Паркевич Егор Вадимович
Студент 5 курса факультета проблем физики и энергетики МФТИ.

Немного о законе Био – Савара – Лапласа

В данной работе на примерах решения задач показано, как можно использовать закон Био – Савара – Лапласа для расчёта магнитных полей, создаваемых проводниками с током, а также системами проводников; приведено правило буравчика для нахождения направления магнитного поля.

Все мы хорошо знаем, что в электростатике – науке о поле неподвижных зарядов – вводится понятие вектора напряжённости электростатического поля $\vec{E}$, который, согласно определению, в любой точке силовой линии направлен по касательной к данной линии. Этот вектор, как известно, характеризует величину поля и силу $\vec{F} = \vec{E}q_0$, с которой поле действует на некий пробный заряд q_0, помещённый в данное поле. Аналогичным образом в магнитостатике – науке об магнитном поле постоянных токов – вводится понятие вектора магнитной индукции (вектор напряжённости магнитного поля), характеризующего величину магнитного поля и направленного по касательной в каждой точке силовой линии магнитного поля. Поскольку данные векторы задают картину распределения поля в зависимости от тех или иных характеристик, например, расстояния от источника поля до точки наблюдения, то необходимо прибегать к использованию специальных законов, которые устанавливали бы данную зависимость. Так, например, в электростатике подобным законом служит экспериментально установленный закон взаимодействия неподвижных зарядов, открытый французским физиком Ш. Кулоном в 1785 г. Аналогичным образом в магнитостатике в качестве подобного закона рассматривают экспериментально установленный в 1820 г. *закон Био – Савара – Лапласа.*

Данный закон утверждает, что малый элемент проводника длиной $\left|\Delta\vec{L}\right|$, по которому течёт постоянный ток I, создаёт магнитное поле $\Delta\vec{B}$, индукция которого в точке наблюдения на расстоянии $\left|\vec{r}\right|$ от элемента определяется соотношением (см. рис. 1):

$$\left|\Delta\vec{B}\right| = k\frac{I\Delta L\sin\alpha}{r^2}, \qquad (1)$$

где I – [А], r, ΔL – [м], а k – коэффициент пропорциональности, который в системе единиц СИ записывается в виде $k = \mu_0/4\pi$ (коэффициент $\mu_0 = 1,257\cdot 10^{-7}$ Гн/м называется *магнитной постоянной вакуума*); α – угол между векторами $\Delta\vec{L}$ и $\vec{r}$ (вектор $\Delta\vec{L}$ совпадает с элементом проводника и направлен по току в нём, вектор $\vec{r}$ направлен от $\Delta\vec{L}$ в точку, в которой вычисляется поле (см. рис. 1). Направление вектора $\Delta\vec{B}$ определяется следующим образом:

1) во-первых, вектор $\Delta\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат $\Delta\vec{L}$ и $\vec{r}$ (для конфигурации, изображённой на рисунке, либо на нас, либо от нас;

2) во-вторых, выбор между этими двумя возможными направлениями осуществляется с помощью *правила буравчика.*

Данное правило представляет собой мнемонический закон выбора направления магнитного поля, создаваемого проводником с током. Если мы расположим буравчик с правой нарезкой по направлению тока, текущего по проводнику, и будем вращать рукоятку так, чтобы буравчик перемещался по направлению тока, то соответствующее направление вращения рукоятки укажет направление вектора магнитного поля, созданного данным проводником (см. рис. 2).

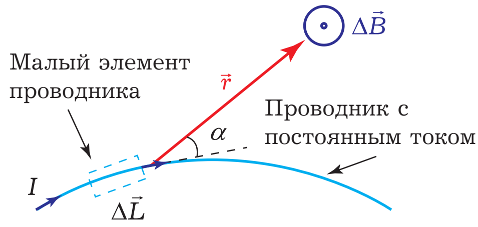

Рис. 1. Схематический чертёж: I – постоянный ток; $\Delta\vec{L}$ – длина малого элемента проводника; $\Delta\vec{B}$ – магнитное поле, создаваемое этим элементом на расстоянии r; вектор перпендикулярен плоскости рисунка и направлен на нас; α – угол между векторами $\Delta\vec{L}$ и $\vec{r}$.

