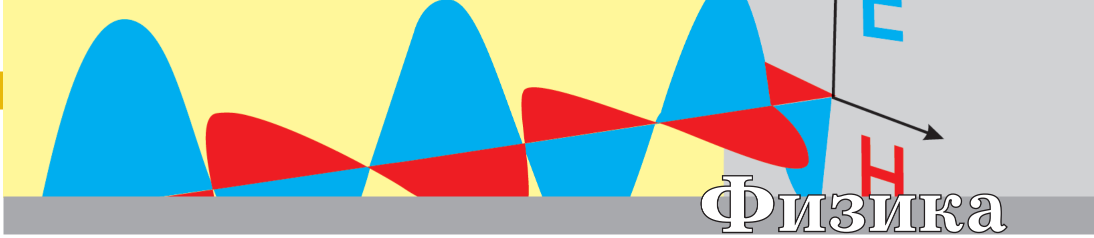

Подлесный Дмитрий Владимирович
Заместитель директора по развитию, научный руководитель ГБОУ РМ «Республиканский лицей», кандидат педагогических наук, доцент, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, народный учитель Республики Мордовия.

Нелинейные элементы в электрических цепях

В статье рассматриваются задачи на расчёт электрических цепей, в которых присутствуют так называемые нелинейные элементы – элементы, проводящие электрический ток, вольт-амперные характеристики (ВАХ) которых не являются прямыми линиями, проходящими через начало координат, как у резисторов.

Почему-то подобные задачи магически действуют на многих учащихся, вводя их «в ступор». Мы покажем, что нет никакой принципиальной разницы в расчётах электрических цепей, содержащих нелинейные элементы, по сравнению с расчётом цепей, содержащих только резисторы. Наряду с электрическими цепями постоянного тока рассмотрим и электрические цепи, содержащие конденсатор или катушку индуктивности, где нелинейный элемент участвует в переходных процессах разрядки конденсатора или установления тока в катушке. А начнём мы с небольшого теоретического введения.

1. Теоретическое введение

Напомним, что резистором называют элемент, проводящий электрический ток и обладающий постоянным электрическим сопротивлением (или просто сопротивлением) R. При подаче на концы резистора электрического напряжения U (рис. 1) через резистор начинает течь электрический ток, сила которого I находится из закона Ома:

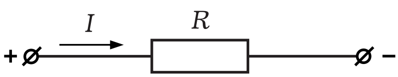

Рис. 1

$$I = \frac{U}{R}.$$

Зависимость силы тока I от напряжения U на каком-либо участке цепи, то есть $I(U)$, принято представлять графически. Этот график называют вольт-амперной характеристикой (сокращённо ВАХ) этого участка цепи.

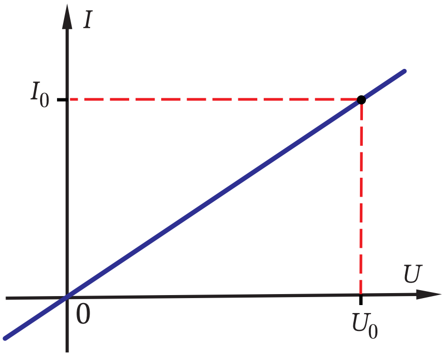

Рис. 2

График зависимости $I(U)$ для резистора представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат (рис. 2). Угловой коэффициент этой прямой есть не что иное, как величина, обратная сопротивлению резистора, то есть его проводимость:

$$k = \frac{I_0}{U_0} = \frac{1}{R} = \Lambda.$$

В отличие от резисторов, многие элементы не имеют постоянного сопротивления. Например, обычная лампочка накаливания *Л* (рис. 3), сопротивление которой в рабочем («горячем») состоянии в десятки раз может превышать её же сопротивление при отключении от источника, то есть в «холодном» состоянии. Это обусловлено температурной зависимостью сопротивления нити накала лампочки, а рост температуры нити накала происходит вследствие выделения на ней джоулева тепла при протекании электрического тока. В связи с этим вольт-амперная характеристика лампочки уже не является прямой, проходящей через начало координат, а имеет вид, представленный на рисунке 4.

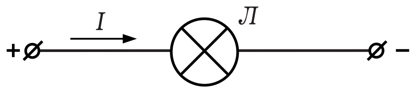

Рис. 3

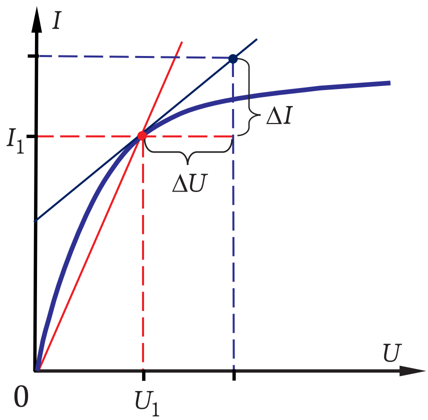

Рис. 4

Если на лампочку подано некоторое напряжении U_1, а сила тока через неё при этом I_1, то при данных условиях текущее, называемое в электротехнике статическим, сопротивление $R_1 = U_1 / I_1$. Величина, обратная текущему сопротивлению, то есть текущая проводимость, есть не что иное как угловой коэффициент прямой, проведённой через начало координат и рассматриваемую точку на вольт-амперной характеристике. Текущее (статическое) сопротивление лампочки не надо путать с её дифференциальным сопротивлением $R_{1\partial}$, определяемым через угловой коэффициент касательной (а точнее через обратную ему величину), проведённой к графику в той же точке:

$$R_{1\partial} = \frac{dU}{dI} = \frac{\Delta U}{\Delta I}.$$

Здесь dI – изменение силы тока в лампочке при изменении напряжения на ней на dU, то есть от значения U_1 до значения $U_1 + dU$; величины ΔI и ΔU находятся из графика касательной (рис. 4).

