



Прохоров Вадим Константинович

*Учитель физики ГБОУ «Школа № 1526 на Покровской»,
г. Москва.*

Несколько задач с тепловыми процессами

В школе достаточно подробно рассматриваются «изопроцессы», и часто у учеников вызывает недоумение тот факт, что бывают какие-то ещё процессы кроме «изо». Задачи, приведённые в статье, объединены тем, что в каждой из них рассматривается процесс, происходящий с постоянной массой идеального газа, в котором *давление линейно зависит от объёма*. Такие задачи нередко встречаются на различных вступительных испытаниях, ЕГЭ, олимпиадах и т. д.

Примеры решения задач

Задача 1. С постоянной массой одноатомного идеального газа проводят процесс, в котором давление прямо пропорционально объёму. График процесса изображён на рис. 1.

1) Определите молярную теплоёмкость газа в этом процессе.

2) Построить графики процесса в координатах $p - T$ и $V - T$.

Решение. График представляет собой прямую, проходящую через начало координат. В таком процессе изменяются и давление, и объём, и температура.

1) В представленном процессе давление прямо пропорционально

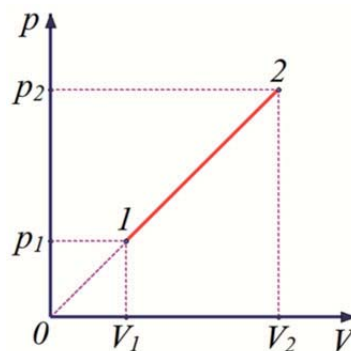


Рис. 1

объёму, и для него справедлив своеобразный «газовый закон», основан-

ный на свойствах прямой пропорциональности:

$$\frac{p_2}{V_2} = \frac{p_1}{V_1}. \quad (1)$$

Молярная теплоёмкость определяется формулой

$$C_\nu = \frac{Q}{\nu \Delta T}, \quad (2)$$

где Q – количество тепла, которое нужно сообщить ν молям газа для изменения его температуры на ΔT . Количество теплоты определим из первого закона термодинамики:

$$Q = A + \Delta U. \quad (3)$$

Работа газа определяется как площадь под графиком процесса:

$$A = \frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{1}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) \quad (4)$$

(здесь после раскрытия скобок учтено соотношение (1)).

Изменение внутренней энергии одноатомного газа:

$$\Delta U = \frac{3}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1). \quad (5)$$

Таким образом, из уравнений (3)–(5) следует, что

$$Q = 2(p_2 V_2 - p_1 V_1),$$

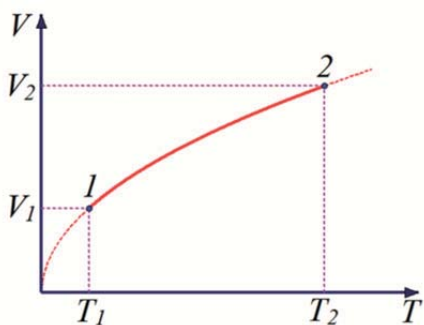


Рис. 2

а учитывая уравнение Менделеева–Клапейрона

$$pV = \nu RT,$$

для количества теплоты получаем выражение

$$Q = 2\nu R(T_2 - T_1) = 2\nu R\Delta T. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (2), находим значение теплоемкости

$$C = 2R.$$

2) Для построения графиков $p(T)$ и $V(T)$ запишем зависимость давления от объема в виде

$$p(V) = aV, \quad (7)$$

где a – некоторая постоянная величина, и воспользуемся уравнением Менделеева–Клапейрона (которое справедливо для любого равновесного состояния идеального газа):

$$pV = \nu RT. \quad (8)$$

Если исключить из системы уравнений (7) и (8) давление, получаем зависимость $V(T)$:

$$V = \sqrt{\frac{\nu RT}{a}}, \quad (9)$$

а исключая объем, получаем зависимость $p(T)$:

$$p = \sqrt{a\nu RT}. \quad (10)$$

Графики зависимостей $V(T)$ и $p(T)$ изображены на рис. 2 и 3 соответственно.