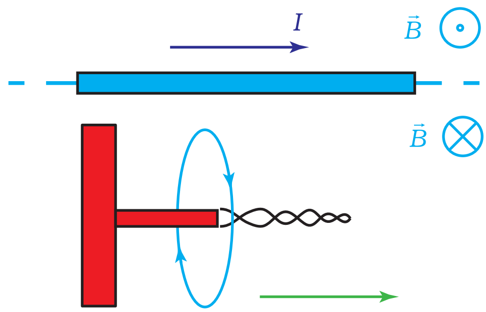

Рис. 2. Перемещение буравчика с правой нарезкой по направлению тока; синий кружочек с точкой означает, что поле в этой области направлено на нас, с крестиком – от нас

1. Из истории

После опытов Г. Эрстеда началось интенсивное изучение магнитного поля постоянного электрического тока. В 1820 г. французские учёные Жан-Батист Био и Феликс Савар исследовали магнитные поля, создаваемые в воздухе постоянным прямолинейным током, круговым током, катушкой с током и т. д. На основании многочисленных опытов они пришли к следующим выводам:

а) во всех случаях индукция магнитного поля электрического тока пропорциональна силе тока;

б) магнитная индукция зависит от формы и размеров проводника с током;

в) магнитная индукция в произвольной точке поля зависит от расположения этой точки по отношению к проводнику с током.

Так, например, в случае длинного прямолинейного проводника с постоянным током I магнитная индукция пропорциональна отношению I/r, где r – расстояние от рассматриваемой точки поля до проводника. Магнитная индукция в центре кругового витка радиуса R с током I оказалась пропорциональной I/R. Впоследствии Био и Савар пытались получить общий закон, который позволял бы вычислять магнитную индукцию в каждой точке поля, создаваемого током, текущим по проводнику любой формы. Однако сделать это им не удалось. По их просьбе этой задачей занялся французский математик, астроном и физик П. Лаплас. Он учёл векторный характер магнитной индукции и высказал важную гипотезу о том, что индукция $\vec{B}$ в каждой точке магнитного поля любого проводника с током представляет собой векторную сумму индукций $\Delta\vec{B}$ элементарных магнитных полей, создаваемых каждым участком $\Delta\vec{L}$ этого проводника. Тем самым Лаплас предположил, что при наложении магнитных полей справедлив *принцип суперпозиции*, т. е. принцип независимого действия полей, аналогичный принципу суперпозиции в электростатике:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i. \qquad (2)$$

В частном случае наложения двух полей получим:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \qquad (3)$$

а модуль магнитной индукции можно вычислить при помощи теоремы косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos\alpha}, \qquad (4)$$

где α – угол между векторами $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$. Таким образом, Лаплас обобщил результаты экспериментов Био и Савара в виде дифференциального закона (1), названного позже законом Био – Савара – Лапласа.

Справедливость закона Био – Савара – Лапласа была подтверждена и для других форм движения заряда. Так, в 1903 г. русский физик А.А. Эйхенвальд установил появление магнитного поля при движении наэлектризованных тел, например, пластин плоского конденсатора, а в 1911 г. А.Ф. Иоффе исследовал магнитное поле пучка ускоренных электронов.

В современной формулировке закон Био – Савара – Лапласа чаще рассматривают как следствие двух уравнений Максвелла для магнитного поля при условии постоянства электрического поля. То есть в современной формулировке уравнения Максвелла выступают как более фундаментальные прежде всего хотя бы потому, что формулу Био – Савара – Лапласа нельзя просто обобщить на случай полей, зависящих от времени.

2. Примеры использования данного закона для расчёта магнитных полей

Несмотря на некоторые ограничения, в магнитостатике этот закон позволяет получить множество важных результатов. Рассмотрим некоторые примеры использования данного закона для расчёта магнитных полей, создаваемых проводниками с постоянным током, а также системами проводников.