Лампочка накаливания является ярким представителем семейства нелинейных элементов.

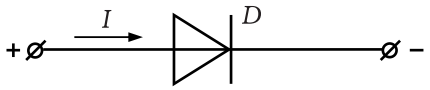

Рис. 5

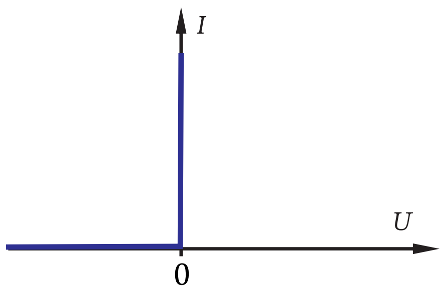

Рис. 6

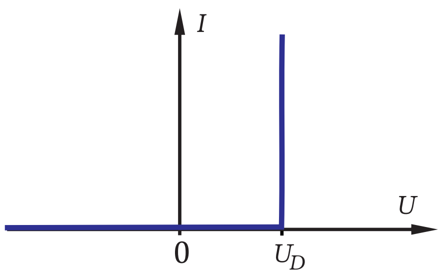

Рис. 7

К нелинейным элементам можно отнести диод – элемент, обладающий односторонней проводимостью. Идеальный диод D имеет нулевое сопротивление, если ток протекает через него в направлении, указываемым стрелкой в его обозначении (рис. 5). Если пытаться через идеальный диод создать ток в противоположном направлении, то ничего не получится, так как в этом случае диод имеет бесконечно большое сопротивление, представляя собой по сути разрыв цепи. Вольт-амперная характеристика идеального диода представлена на рисунке 6.

Часто в электрических цепях присутствует диод, который открывается, то есть начинает пропускать электрический ток, только при подаче на него некоторого порогового напряжения U_D. Вольт-амперная характеристика такого диода изображена на рисунке 7.

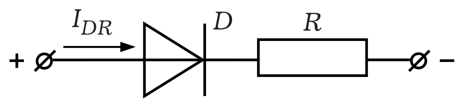

Рис. 8

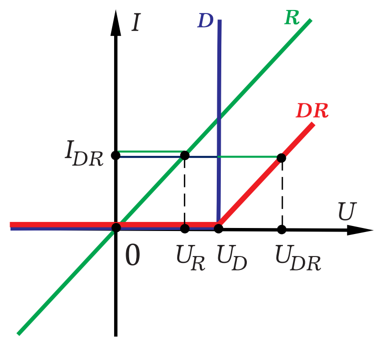

Рис. 9

В качестве примера работы с графиками вольт-амперных характеристик построим ВАХ для участка цепи, представляющего собой последовательное соединение резистора и диода (рис. 8), ВАХ которого изображена на рисунке 7.

При данном построении ВАХ за основу берётся равенство токов на элементах цепи $(I_D = I_R = I_{DR})$, а также учитывается, что напряжение U_{DR} на рассматриваемом участке представляет собой сумму напряжений U_D и U_R на диоде и резисторе соответственно $(U_{DR} = U_D + U_R)$. Таким образом, искомый график найдём соответствующим «сложением» графиков ВАХ диода и ВАХ резистора (рис. 9).

Рассмотрим теперь параллельное соединение тех же самых диода и резистора (рис. 10). В этом случае напряжения на элементах будут равными $(U_D = U_R = U_{DR})$, а сила тока через рассматриваемый участок цепи I_{DR} будет равна сумме сил токов через диод и резистор $(I_{DR} = I_D + I_R)$. С учётом этого строим график ВАХ параллельного соединения диода с резистором (рис. 11).

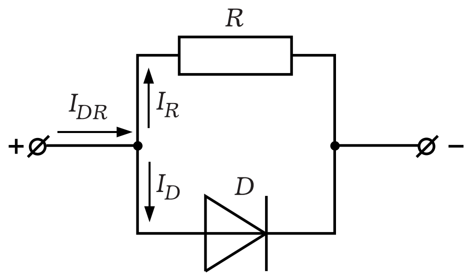

Рис. 10

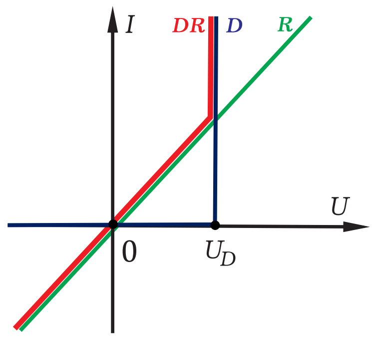

Рис. 11

В заключение нашего теоретического введения отметим, что вольт-амперная характеристика нелинейного элемента может быть задана аналитически, то есть формулой, по которой сила тока через элемент рассчитывается по известному напряжению. Например, $I(U) = \alpha U^3$, где α – известная постоянная (смотри ниже задачу № 3). Также формулой может быть задана и обратная зависимость – зависимость напряжения от силы тока на элементе. Например, $U(I) = \beta I^2$, где β – известная постоянная (смотри задачу № 4).

Поэтому, рассчитывая электрическую цепь с нелинейным элементом, мы выражаем напряжение на нём через силу электрического тока по заданной функциональной зависимости (или прибегаем к графику ВАХ) и записываем правила Кирхгофа для нашей цепи. В принципе, тоже самое мы делаем, работая с резистором, где функциональная зависимость напряжения от силы тока представляет собой не что иное, как закон Ома $U = IR$.

