Олег Юрьевич Орлянский
*Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры теоретической физики
Днепропетровского национального университета.*

Нестандартные методы решения задач по электричеству

Освоить новый метод решения задач лучше всего, конечно, решая задачи. В силу ограниченности размера статьи мы рассмотрим только две задачи, зато применим к ним разные нестандартные методы. Остальное дело за вами. Самостоятельно применяя новые методы, вы сможете не только их освоить и оценить, но и перевести для себя в разряд испытанных и стандартных.

Две задачи из 2013-го

Первая задача про пирамиду была предложена в конце 2013 года на районно-городской олимпиаде Днепропетровской области. Вторую задачу с бесконечной сеткой десятиклассники распутывали на финальном этапе Всеукраинской олимпиады в марте 2013 г. в г. Херсоне.

Задача 1. Тетраэдр (см. рис. 1) сделали, спаяв концы пяти серебряных и одной золотой одинаковых по размерам проволочек. Оказалось, что сопротивление конструкции между точками A и B равняется 1 Ом, между точками C и D 1,2 Ом, а между всеми остальными парами точек оно одинаково и равно некоторому значению R.

- По приведённым данным выясните, где в тетраэдре золотая проволочка.
- Найдите отношение удельного сопротивления золота к удельному сопротивлению серебра.
- Определите значение R с точностью до сотых. Известно, что серебро проводит электрический ток лучше, чем золото.

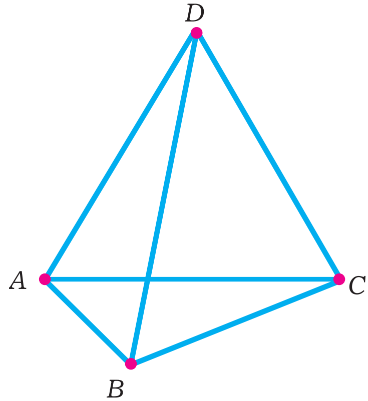

Рис. 1

Задача 2. Из тонкого провода площадью сечения S спаяли сетку с огромным количеством квадратных ячеек. На значительном отдалении от краёв сетки к точкам A и B в соседних узлах приложили напряжение U.

- Определите суммарный ток через все проводники, которые на рисунке пересекает пунктирная линия.
- Найдите участки сетки, через которые ток идти не будет.
- Докажите, что в центре любого квадрата сетки общее магнитное поле, созданное четырьмя токами, проходящими через его стороны, равняется нулю. Длина стороны квадрата a, удельное сопротивление материала провода ρ.

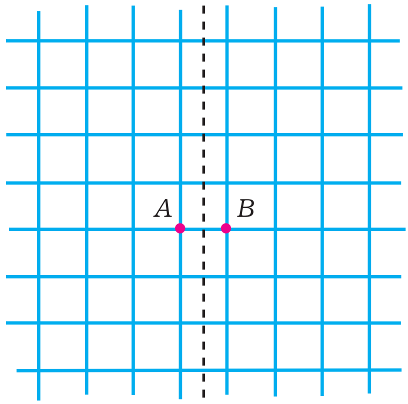

Рис. 2

Ищем золото в пирамиде

Решение задачи 1. По условию задачи золотая проволочка только одна, а сопротивление между точками A и D, A и C, B и C, B и D одинаково. Это означает, что проволочки, непосредственно соединяющие упомянутые пары точек, серебряные. Пронумеруем их для удобства и изобразим эквивалентную схему при подсоединении к точкам A и B (рис. 4). В силу симметрии через вертикально изображённый резистор ток идти не будет. В случае подсоединения к точкам C и D схема останется такой же, только надо будет поменять местами пары точек A, B и C, D и переставить нумерацию одинаковых серебряных проволочек, что на общее сопротивление не повлияет. При этом вертикально изображённый резистор поменяется местами с нижним. Согласно условию $R_{AB} = 1$ Ом, $R_{CD} = 1{,}2$ Ом. Так как сопротивление серебряной проволочки меньше золотой и $R_{AB} < R_{CD}$, находим, что нижний резистор на рис. 4 соответствует серебряной проволочке, а вертикальный – золотой. То есть золотая проволочка соединяет точки C и D. Тогда, если $R_с$ и $R_з$ – сопротивление серебряной и золотой проволочек, то

$$R_{AB} = R_с/2, \quad R_{CD} = R_с R_з/(R_с + R_з),$$

откуда имеем:

$$R_с = 2 \text{ Ом}, \quad R_з = 3 \text{ Ом}.$$

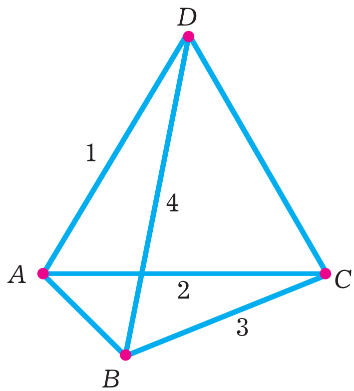

Рис. 3

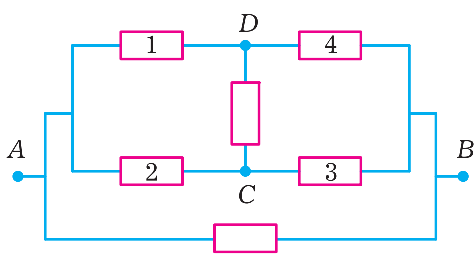

Рис. 4

Поскольку размеры золотой и серебряной проволочек одинаковы, отношение их сопротивлений равно отношению их удельных сопротивлений. Таким образом, отношение удельного сопротивления золота к удельному сопротивлению серебра равняется 1,5.

Найдём теперь ответ на последний, самый сложный, вопрос задачи. Изобразим эквивалентную схему для соединения с сопротивлением R, проставив для удобства не номера проволочек, а значения их сопротивлений в омах (рис. 5). В отличие от рассмотренного случая симметрия теперь нарушена, и ток через вертикальный резистор пойдёт. Один из четырёх резисторов, непосредственно соединённых с вертикальным резистором, имеет в 1,5 раза большее сопротивление. Он может находиться на любой из четырёх позиций. Как видно из рис. 5 и следует из условий задачи, такая перемена мест не повлияет на значение общего сопротивления.

Из-за вертикального резистора полученная схема не является комбинацией последовательных и параллельных участков, что значительно усложняет нахождение общего сопротивления. Помните, в физике, если не удаётся решить задачу точно, прибегают к приближённым решениям.

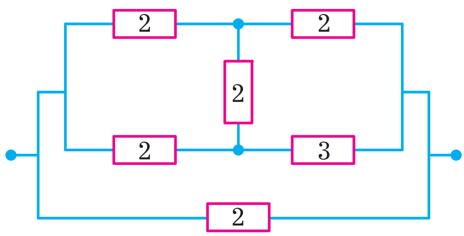

Рис. 5

Точное приближение

Воспользуемся тем, что при увеличении сопротивления любого резистора сопротивление всего соединения увеличивается, а при уменьшении, соответственно, уменьшается. Попробуйте доказать это самостоятельно. В качестве интуитивно понятного примера можно привести систему трубок, через которую вы, как волынщик, выдуваете воздух. При увеличении сопротивления одной из них (засорение, сужение диаметра) для поддержания того же потока воздуха потребуется большие усилия, то есть, сопротивление всей системы увеличится[1]. Справедливо и обратное утверждение.

Самый неудобный в схеме резистор – вертикальный. Что ж, уменьшим его сопротивление до нуля. Тогда получим эквивалентную схему (рис. 6). Её сопротивление меньше, чем то R, которое мы ищем, и равно

$$R_1 = 22/21 \text{ Ом} \approx 1{,}0476 \text{ Ом}.$$

[1] Вообще говоря, сопротивление может остаться прежним, если воздух через засорившуюся трубку не двигался.

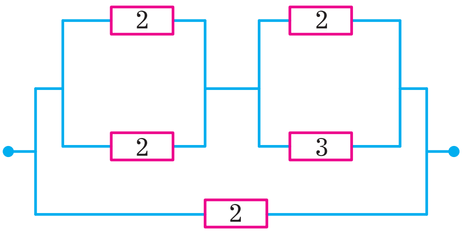

Рис. 6

Теперь, напротив, не будем мелочиться и увеличим сопротивление вертикального резистора до бесконечности, иначе говоря, разорвём этот участок цепи. Сопротивление эквивалентного соединения (рис. 7)