Задача 1. По кольцу радиуса R течёт ток I (см. рис. 3). Используя закон Био – Савара – Лапласа, определим магнитную индукцию в центре кольца, а также в точке, расположенной на оси кольца на расстоянии h от его центра.

Решение. Заметим, что данная задача аналогична нахождению напряжённости поля, созданного электрическими зарядами на кольце. Воспользуемся принципом суперпозиции (см. выражение (2)). Для этого мысленно разобьём кольцо на малые элементы длиной Δl, по которым течёт ток I (в электростатике кольцо разбивалось на точечные заряды). Рассмотрим поле, создаваемое на оси кольца двумя противоположными малыми участками длиной Δl (на рис. 3 эти участки обозначены как Δl_1 и Δl_2). По закону Био – Савара – Лапласа находим, что каждый участок кольца создаёт в точке, находящейся на оси кольца на расстоянии h от его плоскости, магнитное поле с индукцией

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\Delta l}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\Delta l}{(R^2 + r^2)}. \tag{4}$$

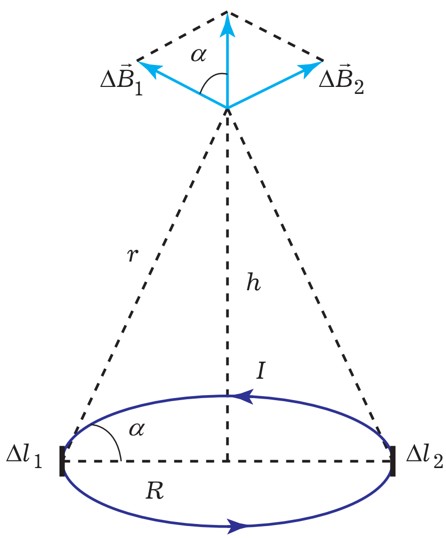

Рис. 3. Кольцо с током

Векторы индукции $\Delta\vec{B}_1$ и $\Delta\vec{B}_2$, созданные участками провода Δl_1 и Δl_2 соответственно, направлены перпендикулярно отрезкам, проведённым из участков кольца Δl_1, Δl_2 в исследуемую точку. Поэтому вектор суммы $\Delta\vec{B}_1 + \Delta\vec{B}_2$ направлен по оси кольца, а его величина определяется соотношением $\Delta B_1 \cos\alpha + \Delta B_2 \cos\alpha$. Поскольку всё кольцо можно разбить на пары противоположных элементов, то и поле всего кольца будет направлено вдоль его оси, а величина индукции суммарного поля определяется суммой по всем элементам, на которые можно разбить кольцо:

$$B = \Delta B_1 \cos\alpha + \Delta B_2 \cos\alpha + \\ + \Delta B_3 \cos\alpha + \ldots$$

Используя выражение (4) и учитывая, что

$$\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}},$$

а $\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \ldots = 2\pi R$, получим:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + h^2)^{3/2}}. \tag{5}$$

Для индукции в центре кольца $(h = 0)$ формула (7) даёт:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \tag{6}$$

Ответ. $B(h) = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + h^2)^{3/2}}$;

$$B(h = 0) = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Задача 2. Два кольца радиусами R_1 и R_2, по которым текут токи I_1 и I_2, расположены так, что плоскости колец перпендикулярны (см. рис. 4), а их центры совпадают. Найти направление и величину вектора магнитной индукции в общем центре колец.