Что же касается мощности P, потребляемой нелинейным элементом, и, соответственно, выделяющейся на нём, то она равна работе, совершаемой в единицу времени электрическими силами по перемещению электрических зарядов через элемент, и равна произведению напряжения U на элементе на силу тока I через него:

$$P=\frac{dA_{\text{эл}}}{dt}=\frac{U\cdot dq}{dt}=U\cdot I=U\cdot I(U)=U(I)\cdot I.$$

В случае с резистором для тепловой мощности P_R, выделяющейся на нём, приходим к закону Джоуля-Ленца:

$$P_R=U\cdot I=\frac{U^2}{R}=I^2R.$$

Перейдём теперь к решению задач с нелинейными элементами. Сначала рассмотрим цепи постоянного тока, а затем – цепи с конденсаторами и катушкой индуктивности.

2. Цепи постоянного тока

Задача 1. Нелинейный элемент Э, вольт-амперная характеристика которого представлена на рисунке 12 графиком зависимости $U(I)$ (U – напряжение на элементе, I – сила тока через него), последовательно соединён с резистором с сопротивлением $R=8$ Ом и подключён к источнику с ЭДС $\mathcal{E}=36$ В и внутренним сопротивлением $r=1$ Ом. Требуется найти ток I_0 в цепи и тепловую мощность P, выделяющуюся на элементе.

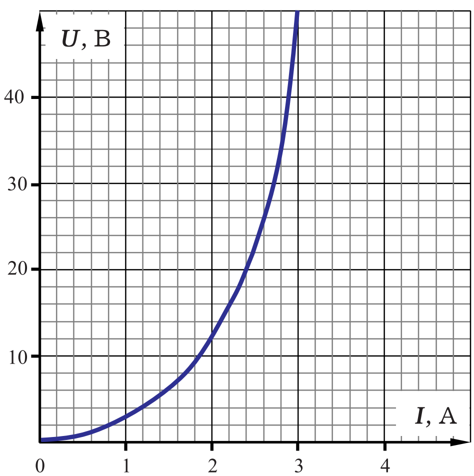

Рис. 12

Решение. Запишем уравнение второго правила Кирхгофа для нашей электрической цепи, показанной на рисунке 13:

$$\mathcal{E}=U(I)+IR+Ir. \qquad (1)$$

Теперь наша задача – найти такую силу тока I, которая удовлетворяет этому уравнению. Это и будет искомая сила тока I_0 в цепи.

Если бы зависимость $U(I)$ была задана аналитически, то есть какой-то формулой, то мы подставили бы эту формулу в уравнение (1) и, решая полученное уравнение, нашли бы силу тока I_0.

Однако мы имеем дело с графическим заданием ВАХ нелинейного элемента. В подобном случае наши действия следующие. Из уравнения (1) выражаем $U(I)$: $U(I)=\mathcal{E}-I(R+r)$ и строим график этой линейной зависимости с учётом заданных численных значений величин $\mathcal{E}$, R и r, то есть проводим прямую линию, называемую «нагрузочной прямой» (рис. 14).

Координаты точки пересечения нагрузочной прямой с графиком ВАХ элемента $I_0=2{,}2$ А и $U_0=16$ В есть не что иное, как искомая сила тока в цепи и напряжение на нелинейном элементе.

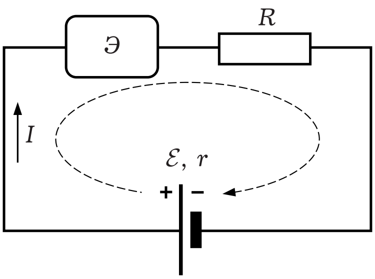

Рис. 13

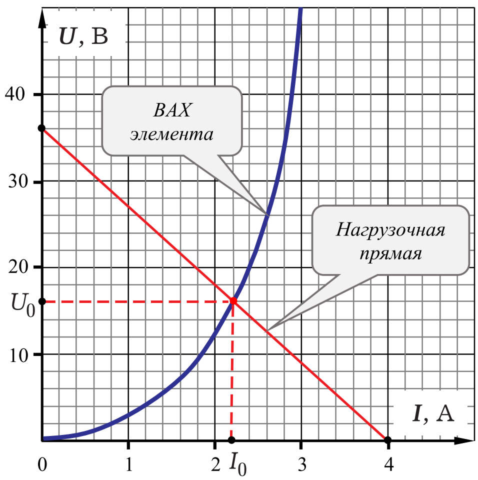

Рис. 14

Тепловая мощность, выделяющаяся на нелинейном элементе, находится как произведение силы тока, текущего через этот элемент, на напряжение на нём: $P = I_0 U_0 = 35{,}2$ Вт.

Заметим, что найденные значения являются, конечно же, приближёнными. Так, снимая значение физической величины из графика, мы допускаем погрешность, связанную с ценой деления шкалы координатной оси, соответствующей нашей физической величине. Традиционно рекомендуют в качестве погрешности определения физической величины из графика принимать половину цены самого мелкого деления шкалы соответствующей координатной оси. Однако вопросам оценки погрешностей мы больше внимания уделять не будем.

Таким образом мы получили, что сила тока в цепи $I_0 = 2{,}2$ А, а тепловая мощность, выделяющаяся на элементе, $P = 35{,}2$ Вт.