$$R_2 = 20/19 \text{ Ом} \approx 1{,}0526 \text{ Ом}$$

будет больше, чем R. Прочитаем условие задачи внимательно: «Определите значение R с точностью до сотых». Так как $R_1 \le R \le R_2$, при округлении до сотых находим единственное число, попадающее в данный интервал, а именно $R = 1{,}05$ Ом. Таким образом, быстро решив две простые задачи вместо одной сложной, мы сузили поиск и нашли искомый ответ. Назовём данный метод **методом границ**. В рамках этого метода можно было поступить иначе. Не трогать вертикальный резистор, а уменьшать/увеличивать сопротивления других резисторов, добиваясь упрощения расчётов. Например, изменить значения сопротивлений так, чтобы ток через вертикальный резистор не шёл. Скажем, в первом случае уменьшить значение сопротивления трёхомного резистора до 2 Ом, а во втором – увеличить сопротивление одного из двухомных резисторов до 3 Ом. Если есть желание изменять сопротивление сразу нескольких резисторов, необходимо следить за тем, чтобы изменения происходили синхронно в сторону либо уменьшения, либо увеличения. Только в этом случае границы нашего метода будут непроницаемы, а результат – контролируемым.

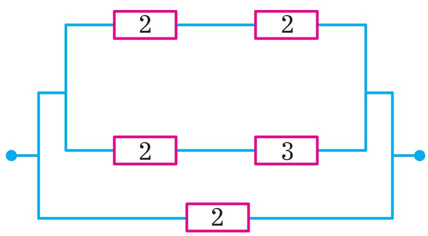

Рис. 7

Разные пути к истине

И всё-таки интересно, как найти точное значение сопротивления R (рис. 5) и чему оно равно? Это можно сделать по-разному: с помощью метода узловых потенциалов, правил Кирхгофа или, скажем, преобразовав треугольник в звезду. Первые два подхода выглядят привлекательней. Они дальше от формализма и ближе к физике. Но даже не зная их, можно решить задачу, если помнить, что при последовательном соединении напряжения складываются, а при параллельном – равны. Также не будем забывать о законе сохранении электрического заряда, который требует, чтобы сумма токов, входящих в узел, равнялась сумме токов, выходящих из узла. И наконец, главное. Что такое сопротивление? Это специфический отклик проводника на приложенное напряжение, отношение напряжения к возникшей силе тока:

$$R = U/I.$$

Именно так определяют неизвестное сопротивление на практике. Измеряют напряжение и силу тока, а потом делят U на I. Другая формула

$$R = \rho l/S$$

даже для внешне геометрически правильных проводников не гарантирует отсутствие внутри них примесей или каверн. Поэтому её использование для определения неизвестного сопротивления сопряжено как с риском ошибиться, так и с дополнительной необходимостью знать, из какого материала сделан проводник.

Итак, подаём на соединение (рис. 5) некоторое напряжение, находим силу тока, потом их делим, и сопротивление найдено. А какое напряжение подавать? Да какое угодно! Конечно, в рамках линейности закона Ома. Да, и ещё! Не стоит бравировать, решая задачу в общем виде. Когда много вычислений и мало времени, громоздкость и риск ошибки надо сводить к минимуму. Пишем: «Решаем в SI. На соединение подаём 1 В. Пусть при этом сила тока i. Тогда сопротивление $r = 1/i$ ». Перерисовываем часть схемы из рис. 5 и расставляем силы токов, минимизируя количество неизвестных (см. рис. 8). Если смотреть по верхней ветке, то напряжения ($U = IR$) на двух последовательных резисторах должны давать в сумме 1 В. В SI эта запись выглядит так:

$$2i_1 + 2(i_1 + i_2) = 1.$$

Аналогично, вдоль нижней ветки:

$$2(i - i_1) + 3(i - i_1 - i_2) = 1.$$

Наконец, чтобы учесть вертикальный резистор, пройдём из точки A в B двумя **разными путями**:

$$2i_1 = 2(i - i_1) + 2i_2.$$

Таким образом, мы получили три простых уравнения с тремя неизвестными токами. Решая, находим, что $i = 19/42$, $r = 42/19$, что при параллельном соединении с ещё одним двухомным резистором даёт $R = 21/20$, или $1{,}05$ Ом. Как видим, приближённое решение совпало с точным.