Решение. Вектор индукции $\vec{B}_1$ магнитного поля, созданного током I_1 в центре кольца радиусом R_1, направлен согласно правилу буравчика перпендикулярно плоскости кольцевого тока I_1 вправо. Вектор индукции $\vec{B}_2$ магнитного поля, созданного током I_2 в центре кольца радиусом R_2, направлен перпендикулярно плоскости этого кольца вверх. Вектор индукции результирующего магнитного поля $\vec{B}$, созданного обоими токами в центре колец, равен векторной сумме

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

а модуль этого вектора равен

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}.$$

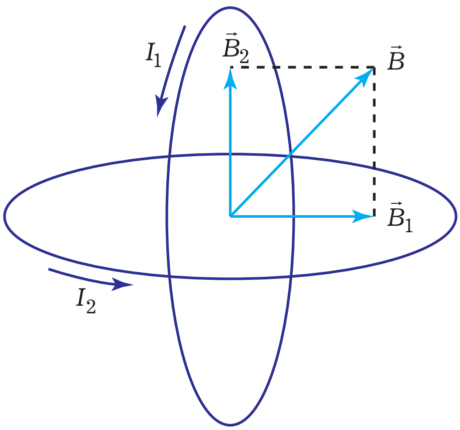

Рис. 4. Два кольца радиусами R_1 и R_2 с токами I_1 и I_2

Индукция магнитного поля кругового тока I_1 в центре кольца определяется из полученного ранее выражения (8):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R}.$$

Аналогично, индукция магнитного поля кругового тока I_2 равна

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2R}.$$

В итоге получаем:

$$B = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I_1}{2R_1}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I_2}{2R_2}\right)^2}.$$

Ответ. $B = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I_1}{2R_1}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I_2}{2R_2}\right)^2}.$

Задача 3. Во сколько раз изменится индукция магнитного поля в центре кольца с током, если согнуть кольцо по диаметру под углом α (см. рис. 5). Считать, что ток в кольце не меняется.

Решение. Индукция в центре плоского (не согнутого) кольца равна $\tilde{B} = \mu_0 I/2R$. Для нахождения поля согнутого кольца воспользуемся законом Био – Савара – Лапласа и принципом суперпозиции. Все участки одного полукольца будут создавать в его центре поле с индукцией, направленной перпендикулярно плоскости полукольца и равной:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \Delta l}{R^2},$$

где Δl – длина элемента кольца. Поэтому ток в каждом полукольце создаёт в центре магнитное поле с индукцией

$$B = \frac{\mu_0 I}{4R},$$

причём векторы индукций магнитного поля каждого полукольца перпендикулярны его плоскости.

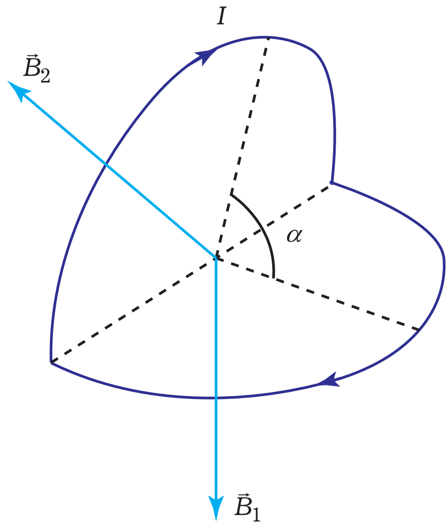

Рис. 5. Согнутое кольцо

На рис. 5 векторы индукций горизонтального и наклонного полуколец обозначены как $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ соответственно. Согласно принципу суперпозиции, индукция суммарного поля есть векторная сумма векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$. Поскольку угол между векторами равен $180^\circ - \alpha$, то из рис. 6 находим индукцию суммарного магнитного поля в центре полуколец:

$$B_0 = 2B\cos(90^\circ - \alpha/2) =$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2R}\sin(\alpha/2).$$

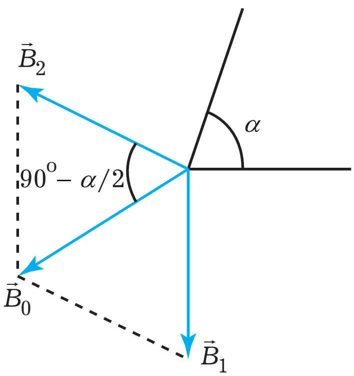

Рис. 6. Направление векторов магнитных индукций

Отсюда находим, во сколько раз уменьшится магнитная индукция согнутого витка:

$$\frac{B_0}{\tilde{B}} = \sin(\alpha/2).$$

Ответ. $\frac{B_0}{\tilde{B}} = \sin(\alpha/2).$

Задача 4. По цепи, состоящей из трёх проводников AC, CB, AB с соответствующими сопротивлениями R, R и $2R$ пускают ток I через подводящие провода, как показано на рис. 7. Определите магнитное поле B в центре этого равностороннего треугольника со стороной a. Магнитным полем подводящих проводов пренебречь.