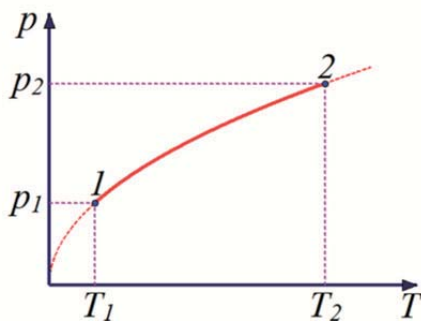


Рис. 3

Возникает вопрос: а как на практике осуществить такой процесс? Рассмотрим следующие две задачи.

Задача 2. В горизонтальном цилиндре под поршнем находится идеальный одноатомный газ. Поршень соединён с дном цилиндра пружиной жёсткости k . В начальный момент пружина недеформирована. Её длина равна L_0 . Газ начинают медленно нагревать. Какое количество теплоты нужно при этом сообщить газу, чтобы поршень переместился на расстояние d ? Атмосферное давление равно p_0 . Трением пренебречь.

Решение. Количество теплоты, сообщаемое газу, расходуется на совершение газом работы при перемещении поршня и на увеличение внутренней энергии газа. Согласно первому началу термодинамики

$$Q = A + \Delta U. \quad (1)$$

При перемещении поршня на него действуют: $\vec{F}$ – сила со стороны газа, равная

$$F = pS, \quad (2)$$

F_A – сила со стороны атмосферы и $F_{\text{упр}}$ – сила, со стороны пружины (рис. 4).

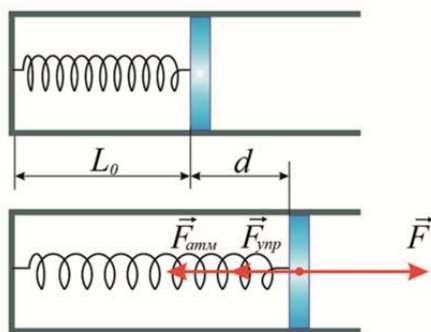


Рис. 4

Поскольку нагревание происходит медленно, поршень перемещает-

ся равномерно и, следовательно, в каждый момент времени сумма сил равна нулю:

$$F = F_A + F_{\text{упр}}. \quad (3)$$

По мере перемещения поршня сила упругости будет увеличиваться:

$$F_{\text{упр}} = kx, \quad (4)$$

где x – смещение поршня от начального положения. Учитывая, что $F_A = p_0S$, получаем для давления газа:

$$p = p_0 + \frac{k}{S}x,$$

или в виде зависимости давления от объёма:

$$\begin{aligned} p(V) &= p_0 + \frac{k}{S^2}(V - SL_0) = \\ &= \left(p_0 - \frac{kL_0}{S} \right) + \frac{kV}{S^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Мы видим, что с газом происходит процесс, в котором *давление газа является линейной функцией объёма*.

При $V = SL_0$ (начальный объём) давление равно атмосферному p_0 , а при $V = S(L_0 + d)$ давление возрастает до $p_0 + kd/S$.

Работу газа определим по графику процесса в координатах $p(V)$ (рис. 5). Работа численно равна площади под графиком процесса (на рис. 5 эта площадь заштрихована):

$$A = \left(2p_0 + \frac{kd}{S} \right) \frac{Sd}{2} = d \left(p_0S + \frac{kd}{2} \right). \quad (6)$$

Изменение внутренней энергии в этом процессе равно

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \\ &= \frac{3}{2}d \left[k(L_0 + d) + p_0S \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (1), получим:

$$Q = d \left[\frac{5}{2} p_0 S + 2kd + \frac{3}{2} kL_0 \right].$$

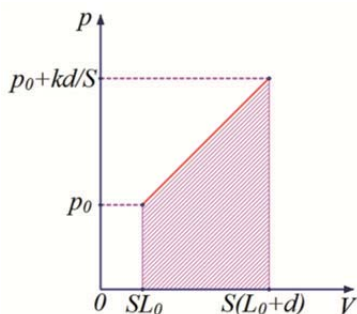


Рис. 5

Задача 3. Вертикальный цилиндр, открытый с одного конца в атмосферу, разделён на две равные части лёгким поршнем. Снизу под поршнем находится один моль гелия. Над поршнем – слой жидкости, объём которой вдвое меньше объёма гелия. Гелий медленно нагревают, и поршень медленно поднимается. Какое количество теплоты Q необходимо сообщить гелию, чтобы вся жидкость вылилась? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