Задача 2. Две одинаковые лампочки $Л_1$ и $Л_2$, каждая из которых имеет вольт-амперную характеристику, показанную на рисунке 15, включены в электрическую цепь с идеальным амперметром, резистором с сопротивлением $R = 10$ Ом и источником с ЭДС $\mathcal{E} = 4$ В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением (рис. 16). Требуется найти показание амперметра, а также мощности P_1 и P_2, потребляемые лампочками $Л_1$ и $Л_2$ соответственно. *(Вступительные экзамены в МФТИ, 2003 г. Автор: В. Можаев)*

Решение. На лампочку $Л_2$, равно как и на цепочку последовательно соединённых лампочки $Л_1$ и резистора R, подаётся напряжение, равное ЭДС источника $\mathcal{E}$, поскольку внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало, а амперметр идеальный.

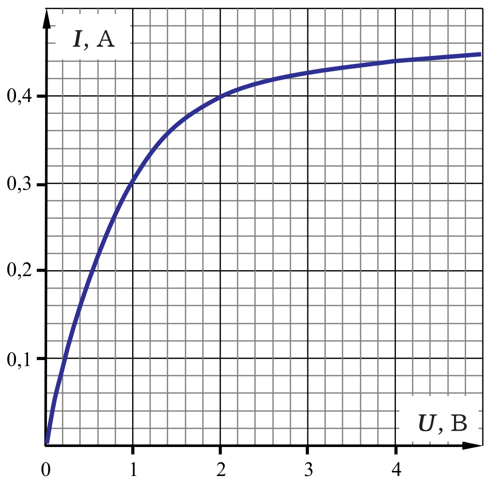

Рис. 15

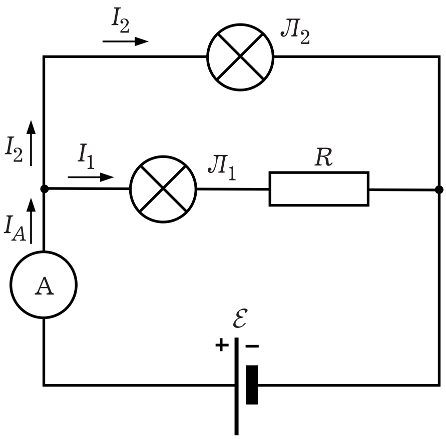

Рис. 16

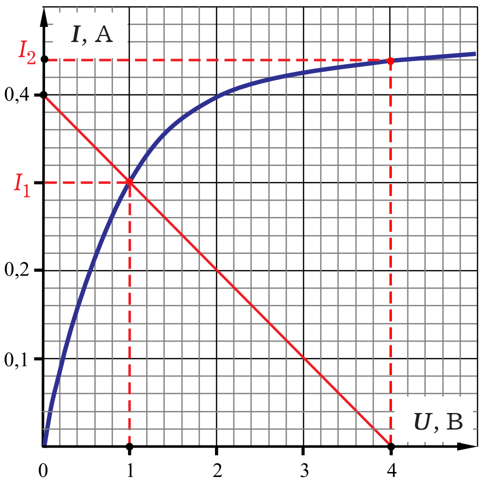

Рис. 17

Для нахождения силы тока I_1, протекающего через лампочку $Л_1$, проводим нагрузочную прямую и определяем искомую силу тока как координату точки пересечения этой прямой с графиком ВАХ лампочки (рис. 17). В итоге получаем: $I_1 = 0{,}3$ А.

Силу тока I_2, протекающего через лампочку $Л_2$, находим непосредственно из графика ВАХ лампочки при $U = \mathcal{E} = 4$ В (см. рис. 17): $I_2 = 0{,}44$ А.

В соответствии с первым правилом Кирхгофа через амперметр потечёт ток, сила которого I_A равняется сумме сил токов I_1 и I_2. Таким образом, показание амперметра в нашей цепи будет $I_A = I_1 + I_2 = 0{,}74$ А.

Потребляемые лампочками мощности найдём как произведения сил токов на напряжения на них: $P_1 = I_1U_1 = 0{,}3$ Вт; $P_2 = I_2U_2 = 1{,}76$ Вт.

Задача 3. Нелинейный элемент Э, вольт-амперная характеристика которого описывается формулой $I = \alpha U^3$, где $\alpha = 0{,}25$ А / В^3, включён в одно из плеч моста, показанного на рисунке 18. Остальными плечами моста являются резисторы с сопротивлениями $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом и $R_3 = 1$ Ом. На мост подаётся напряжение от регулируемого источника. При каком напряжении U_0 источника (отличном от нуля) мост окажется сбалансированным? Чему равна мощность P, выделяющаяся на нелинейном элементе при этом? *(Вступительные экзамены в МФТИ, 1983 г.)*

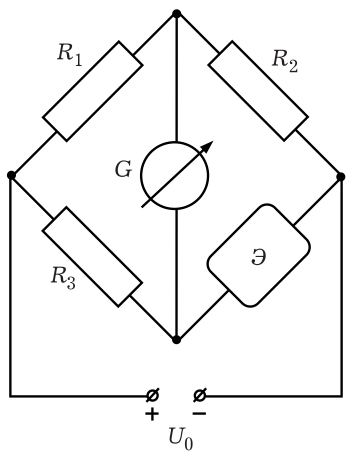

Рис. 18

Решение. Пусть при сбалансированном мосте I – сила тока, протекающего через нелинейный элемент, а U – напряжение на нём при этом. Согласно условию задачи:

$$I = \alpha U^3. \qquad (2)$$

Напомним, что мостовую схему считают сбалансированной, если ток через гальванометр не течёт ($I_G = 0$). В нашем случае из баланса моста вытекает, что сила тока, протекающего через резистор R_3, равняется силе тока I, протекающего через элемент Э, а силы токов через резисторы R_1 и R_2 будут одинаковы и равны некоторому значению I_1 (рис. 19).