Решение. Рассмотрим данную схему на рис. 8. В силу параллельного соединения проводников AC – CB и AB (AC и CB соединены последовательно) через них будут течь соответственно токи I_1 и I_2, где $I_1 + I_2 = I$ согласно первому правилу Кирхгофа. Найдём, во сколько раз ток I_2 больше тока I_1. Используя закон Ома для последовательно соединённых проводников AC – CB и параллельно соединённых AC – CB и AB, находим, что $I_2 = 2I_1$.

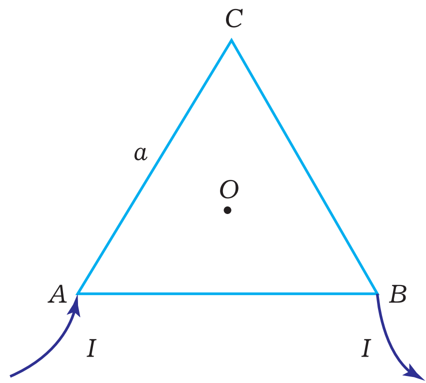

Рис. 7. Система из трёх проводников AC, CB, AB с соответствующими сопротивлениями R, R и 2R и текущим по ним постоянным током I

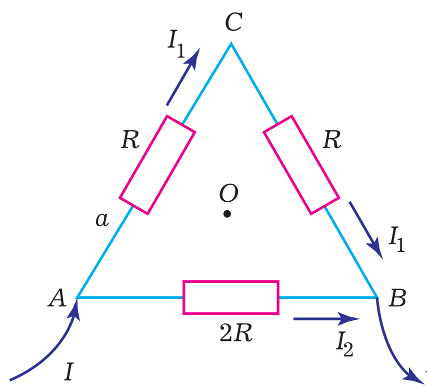

Рис. 8

Для нахождения суммарной магнитной индукции в центре равностороннего треугольника воспользуемся законом Био – Савара – Лапласа.

Разобьём проводники на множество малых элементов длиной Δa_i, каждый из которых создаёт индукцию ΔB_i в точке O. Магнитную индукцию от проводника AC можно записать следующим образом:

$$B_{AC} = \sum_i \Delta B_i = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 \Delta a_i \sin\alpha_i}{r_i^2} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \sum_i \frac{\Delta a_i \sin\alpha_i}{r_i^2}, \quad (7)$$

где суммирование производится по всем малым элементам длиной Δa_i; α_i – угол между направлением вектора $\Delta\vec{a}_i$, совпадающего с направлением тока I_1, и радиус-вектором $\vec{r}_i$, проведённым от i-го элемента до точки наблюдения. Аналогично можно записать и для магнитных индукций от остальных проводников:

$$B_{CB} = \sum_i \Delta B_i = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \sum_i \frac{\Delta a_i \sin\alpha_i}{r_i^2}, \quad B_{AB} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \sum_i \frac{\Delta a_i \sin\alpha_i}{r_i^2}. \quad (8)$$

Используя принцип суперпозиции и правило буравчика, находим, что индукция суммарного магнитного поля от трёх проводников в точке O равна:

$$B_O = B_{AB} - (B_{AC} + B_{BC}).$$

Подставляя полученные выражения (7), (8) и учитывая, что $I_2 = 2I_1$, получаем:

$$B_O = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \sum_i \frac{\Delta a_i \sin\alpha_i}{r_i^2} - 2 \cdot \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \sum_i \frac{\Delta a_i \sin\alpha_i}{r_i^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{\Delta a_i \sin\alpha_i}{r_i^2} (I_2 - 2I_1) = 0.$$

Ответ. $B_O = 0$.