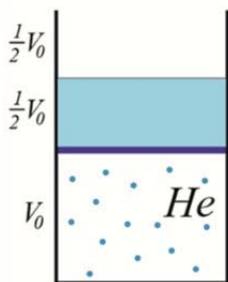


Рис. 6

Решение. Так как нагревание медленное, процесс, происходящий с гелием, можно считать равновесным, причём давление гелия в каждом состоянии равно внешнему давлению: сумме атмосферного и гидростатического давлений. Пока жидкость не начала выли-

ваться, процесс нагревания является изобарным с давлением, равным

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho g V_0}{2S}. \quad (1)$$

Как только жидкость начинает выливаться, зависимость давления гелия от его объёма выглядит следующим образом:

$$p(V) = p_0 + \frac{\rho g (2V_0 - V)}{S}.$$

График процесса изображён на рис. 7.

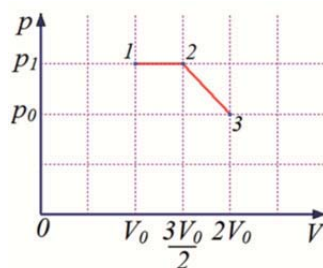


Рис. 7

Для дальнейшего решения применяем первый закон термодинамики

$$Q = \Delta U_{13} + A_{13}, \quad (2)$$

уравнение Менделеева–Клапейрона для начального и конечного состояний гелия:

$$p_1 V_0 = \nu R T_1$$

$$2p_0 V_0 = \nu R T_3,$$

а также тот факт, что работа газа численно равна площади под графиком $p(V)$. Кроме того, гелий – одноатомный газ и его внутренняя энергия определяется формулой

$$U = \frac{3}{2} \nu R T.$$

Итак:

$$\begin{aligned} \Delta U_{13} &= \frac{3}{2} \nu R (T_3 - T_1) = \\ &= \frac{3}{2} (2p_0 V_0 - p_1 V_0) = 3p_0 V_0 - \frac{3}{2} p_1 V_0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$A_{13} = \frac{p_1 V_0}{2} + \frac{p_1 + p_0}{2} \cdot \frac{V_0}{2} = \frac{3p_1 V_0}{4} + \frac{p_0 V_0}{4}. \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), получаем

$$Q = \frac{V_0}{4} (13p_0 + p_1),$$

а учитывая (1), имеем

$$Q = \frac{V_0}{4} \left(14p_0 + \frac{\rho g V_0}{2S} \right).$$

Задача 4. Состояние идеального газа изменяется в процессе 1–2, график которого изображён на рис. 8. Давление и объём газа в состояниях 1 и 2 известны. Определить максимальную температуру газа в этом процессе.

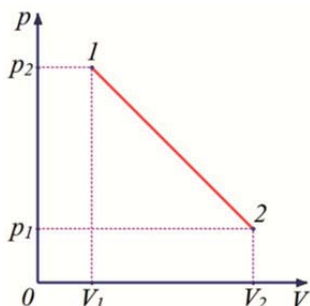


Рис. 8

Решение. Для понимания природы изменения температуры в процессе 1–2 нарисует несколько изотерм. Как известно, чем выше расположена изотерма, тем больше температура, при которой происходит данный изотермический процесс. Из рис. 9 видно, что график процесса 1–2 при «движении» из точки 1 в точку 2 в начале пересекает изотермы с большей температурой и при дальнейшем увеличении объёма температура газа увеличивается. Увеличение температуры происходит до состояния с некоторым объёмом V^* , после этого при дальнейшем приближении к состоянию 2 температура уменьшается.

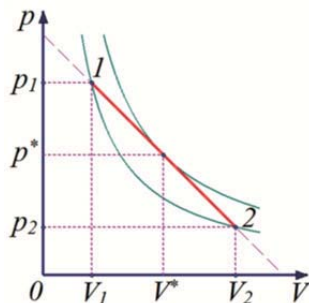


Рис. 9

График процесса 1–2 является касательной к изотерме, соответствующей максимальной температуре $T_{\max}$. Значения давления и объёма в точке касания обозначим через p^* и V^* .

