x \in [a_2; a_3]$, т. е. $x \in [-2; -1]$,

$m < 11$ $x \in \varnothing$,
$m > 11$ два корня.

4) $|x+3|+|x-6|+|x-5|+$
$+|x+2|+|x+1|=m$

Пусть $a_1=-3$, $a_2=-2$, $a_3=-1$, $a_4=5$, $a_5=6$ $(a_1<a_2<a_3<a_4<a_5)$, тогда $s=a_5+a_4-(a_2+a_1)=6+5-(-3-2)=16$.

При $m=16$ $x=a_3=-1$ один корень,
$m<16$ $x \in \varnothing$,
$m>16$ два корня.