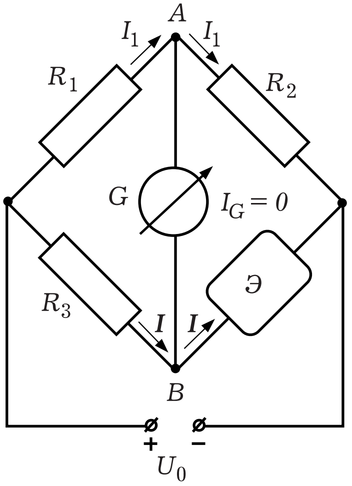

Рис. 19

Отсутствие тока через гальванометр означает, что разность потенциалов на нём равна нулю, и, следовательно, потенциалы точек A и B одинаковы, то есть $\varphi_A = \varphi_B$. Это, в свою очередь, приводит к равенству напряжений на резисторах R_3 и R_1, а также к равенству напряжений на нелинейном элементе и резисторе R_2. С учётом этого и на основании закона Ома приходим к уравнениям:

$$IR_3 = I_1R_1; \quad U = I_1R_2.$$

Поделив одно уравнение на другое, мы приходим к соотношению:

$$U = \frac{R_2R_3}{R_1}I. \qquad (3)$$

Решая систему уравнений (2) и (3), получим:

$$U = \sqrt{\frac{R_1}{\alpha R_2R_3}}; \quad I = \alpha U^3 = \sqrt{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{R_1}{R_2R_3}\right)^3}.$$

Теперь нетрудно найти мощность P, выделяющуюся на нелинейном элементе, и напряжение U_0 источника:

$$P = UI = \alpha U^4 = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{R_1}{R_2R_3}\right)^2 = 1\,\text{Вт};$$

$$U_0 = IR_3 + U = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\sqrt{\frac{R_1}{\alpha R_2R_3}} \approx 2{,}1\,\text{В}.$$

Задача 4. Два одинаковых нелинейных элемента $Э_1$ и $Э_2$, вольт-амперная характеристика каждого из которых описывается формулой $U = \beta I^2$, где $\beta = 10\,\text{В}/\text{А}^2$, соединены последовательно и подключены к идеальной батарейке с напряжением $U_0 = 10\,\text{В}$. Параллельно элементу $Э_1$ подключают резистор (рис. 20). При

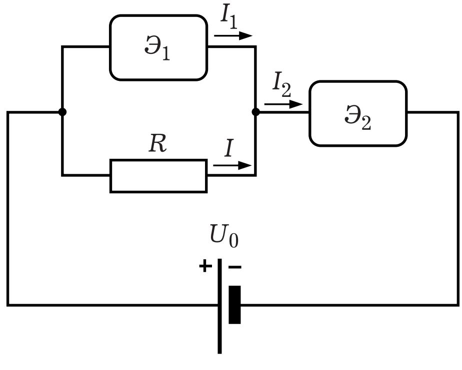

Рис. 20

каком сопротивлении R этого резистора тепловая мощность, выделяющаяся на нём, окажется максимальной? *(IV Соросовская олимпиада школьников, физика, I тур, 1997–1998)*

Решение. Для того, чтобы понять, при каком сопротивлении R резистора тепловая мощность P, выделяющаяся на нём, достигает максимума, необходимо сначала выразить её через R и известные величины, заданные условием задачи, затем полученное выражение исследовать на максимум.

Обозначим через U напряжение на резисторе. Тогда тепловая мощность P, выделяющаяся на резисторе, в соответствии с законом Джоуля-Ленца, выражается по формуле:

$$P = \frac{U^2}{R}. \qquad (4)$$

Силу тока I, текущего через резистор, выражаем по закону Ома:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Такое же напряжение U будет и на элементе $Э_1$, параллельно подключённом к резистору. Следовательно, через элемент $Э_1$ течёт электрический ток, сила I_1 которого, в соответствии с заданной функциональной зависимостью, определяется по формуле:

$$I_1 = \sqrt{\frac{U}{\beta}}.$$

Нетрудно понять, что напряжение U_2 на элементе $Э_2$ равняется разности напряжения источника и напряжения на резисторе: $U_2 = U_0 - U$, и, следовательно, сила тока I_2 через этот элемент выражается в соответствии с заданной в условии задачи формулой:

$$I_2 = \sqrt{\frac{U_0 - U}{\beta}}.$$

Согласно первому правилу Кирхгофа сила тока I_2 равняется сумме сил токов I и I_1:

$$I_2 = I + I_1.$$

Таким образом, мы приходим к уравнению:

$$\frac{U}{R} + \sqrt{\frac{U}{\beta}} = \sqrt{\frac{U_0 - U}{\beta}}. \qquad (5)$$

Казалось бы, что мы практически у цели. Решаем уравнение (5) и выражаем напряжение U через напряжение источника U_0, коэффициент β и сопротивление резистора R. Затем, в соответствии с формулой (4), получаем выражение для мощности P и исследуем его на максимум. Однако не всё так просто. Уже на этапе решения уравнения (5) мы сталкиваемся с непреодолимыми математическими трудностями, но не будем отчаиваться.