Составим уравнение процесса 1–2. В общем виде уравнение этого линейного процесса имеет вид

$$p = p_0 - kV, \quad (1)$$

где p_0 и k – некоторые постоянные. Определим эти постоянные, записав уравнение (1) для точек 1 и 2:

$$p_1 = p_0 - kV_1,$$

$$p_2 = p_0 - kV_2.$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$k = \frac{p_1 - p_2}{V_2 - V_1}, \quad (2)$$

$$p_0 = \frac{p_2 V_1 - p_1 V_2}{V_1 - V_2}. \quad (3)$$

Уравнение изотермы (из уравнения Менделеева–Клапейрона):

$$p = \frac{\nu RT}{V}. \quad (4)$$

В точке касания выполняется соотношение

$$p_0 - kV^* = \frac{\nu RT_{\max}^*}{V^*}.$$

Так как у графика линейного процесса и изотермы только одна общая точка, это уравнение, являющееся квадратным относительно V^* , должно иметь один корень, следовательно, дискриминант уравнения должен быть равен нулю:

$$p_0^2 - 4k\nu RT_{\max} = 0,$$

откуда для максимальной температуры получаем

$$T_{\max} = \frac{p_0^2}{4k\nu R}. \quad (5)$$

Подставляя сюда выражения для p_0 и k , находим

$$T_{\max} = \frac{(p_1 V_2 - p_2 V_1)^2}{4\nu R(p_1 - p_2)(V_2 - V_1)}.$$

Для читателей, знакомых с математическим анализом, можно предложить следующий способ.

1. Получим в явном виде функцию $T(V)$ для линейного процесса. Для этого из уравнений (1) и (4) исключим давление p и выразим температуру T . Получим

$$T(V) = \frac{-kV^2 + p_0 V}{\nu R}. \quad (6)$$

График этой функции изображён на рис. 10.

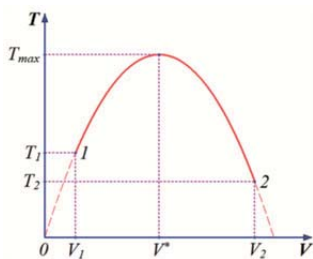


Рис. 10

2. Возьмём производную от $T(V)$:

$$\frac{dT}{dV} = \frac{-2kV + p_0}{\nu R}.$$

Приравнивая её к нулю, получим объём V^* , при котором температура становится максимальной:

$$V^* = \frac{p_0}{2k}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим формулу (5).

Ответ. $T_{\max} = \frac{(p_1 V_2 - p_2 V_1)^2}{4\nu R(p_1 - p_2)(V_2 - V_1)}.$

Задача 5. Рабочим телом теплового двигателя является некоторое количество аргона. Известно, что за один цикл газ совершает работу, равную $A = 60$ кДж. При этом его внутренняя энергия изменяется так, как показано на рис. 11, где участок 2–3 — отрезок параболы, левая ветвь которой проходит через начало координат. Определить исходное значение внутренней энергии газа U_0 .

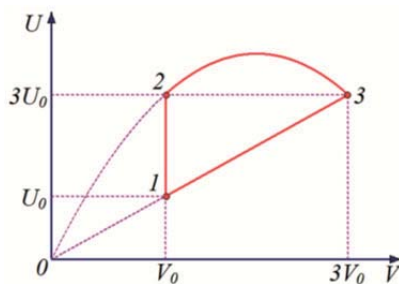


Рис. 11

Решение. Очевидно, что искомое значение внутренней энергии необходимо связать с заданной работой газа в цикле. Вычислить работу можно как площадь цикла на графике в координатах p – V . Для построения графика разберёмся с процессом 2–3.

Так как это участок параболы, проходящей через начало координат и ветви которой направлены вниз, зависимость внутренней энергии от объёма имеет вид

$$U = -\alpha V^2 + \beta V,$$

α и β – постоянные коэффициенты, значения которых определим из условий $U=U_0$ при $V=V_0$ и $U=3U_0$ при $V=3V_0$. Составим систему уравнений:

$$\begin{aligned} U_0 &= -\alpha V_0^2 + \beta V_0, \\ 3U_0 &= -9\alpha V_0^2 + 3\beta V_0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим

$$\alpha = \frac{U_0}{V_0^2}, \quad \beta = \frac{4U_0}{V_0}.$$

Окончательно, зависимость внутренней энергии от объёма имеет вид

$$U = -\frac{U_0}{V_0^2} V^2 + \frac{4U_0}{V_0} V. \quad (1)$$

Как известно, аргон – одноатомный газ, поэтому его внутреннюю энергию можно представить в виде