Задача 5. В предыдущей задаче мы не стали вычислять магнитное поле от прямого проводника с током конечной длины, однако в некоторых задачах так поступать уже нельзя. В связи с этим найдём зависимость магнитного поля B от расстояния r_0 от проводника с током I конечной длины до точки наблюдения (см. рис. 9). А также получим выражение для магнитной индукции поля бесконечного тонкого проводника.

Решение. Рассмотрим проводник MN, изображённый на рис. 9. Согласно закону Био – Савара – Лапласа, модуль вектора магнитной индукции $\Delta\vec{B}$ поля, создаваемого в точке A элементом $\Delta\vec{L}$ проводника с током I, равен:

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta L \sin\varphi}{4\pi r^2},$$

где φ – угол между векторами $\Delta\vec{L}$ и $\vec{r}$. Эти векторы для всех участков прямолинейного проводника лежат в плоскости чертежа. Поэтому в точке A все векторы $\Delta\vec{B}$, характеризующие магнитные поля, создаваемые отдельными участками нашего проводника, направлены перпендикулярно плоскости чертежа (к нам).

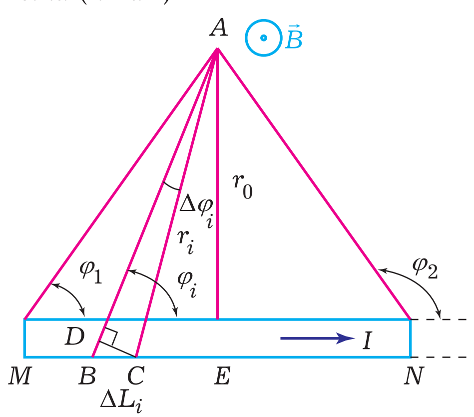

Рис. 9. Проводник конечной длины с постоянным током I

Это сильно упрощает определение индукции $\Delta\vec{B}$ результирующего магнитного поля; вектор $\vec{B}$ также перпендикулярен плоскости чертежа и численно равен алгебраической сумме модулей векторов $\Delta\vec{B}$:

$$B = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta B_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta L_i \sin\varphi_i}{r_i^2}. \qquad (9)$$

Здесь суммирование ведётся по всем элементам проводника ΔL_i; величины φ_i и r_i указаны на рис. 9.

Далее упростим эту сумму. Для этого выразим элементы ΔL_i и r_i через одну независимую переменную φ_i. Проведём из точки A дугу CD окружности (см. рис. 9), радиус которой вследствие малости длины ΔL_i участка BC проводника можно считать равным r_i. По этой же причине угол при вершине D треугольника BCD можно считать прямым. Обозначим через r_0 длину перпендикуляра AE, опущенного из точки A на проводник. Как видно из чертежа, $r_i = r_0 / \sin\varphi_i$ и $\Delta L_i = CD / \sin\varphi_i$. В то же время $CD = r_i \Delta\varphi_i$, поэтому

$$\Delta L_i = \frac{r_i \Delta\varphi_i}{\sin\varphi_i} = \frac{r_0 \Delta\varphi_i}{\sin^2\varphi_i}.$$

Подставляя r_i и ΔL_i в (9), получим:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \sum_{\Delta\varphi_i} \sin\varphi_i \Delta\varphi_i.$$

Поскольку элементы углов малы, то данную сумму можно заменить на интеграл:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi d\varphi,$$

где φ_1 и φ_2 – значение угла φ для крайних точек проводника MN. Проинтегрировав данное выражение по переменной φ, получим в итоге:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2).$$

Отсюда легко видеть, что если проводник бесконечный, то $\varphi_1 = 0$, а $\varphi_2 = \pi$. Тогда магнитная индукция в любой точке поля такого проводника с током равна:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \qquad (10)$$

т. е. обратно пропорциональна кратчайшему расстоянию от этой точки до проводника.