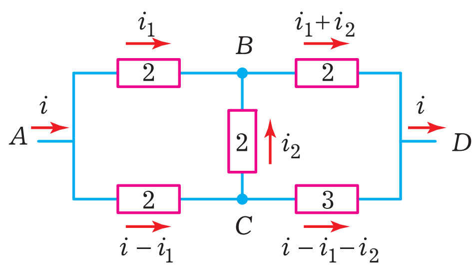

Рис. 8

Задача массового поражения

Решение задачи 2. Немного истории. Данная задача создана на основе известной олимпиадной задачи о квадратной (треугольной, шестиугольной, кубической...) бесконечной сетке, где требуется определить общее сопротивление между соседними узлами, если известно сопротивление одного звена. Во время Второй мировой войны эта задача поглотила столько человеко-часов английских радиоинженеров и электронщиков, что было решено сбросить её на фашистскую Германию в качестве оружия массового поражения немецких научных кадров. Общее решение задачи о сопротивлении между любой парой узлов выражается через функции Бесселя, однако в некоторых случаях существуют простые изящные решения. Именно такие случаи рассматриваются в олимпиадных сборниках задач, и предполагается, что участники республиканского этапа олимпиады о них наслышаны. Тем не менее, условие предлагаемой задачи сформулировано так, чтобы подтолкнуть на правильный путь даже тех, кто столкнулся с бесконечной сеткой впервые. Итак, приступим к решению.

Вездесущий принцип суперпозиции

Согласно условию, к точкам A и B приложено напряжение U. Предположим, что на точку A подан положительный потенциал, а на точку

B – отрицательный. Тогда токи через все проводники, которые пересекает пунктирная линия (см. рис. 2 в условии), будут идти слева направо. В силу закона сохранения электрического заряда сумма всех этих токов равна току I источника, входящему в сетку через точку A и возвращающемуся в источник через точку B. Следовательно, необходимо найти ток I через источник. Для этого воспользуемся **методом наложения (суперпозиции)**. Дело в том, что из принципа суперпозиции потенциалов и линейности закона Ома следует, что в задаче, где есть несколько источников, можно поочерёдно найти токи, вызываемые каждым из них в отдельности. Затем все эти токи наложить друг на друга, то есть сложить с учётом направлений, и найти в итоге подлинное распределение токов в цепи. При желании можно один источник представить в виде двух или нескольких. Именно это позволяет быстро решить данную задачу. Рассмотрим только положительный потенциал, приложенный к точке A. Сетка бесконечна, и в силу симметрии ток I, входящий в точку A из источника, поровну расходится во всех четырёх направлениях. То есть от A «напрямик» к B будет идти ток $I/4$. Чем дальше от точки A, тем всё меньшими будут токи, разветвляясь по множеству участков. Теперь независимо от A рассмотрим токи, которые под действием такого же по величине отрицательного потенциала входят из квадратной сетки в точку B. Аналогично имеем, что «напрямик» к B от A будет течь ток $I/4$, а на большом удалении от B множество малых токов текут навстречу малым токам из точки A. Наконец, наложим одно распределение токов на другое. Бесконечно далеко, где разница в одно звено между A и B уже несущественна, малые токи компенсируются. По проводнику между точками A и B будет идти ток

$$I/4 + I/4 = I/2,$$

что лишь в два раза меньше силы тока через источник. Следовательно, сумма токов через огромное количество всех других проводников, которые пересекает пунктирная линия, также будет равняться $I/2$. Это хорошо демонстрирует стремительное уменьшение величин токов при отдалении от точек A и B вдоль пунктирной линии и правомерность замены большой сетки на бесконечно большую. С другой стороны, то, что ток разделился поровну между кратчайшим проводником AB и всем остальным, свидетельствует о равенстве сопротивлений этого проводника и всего остального. Значит, общее сопротивление ровно в два раза меньше сопротивления проводника AB.

Воспользуемся законом Ома и определим ток через проводник AB, на который подано напряжение U:

$$I_{AB} = \frac{U}{R_{AB}} = \frac{US}{\rho a}.$$

Вдвое больший общий ток

$$I = 2\frac{US}{\rho a}$$

является ответом на первый вопрос задачи. Для того чтобы ответить на второй вопрос, то есть найти участки провода, через которые ток не идёт, снова воспользуемся методом наложения. Рассмотрим несколько удалённое от точек A и B распределение токов. Начнём с точки A. Каждый из четырёх выходящих из неё одинаковых токов (рис. 9) делится в ближайшем узле на один ток i_1 в том же направлении и два боковых тока i_2.