$$U = \frac{3}{2} pV. \quad (2)$$

Из последних двух уравнений и получаем линейную зависимость давления от объёма:

$$p = -\frac{2U_0}{3V_0^2} V + \frac{8U_0}{3V_0}. \quad (3)$$

Таким образом, график цикла в координатах p – V представляет собой прямоугольный треугольник (рис. 12), площадь которого численно равна работе газа за цикл:

$$A = (p_2 - p_1) V_0. \quad (4)$$

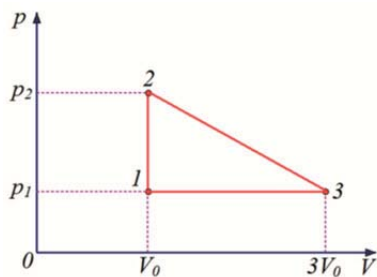


Рис. 12

Из (3) найдём значения p_1 и p_2 :

$$p_1 = p_3 = \frac{2U_0}{3V_0}, \quad (5)$$

$$p_2 = \frac{2U_0}{V_0}. \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получаем

$$A = \frac{4}{3} U_0, \text{ откуда } U_0 = \frac{3}{4} A.$$

Ответ. $U_0 = \frac{3}{4} A$.

Задача 6. Идеальный одноатомный газ совершает цикл 1–2–3–1, в котором график зависимости давления от плотности изображён на рис. 13. График процесса 2–3 представляет собой участок гиперболы, описываемой уравнением

$$p = b + \frac{k}{\rho}.$$

Определить КПД цикла.

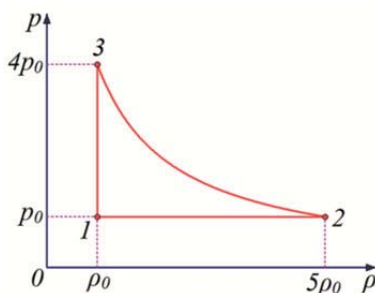


Рис. 13

Очевидно, что процесс 2–3 это процесс линейной зависимости давления от объёма. Коэффициенты b и k определим из системы уравнений

$$\begin{aligned} 4p_0 &= b + \frac{k}{\rho_0}, \\ p_0 &= b + \frac{k}{5\rho_0}. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получаем

$$b = \frac{p_0}{4}, \quad k = \frac{15p_0\rho_0}{4}.$$

Таким образом, процесс 2–3 описывается уравнением

$$p = \frac{p_0}{4} + \frac{15p_0\rho_0}{4\rho}.$$

Учитывая, что $\rho = m/V$, получаем линейную зависимость давления от объёма

$$p = \frac{p_0}{4} + \frac{15p_0\rho_0}{4m}V.$$

График цикла в координатах p – V имеет вид, изображённый на рис. 14.

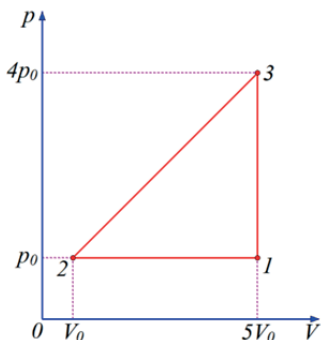


Рис. 14

КПД цикла равен отношению работы за цикл к количеству теплоты, полученному от нагревателя:

$$\eta = \frac{A}{Q_H}. \quad (1)$$

Работа в цикле численно равна площади цикла в координатах p – V :

$$A = 6p_0V_0. \quad (2)$$

Газ получает теплоту только в процессе 2–3. Определим её из первого закона термодинамики:

$$Q_H = \Delta U_{23} + A_{23} = \frac{3}{2}(20p_0V_0 - p_0V_0) + \left(\frac{p_0 + 4p_0}{2}\right)4V_0 = \frac{77}{2}p_0V_0. \quad (3)$$

Из (1)–(3) получаем $\eta = \frac{12}{77}$.

Ответ. 15,6%.

Задачи для самостоятельного решения

1. При нагревании одного моля идеального газа от температуры $T_1 = 300$ К до температуры $T_2 = 600$ К его объём увеличивается пропорционально $\sqrt{T}$. Найти работу, совершённую газом в этом процессе.