Ответ. $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$;

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Задача 6. Электрический ток I протекает по проводу, изогнутому, как показано на рис. 10. Найти значение магнитной индукции в центре окружности радиусом R.

Указание. Воспользоваться формулой для магнитного поля бесконечного длинного проводника с током $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$, где I – ток, протекающий через данный провод, r – расстояние от проводника до точки наблюдения.

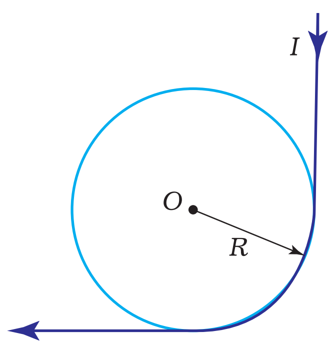

Рис. 10

Решение. Данная задача осложнена тем, что для расчёта магнитной индукции такой системы необходимо уже пользоваться интегрированием по всему проводнику, если разбить его на множество элементов. Однако есть один подход, позволяющий избежать этого. Главная его идея со-стоит в максимальном упрощении рассматриваемой схемы. Например, в нашем случае исходную схему можно рассматривать как систему из дуги окружности длиной $\pi R/2$ и двух полубесконечных прямолинейных проводников, по которым течёт ток I. Дополним данную схему до окружности и четырёх бесконечных проводников, по которым также течёт ток I в направлениях, как показано на рис. 11.

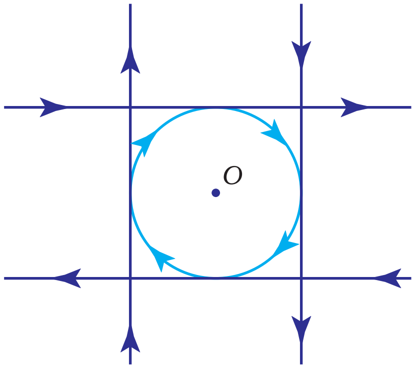

Рис. 11

Фактически исходная схема представляет собой 1/4 часть от дополненной в силу симметрии. Соответственно, если посчитать суммарную магнитную индукцию B в точке O в схеме на рис. 11, то она окажется в 4 раза больше суммарной индукции B_0 в той же точке в схеме на рис. 10. Найдём теперь магнитные индукции от каждого проводника. Кольцо с током I в точке O на рис. 11 создаёт магнитную индукцию, равную:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Далее, магнитное поле от четырёх бесконечных прямолинейных проводников в этой же точке равно:

$$B_2 = 4 \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{2\mu_0 I}{\pi R}.$$

В итоге суммарная индукция от четырёх бесконечных прямолинейных проводов и поля от круглого витка равна:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} + \frac{2\mu_0 I}{\pi R} = \frac{\mu_0 I(\pi + 4)}{2\pi R},$$

откуда находим суммарную индукцию B_0 в точке O в исходной схеме:

$$B_0 = \frac{B}{4} = \frac{\mu_0 I(\pi + 4)}{8\pi R}.$$

Ответ. $B_0 = \dfrac{\mu_0 I(\pi + 4)}{8\pi R}.$

Стоит отметить, что из закона Био – Савара – Лапласа следуют ещё некоторые важные свойства, которые будут подробно рассмотрены в следующем номере журнала.

Литература

1. *Путилов К.А.* Курс физики, том 2, учение об электричестве, 6-е изд., Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963 г.

2. *Полунин В.М., Сычёв Г.Т*, Конспект лекций. Электромагнитные явления, Курский государственный технический университет, 2004 г.

3. Задачи по физике: Учебное пособие /*Воробьёв И.И., Зубков П.И., Кутузова Г.А.* и др.; под редакцией Савченко О.Я. 3-е изд., испр. и доп. – Новосибирск, 1999. – 375 с.

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Из всех народов первым будет всегда тот, который опередит другие в области мысли и умственной деятельности.

Л. Пастер