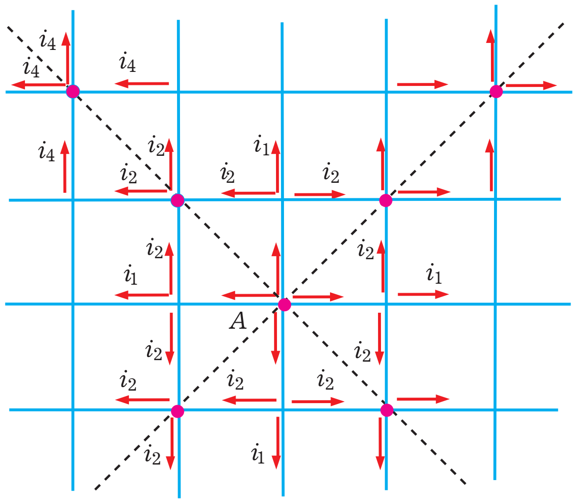

Рис. 9

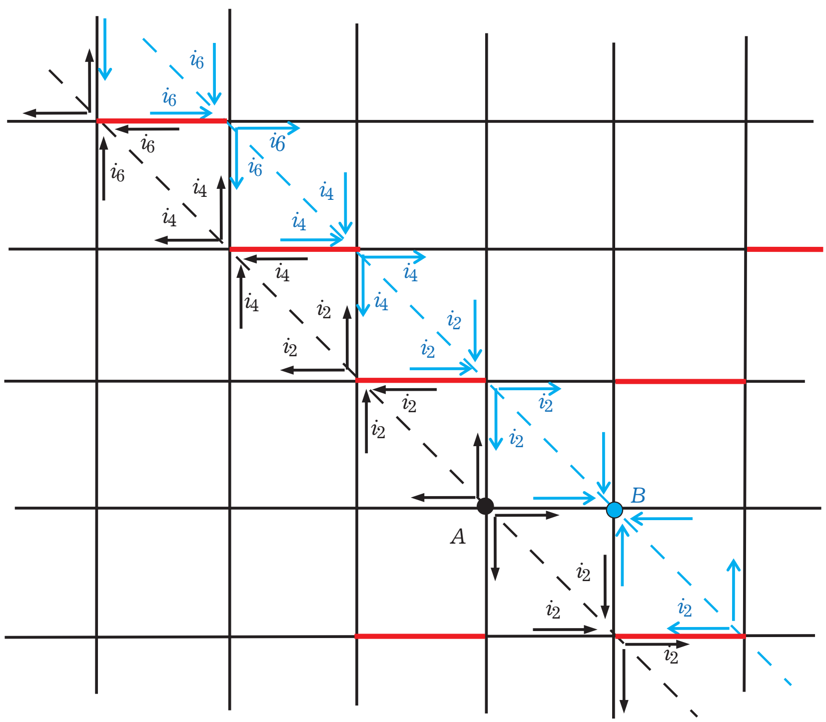

Рис. 10

Соседние боковые токи сходятся в одном из узлов диагоналей (пунктирные линии, проходящие через точку A). В силу симметрии токи, входящие в такой узел и выходящие из него, равны. В ближайшем от A диагональном узле

$$i_2 + i_2 = i_2 + i_2,$$

в следующем

$$i_4 + i_4 = i_4 + i_4$$

и так далее. Аналогичную картину, только с обратными направлениями токов, даёт отрицательный потенциал в точке B. Наложим одно диагональное распределение токов на другое. Как видно из рис. 10, во всех параллельных AB участках, расположенных вдоль диагональных направлений, противоположно направленные одинаковые токи компенсируются. Удивительно, что в самой непосредственной близости от A и B имеются четыре горизонтальных участка, через которые токи не идут! Все такие участки на рис. 10 выделены красным цветом. Их можно удалить из схемы, никак не повлияв на её сопротивление и распределение остальных токов.

Быстрая демаркация границ

А что делать тому, кто никогда не сталкивался с таким применением метода наложения, да и самим методом тоже? Далеко не каждому удастся открыть новый метод во время олимпиады. Вспомним: если не удаётся решить задачу точно, ищем приближённое решение. Воспользуемся методом границ для быстрой оценки сопротивления сетки. Сначала закоротим все участки, кроме тех, которые непосредственно подходят к точкам A и B (рис. 11).

Удалённые концы шести участков-резисторов соединены между собой накоротко, поэтому общее сопротивление $R_1 = 0,4r$, где $r = \rho a/S$ – сопротивление одного участка. Теперь разорвём все участки, кроме нескольких. Например так, как показано на рис. 12.