“Мы пойдём другим путём!”– сказал В.И. Ульянов (Ленин), реагируя на казнь своего старшего брата. И пошёл ведь! И мы поступим так же. Умножим обе части уравнения (5) на напряжение U и выразим мощность P:

$$P = \frac{U^2}{R} = U \cdot \left(\sqrt{\frac{U_0 - U}{\beta}} - \sqrt{\frac{U}{\beta}} \right). \qquad (6)$$

Теперь при помощи производной исследуем полученную функцию $P(U)$ на максимум. Для этого берём производную по U от выражения, стоящего в правой части уравнения (6), и приравниваем её к нулю. В результате, после несложных преобразований, приходим к квадратному уравнению:

$$\frac{dP}{dU}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\left[\sqrt{U_0-U}-\sqrt{U}+U\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{U_0-U}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{U}}\right)\right]=0;$$

$$\sqrt{U_0-U}-\sqrt{U}=\frac{U+\sqrt{U(U_0-U)}}{2\sqrt{U_0-U}};$$

$$2U_0-3U=3\sqrt{U(U_0-U)};$$

$$4U_0^2-12U_0U+9U^2=9U_0U-9U^2;$$

$$18U^2-21U_0U+4U_0^2=0.$$

Решая квадратное, относительно U, уравнение, получим:

$$U=\frac{21\pm\sqrt{153}}{36}U_0.$$

Заметим, что решение со знаком «+» не имеет физического смысла, так как приводит к значению U большему, чем $U_0/2$. А этого не может быть, поскольку $I_1\le I_2$, а, значит, $\beta I_1^2\le\beta I_2^2$, то есть $U\le U_0-U$. Следовательно, $U\le U_0/2$!

К этому неравенству можно прийти и по-другому. Поскольку мощность P не может быть отрицательной, то, исходя из выражения (6), приходим к неравенству $\sqrt{U_0-U}-\sqrt{U}\ge 0$, откуда так же находим, что $U\le U_0/2$.

Итак,

$$U=\frac{21-\sqrt{153}}{36}U_0\approx 0{,}24U_0=2{,}4\text{ В}.$$

При таком значении напряжения на резисторе тепловая мощность, выделяющаяся на нём, достигает экстремума. Можно показать, что этот экстремум является именно максимумом. Предлагаем читателю в этом разобраться самостоятельно.

С учётом найденного значения напряжения U из уравнения (6) окончательно имеем искомое значение сопротивления резистора:

$$R=\frac{U\sqrt{\beta}}{\sqrt{U_0-U}-\sqrt{U}}\approx 6{,}3\text{ Ом}.$$

3. Цепи с конденсаторами и катушкой индуктивности

Задача 5. В цепи, показанной на рисунке 21, ключ K разомкнут, конденсатор ёмкости C не заряжен, ЭДС источника $\mathcal{E}$, сопротивление резистора R, диод имеет вольт-амперную характеристику, показанную на рисунке 22. При напряжении U_0 диод открывается. Требуется определить количество теплоты Q_R, которое выделяется на резисторе после замыкания ключа. Внутренним сопротивлением источника можно пренебречь. *(Задача № 8.4.8 из сборника задач под редакцией О.Я. Савченко, Новосибирск, 1999 г.)*

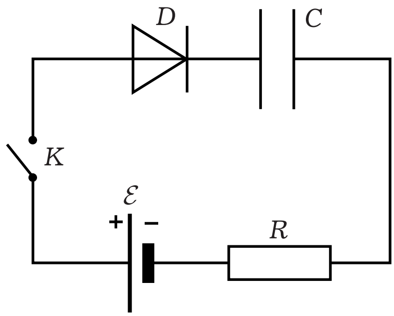

Рис. 21

Решение. Поскольку численные значения известных величин не приводятся в условии задачи, то мы рассмотрим две возможные ситуации.

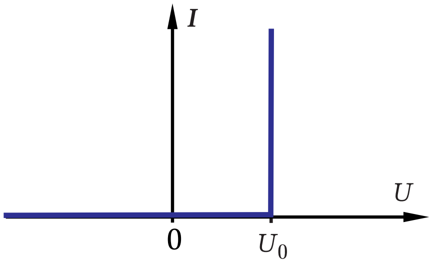

Рис. 22

1. ЭДС источника меньше порогового напряжения диода, то есть $\mathcal{E} < U_0$. В этом случае диод не откроется, следовательно, ток в цепи не возникнет, а, значит, никакой зарядки конденсатора и выделения тепла на элементах происходить не будет. Таким образом, в этой ситуации $Q_R = 0$.

2. ЭДС источника больше порогового напряжения диода, то есть $\mathcal{E} > U_0$. В этом случае диод открыт, а конденсатор заряжается в итоге до напряжения $U = \mathcal{E} - U_0$.

Количество теплоты Q_R найдём из закона сохранения энергии:

$$A_{\text{ист}} = \Delta W_C + Q_D + Q_R,$$

где $A_{\text{ист}} = q\mathcal{E} = C(\mathcal{E} - U_0)\mathcal{E}$ – работа, совершаемая источником в процессе зарядки конденсатора (здесь мы учли, что через источник, в рассматриваемом процессе, протекает заряд $q = C(\mathcal{E} - U_0)$); Q_D – энергия, потреблённая диодом при этом.

Учитывая также, что:

$$\Delta W_C = \frac{CU^2}{2} = \frac{C(\mathcal{E} - U_0)^2}{2},$$

а $Q_D = qU_0 = C(\mathcal{E} - U_0)U_0,$

приходим к уравнению:

$$C(\mathcal{E} - U_0)\mathcal{E} = \frac{C(\mathcal{E} - U_0)^2}{2} + C(\mathcal{E} - U_0)U_0 + Q_R,$$