2. Диаграмма зависимости давления p от объёма V для некоторой массы идеального газа состоит из двух изотерм и двух отрезков прямых, проходящих через начало координат (см. рис. 15). Найти объём газа V_4 в состоянии 4, если известны его объёмы V_1 , V_2 и V_3 в состояниях 1, 2 и 3 соответственно.

3. При расширении одного моля аргона его давление уменьшается так, как показано на p – V -диаграмме (см. рис. 16). Определите максимальное значение внутренней энергии U газа в процессе 1–2. Начальные значения

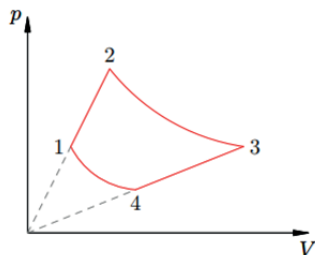


Рис. 15

объёма и давления газа равны соответственно $V_0 = 0,1$ м³ и $p_0 = 5 \cdot 10^4$ Па.

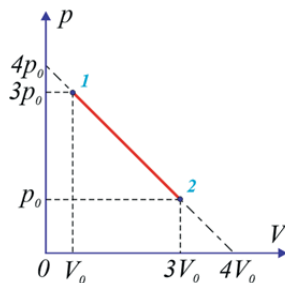


Рис. 16

4. Некоторое количество азота охлаждают так, что его давление меняется пропорционально его объёму. Затем его нагревают при постоянном объёме до начальной температуры. Найдите отношение количества теплоты, отданного газом, к количеству теплоты, полученному им. Азот при рассматриваемых температурах можно считать идеальным газом.

5. На рис.17 изображён график процесса, происходящего с одним молем идеального газа. Нарисуйте график этого процесса в координатах p - V и p - T .

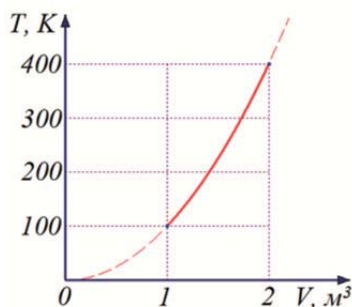


Рис. 17

6. Какую работу A надо совершить для сжатия некоторого количества идеального одноатомного газа в $k = 3$ раза, если внутренняя энергия газа U меняется при этом так, как показано на рис.18? Участок 1-2 – отрезок параболы с вершиной в начале координат. Исходное значение внутренней энергии газа равно $U_1 = 135$ кДж.

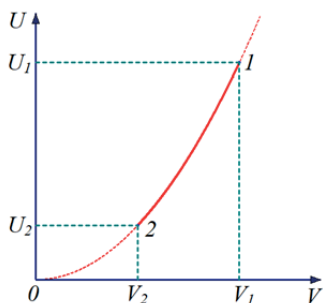


Рис. 18

7. Давление p и объём V идеального газа циклически изменяют в соответствии с графиком, показанным на рис. 19. Известно, что работа газа на участке 1-2 в $n = 2$ раза больше, чем модуль его работы на участке 3-1. Определите отношение k максимальной и минимальной абсолютных температур газа в этом цикле.

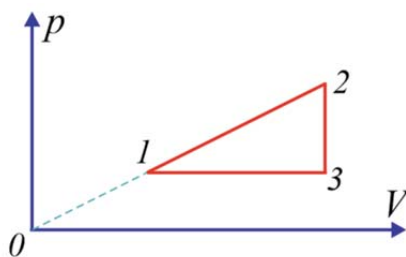


Рис. 19

8. Гладкий поршень делит на две части закрытый с двух сторон цилиндр, лежащий горизонтально. В правой части цилиндра находится идеальный одноатомный газ, а в левой – вакуум и упирающаяся в поршень пружина, причём её длина в недеформированном состоянии равна расстоянию между внутренними сторонами торцевых стенок цилиндра за вычетом толщины поршня. В начальном состоянии объём газа $V_1 = 1$ л, а давление равно $p_1 = 10^5$ Па. Определите количество теплоты Q , которое нужно передать газу, чтобы его объём увеличился в $n = 2$ раза.

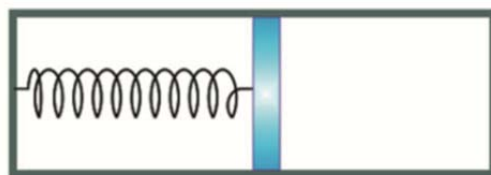


Рис. 20