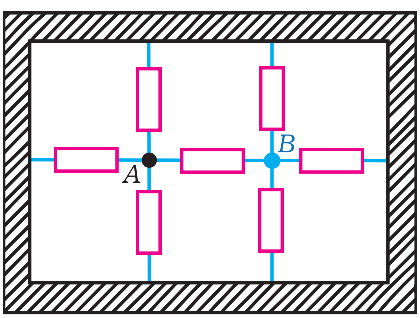

Рис. 11

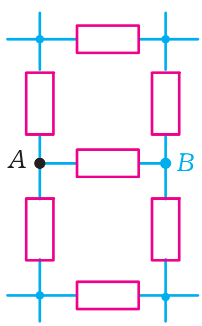

Рис. 12

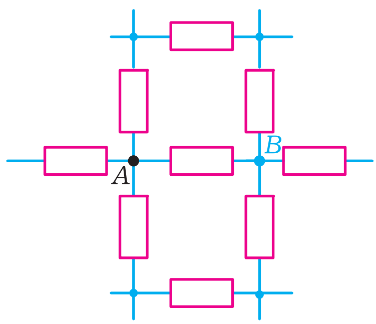

Рис. 13

Общее сопротивление теперь $R_2 = 0,6r$. Это верхняя граница. Таким образом, искомое сопротивление бесконечной сетки находится между значениями $0,4r$ и $0,6r$. Напомним, что точный ответ $0,5r$. Интервал между границами R_1 и R_2 можно существенно сузить, если рассмотреть большее число резисторов. Согласитесь, это лучше, чем ничего!

Да что там лучше! Мы нашли много больше, чем искали. Наш ответ $R \in (0,4r;\ 0,6r)$ справедлив и для любой сетки конечных размеров, лишь бы в ней был фрагмент, допускающий оба предыдущих рассмотрения (рис. 13). Более того, к краям этого фрагмента можно произвольным образом подсоединить как угодно соединённые между собой резисторы с какими угодно сопротивлениями. Наш ответ от этого не изменится.

Магнитное поле и симметрия

Последний вопрос задачи о магнитном поле в центре любого квадрата сетки не требует знания ответов на предыдущие вопросы. Ток в проводнике создаёт вокруг себя магнитное поле. Вдвое больший ток создаёт вдвое большее магнитное поле, так как его можно представить в виде двух совпадающих токов, магнитные поля которых в силу принципа суперпозиции складываются. Из этого делаем вывод, что магнитное поле пропорционально величине родительского тока, $B \sim I$. Встречный ток должен создавать противоположно направленное магнитное поле, так как одинаковые прямой и встречный токи, согласно методу наложения, означают отсутствие тока, а значит, и магнитного поля. Величина магнитного поля тока зависит также от длины проводника и расстояния до него. Однако вид этой зависимости для нас сейчас не важен, поскольку расстояния от центра квадрата до его одинаковых сторон равны. Таким образом, токи через стороны квадрата создают в его центре перпендикулярные к плоскости квадрата магнитные поля, которые, согласно условию, компенсируются.

Заметим, что сумма напряжений при «путешествии» из одной узла сетки в любой другой определяется разностью потенциалов и не зависит от того, через какие резисторы проходит наш путь. **Метод разных путей** мы уже использовали при решении первой задачи. Поскольку сопротивления сторон квадрата одинаковы, сумма токов, которые направлены по часовой стрелке относительно центра квадрата, будет равняться сумме токов, направленных против часовой стрелки. На рис. 14 сказанное проиллюстрировано. Приравниваем падения напряжения вдоль двух путей: $i_2 r = i_1 r + i_3 r + i_4 r$. Сокращая, находим: $i_2 = i_1 + i_3 + i_4$. Ток i_2 создаёт в центре квадрата магнитное поле, направленное к нам. А токи i_1, i_3, i_4 создают поля, направленные от нас. Поскольку магнитное поле пропорционально величине тока, поле тока i_2 в точности компенсирует поля трёх других токов. Вывод о компенсации магнитного поля может быть обобщён на центр любого правильного многоугольника, стороны которого имеют одинаковые сопротивления.

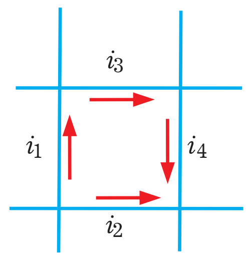

Рис. 14

Для замкнутого контура метод разных путей можно сформулировать в духе правила Кирхгофа: сумма падений напряжений вдоль контура равна нулю, если контур не содержит источников тока.

Таким образом, мы познакомились с различными методами решения задач, среди которых не последнюю роль занимали соображения симметрии. По мнению Германа Вейля, симметрия помогает «постичь и создать порядок, красоту и совершенство». Помните об этом, решая задачи!