решая которое, находим искомое количество теплоты:

$$Q_R = \frac{C(\mathcal{E} - U_0)^2}{2}.$$

<u>**Задача 6.**</u> В цепи, показанной на рисунке 23, электродвижущая сила источника $\mathcal{E} = 12$ В, сопротивление резистора $R = 4$ Ом, индуктивность катушки $L = 0{,}5$ Гн, диод D имеет вольт-амперную характеристику, показанную на рисунке 22. При напряжении $U_0 = 4$ В диод открывается. В начальный момент ключ K разомкнут, ток в катушке не течёт. Требуется определить количество теплоты Q_D, которое выделяется на диоде после замыкания ключа, а также построить качественный график зависимости тока в катушке от времени (с указанием характерных точек). Внутренним сопротивлением источника и омическим сопротивлением катушки можно пренебречь. *(Заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников по физике, 2003 г. Автор: Д. Подлесный)*

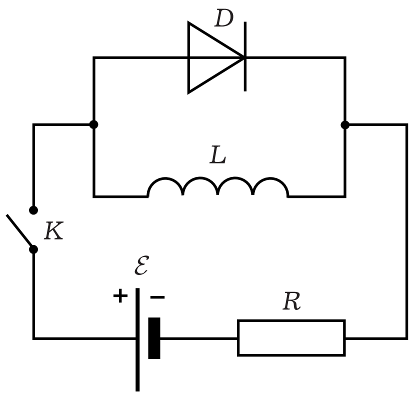

Рис. 23

<u>Решение.</u> Поскольку $\mathcal{E} > U_0$, то диод сразу после замыкания ключа открывается, а сила тока через резистор в этот момент, в соответствии

со вторым правилом Кирхгофа, принимает значение:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} - U_0}{R} = 2\,A.$$

Такой же силы ток будет протекать и через диод (в начальный момент времени после замыкания ключа), поскольку ток через катушку в этот момент ещё отсутствует.

Сила тока I_L через катушку начинает линейно возрастать со временем, поскольку напряжение на катушке, пока диод открыт, остаётся постоянным и равным U_0:

$$L\frac{dI_L}{dt} = U_0; \to dI_L = \frac{U_0}{L}dt; \to I_L = \frac{U_0}{L}t.$$

При открытом диоде сила тока I_1 через резистор остаётся, с одной стороны, постоянной, а, с другой стороны, в соответствии с первым правилом Кирхгофа, равной сумме сил токов I_L и I_D. С учётом этого приходим к зависимости силы тока I_D, протекающей через диод, от времени:

$$I_D = I_1 - I_L = \frac{\mathcal{E} - U_0}{R} - \frac{U_0}{L}t.$$

Так будет продолжаться до момента времени

$$t = t_1 = \frac{L}{R} \cdot \frac{\mathcal{E} - U_0}{U_0} = 0{,}25\ \text{с},$$

когда ток через диод прекратится, и диод закроется. Больше ток через диод течь не будет. Протекающий за время t_1 через диод заряд q_D найдём через площадь под графиком $I_D(t)$, изображённым на рисунке 24:

$$q_D = \frac{1}{2}I_1 t_1 = \frac{L(\mathcal{E} - U_0)^2}{2U_0R^2}.$$

С учётом этого находим искомое количество теплоты Q_D:

$$Q_D = q_D U_0 = \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{\mathcal{E} - U_0}{R}\right)^2 = 1\ \text{Дж}.$$

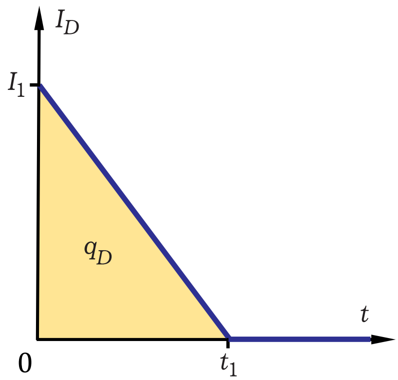

Рис. 24

Теперь о токе в катушке. Как уже было сказано, сила тока в катушке в промежуток времени от $t = 0$ до $t = t_1 = 0{,}25$ с линейно возрастает от нуля до значения $I_1 = 2\,A$. При $t > t_1$ ток продолжает возрастать, асимптотически приближаясь к значению $I_2 = \mathcal{E}/R = 3\,A$. Можно показать, что при $t > t_1$ временная зависимость $I_L(t)$ носит экспоненциальный характер. Предлагаем читателю самостоятельно разобраться в этом.

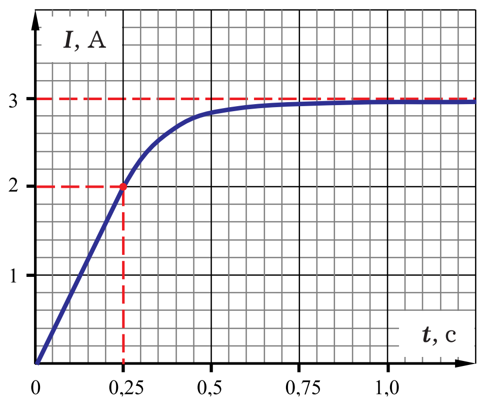

Рис. 25

График зависимости тока в катушке от времени представлен на рисунке 25.

<u>**Задача 7.**</u> В цепи, показанной на рисунке 26, конденсатор ёмкости $C=1$ мФ, заряженный до напряжения $U_0=40$ В, после замыкания ключа K разряжается через последовательно соединённые резистор с сопротивлением $R=10$ *Ом* и нелинейный элемент Э, вольт-амперная характеристика которого представлена на рисунке 12. Требуется найти количество теплоты Q_R, которое выделяется на резисторе при разрядке конденсатора. *(Автор задачи: В. Можаев, автор решения: Д. Подлесный)*

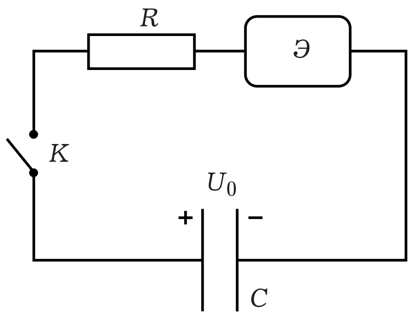

Рис. 26

<u>Решение.</u> Сразу после замыкания ключа силу тока I_0 в цепи найдём по пересечению нагрузочной прямой, задаваемой уравнением $U=U_0-IR$ (красная линия на рисунке 27), и графиком вольт-амперной характеристики элемента $U=U(I)$. В нашем случае $I_0\approx 2{,}3$ А.

По мере разрядки конденсатора напряжение U на нём будет падать, равно как и сила тока I в цепи. При этом значение силы тока I при напряжении U на конденсаторе находится, как и в начале процесса, то есть по пересечению нагрузочной прямой для текущего напряжения с графиком ВАХ элемента.

Рассмотрим нашу электрическую цепь в произвольный момент времени t процесса разрядки конденсатора. Пусть U – напряжение на конденсаторе в этот момент, а ΔU – уменьшение напряжения в последующий малый промежуток времени Δt.

Выразим теперь по закону Джоуля-Ленца количество теплоты ΔQ_R, выделяющееся за время Δt на резисторе:

$$\Delta Q_R = I^2 R\Delta t.$$

Принимая во внимание, что $I\Delta t$ есть не что иное, как протекающий через резистор заряд Δq, который, в свою очередь, равен уменьшению заряда конденсатора, то есть $C\Delta U$, имеем:

$$\Delta Q_R = RC\cdot\Delta U\cdot I = RC\cdot\Delta S,$$

где $\Delta S=\Delta U\cdot I$ – величина, соответствующая площади параллелограмма, закрашенного серым цветом на рисунке 27.

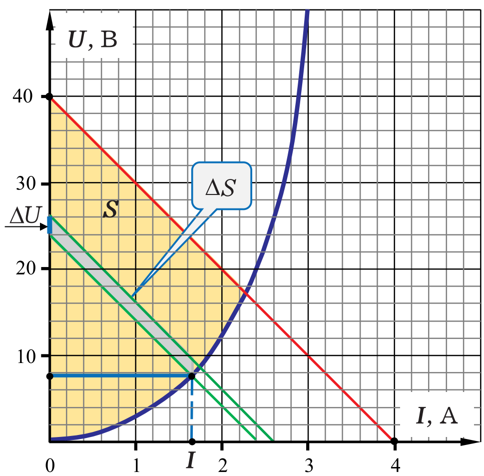

Рис. 27

Искомое количество теплоты Q_R найдём сложением всех ΔQ_R:

$$Q_R = \sum \Delta Q_R = RC \cdot \sum \Delta S = RC \cdot S,$$

где величину S находим через площадь закрашенной на рисунке 27 фигуры, ограниченной осью напряжения, графиком ВАХ элемента и начальной нагрузочной прямой.

$$S \approx \left(N_1 + \frac{1}{2}N_2\right)S_1,$$

где $N_1 = 119$ – число целых, а $N_2 = 24$ – число нецелых клеточек, попавших в указанную фигуру; $S_1 = 2\,B \times 0{,}2\,A = 0{,}4$ Вт – величина, соответствующая одной целой клеточке на рисунке 27.

С учётом этого окончательно имеем:

$$Q_R = RC \cdot S = RC \cdot \left(N_1 + \frac{1}{2}N_2\right)S_1 \approx 0{,}52 \text{ Дж}.$$

Кстати, энергия $Q_Э$, выделяющаяся на нелинейном элементе при этом, может быть найдена из закона сохранения энергии для нашей цепи:

$$Q_Э = \frac{CU_0^2}{2} - Q_R \approx 0{,}28 \text{ Дж}.$$

Предлагаем читателям самостоятельно найти на рисунке 27 фигуру, площадь которой соответствует энергии $Q_Э$, и обосновать это на языке формул.

* * *

Мы, конечно же, рассмотрели не все типы электрических цепей, в которых могут присутствовать нелинейные элементы. Много интересных задач с участием нелинейных элементов в колебательных контурах будут рассмотрены нами в следующей публикации, посвящённой электрическим колебаниям.

И в заключение нашего изложения настоятельно рекомендуем читателям познакомиться со статьёй В.В. Можаева «Нелинейные элементы в электрических цепях», опубликованной в номере № 5 журнала «Потенциал» в 2005 году. В этой статье должное внимание уделено, в том числе, и процессам в колебательных контурах при наличии в них нелинейных элементов. Данная статья, а также целая серия великолепных задач по теме «Электромагнетизм» от Виктора Васильевича Можаева оставили неизгладимое впечатление на автора настоящей публикации и существенным образом повлияли на характер изложенного материала.

Из писем Петра Леонидовича Капицы

Вся моя работа как у нас, так и за границей мне показывает, что ни один народ не обладает таким необычайным изобретательским гением, как наш. И это, по-видимому, с незапамятных времен. И немца мы в значительной мере бьём этим изобретательским гением, который повсюду проявляется у нас в народе. Хотя изобретательский гений – одна из наших основных сил, но чтобы его организовать, культивировать, превратить его в грозную силу, мы меньше делаем, чем для чего-либо другого, как, например, искусства, кино и пр.

Источник: Капица П.Л. Письма о науке. 1930–1980 (из письма Секретарю ЦК ВКП(б) Г. М. Маленкову, 3 марта 1944, Москва). https://litresp.ru/chitat/ru/%D0%9A/kapica-pyotr-leonidovich/pisjma-o-nauke-19301980#sec_161