Иванов Анатолий Ефимович
Кандидат технических наук, доцент кафедры «Основы физики» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Кравцов Андрей Витальевич
Заведующий кафедрой «Основы физики» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Неинерциальные системы отсчёта. Силы инерции. Основное уравнение динамики материальной точки в неинерциальных системах отсчёта

Второй закон Ньютона (основное уравнение динамики материальной точки) действителен только в инерциальных системах отсчёта, определяемых первым законом Галилея – Ньютона. Имеется много задач, решение которых необходимо получить в системах отсчёта, движущихся относительно инерциальной системы отсчёта с ускорением, т. е. в *неинерциальных системах отсчёта*.

1. Рассмотрим неинерциальную систему отсчёта, движущуюся поступательно. Продифференцировав по времени закон сложения скоростей

$$\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер},$$

где $v_{абс}$ – скорость материальной точки в неподвижной (инерциальной) системе отсчёта, $\vec{v}_{отн}$ – скорость её относительно движущейся системы отсчёта, $\vec{v}_{пер}$ – скорость движущейся системы отсчёта, получим закон сложения ускорений

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер}. \qquad (1)$$

Целью нашего рассмотрения является изучение относительного движения. Из предыдущего выражения следует

$$\vec{a}_{отн} = \vec{a}_{абс} - \vec{a}_{пер}.$$

Умножив обе части этого выражения на массу m материальной точки, получим

$$m\vec{a}_{отн} = m\vec{a}_{абс} - m\vec{a}_{пер},$$

а учитывая, что в инерциальной системе отсчёта в соответствии со вторым законом Ньютона

$$m\vec{a}_{\text{абс}} = \sum \vec{F},$$

получим

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \sum \vec{F} - m\vec{a}_{\text{пер}}. \qquad (2)$$

Второе слагаемое в этом выражении – сила инерции:

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_{\text{пер}},$$

С учётом этого

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = m\vec{a}_{\text{абс}} + \vec{F}_{\text{ин}}.$$

Это и есть *основное уравнение динамики материальной точки в неинерциальной системе отсчёта*, движущейся поступательно с ускорением $\vec{a}_{\text{пер}}$ относительно инерциальной системы отсчёта.

Из (2) следует, что даже при $\sum \vec{F} = 0$ материальная точка будет двигаться в этой неинерциальной системе отсчёта с ускорением, в общем случае отличным от нуля, под действием силы $\vec{F}_{\text{ин}} = -ma_{\text{пер}}$, называемой *поступательной* силой инерции.

2. Если система отсчёта вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω, а материальная точка неподвижна относительно этой неинерциальной системы отсчета, то уравнение (2) примет вид

$$0 = \sum \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}},$$

где

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_{\text{пер}}$$

называется *центробежной* силой инерции, $a_{\text{пер}} = \omega^2 r$, r – расстояние материальной точки от оси вращения.

Силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а свойствами самих неинерциальных систем отсчёта; они не подчиняются третьему закону Ньютона. Они существуют только в неинерциальных системах отсчёта, движение тел под действием сил инерции аналогично движению во внешних силовых полях. Силы инерции, подобно силам тяготения, пропорциональны массе тела. Поэтому в однородном поле сил инерции, как и в поле сил тяготения, все тела движутся с одним и тем же ускорением независимо от их массы.

Силы инерции вызывают перегрузки, действующие на лётчика или космонавта при больших ускорениях самолёта или при запуске и торможении космического корабля.

Подобные задачи можно решать и в инерциальных системах отсчёта, пользуясь выражением (1) как законом сложения ускорений. Однако во многих случаях бывает проще рассматривать явления непосредственно в движущейся системе отсчёта, не переходя к инерциальной системе отсчёта.

Задача 1. Цистерна диаметром $D = 1,2$ м и длиной $L = 2,5$ м, наполненная до высоты $b = 1$ м нефтью, плотность которой $\rho = 0,9 \cdot 10^3$ кг/м^3, движется горизонтально с постоянным ускорением $a = 2$ м/с^2 (рис. 1). Определите силу давления нефти на заднюю F_1 и переднюю F_2 стенки цистерны.

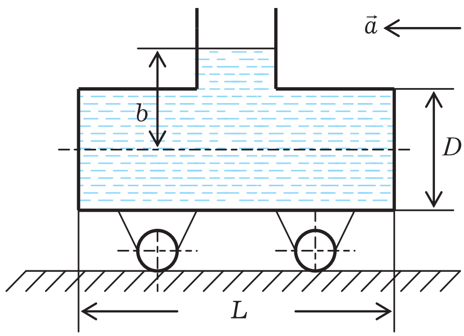


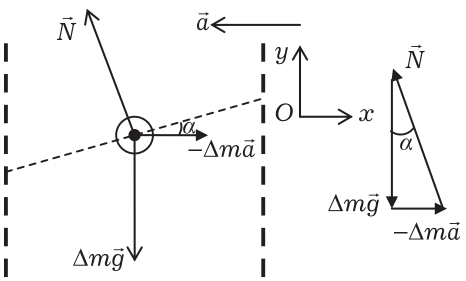
Рис. 1

Решение. Выясним вначале, какую форму имеет свободная поверхность жидкости. «Изолируем» частичку нефти массы Δm, находящуюся на свободной поверхности (рис. 2). Её движение рассмотрим в неинерциальной системе отсчёта xOy, связанной с движущейся с ускорением $\vec{a}$ цистерной. На частичку нефти действуют: Земля с силой тяжести $\Delta m\vec{g}$, свободная поверхность нефти с силой $\vec{N}$, нормальной к свободной поверхности нефти, и, кроме того, сила инерции $-\Delta m\vec{a}$. Относительно цистерны нефть неподвижна. Условие равновесия частички нефти

$$\Delta m\vec{g} - \Delta m\vec{a} + \vec{N} = 0. \qquad (1)$$

Векторное уравнение (1) построено на рис. 2 b. Из этого рисунка следует

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g}. \qquad (2)$$



а) б)

Рис. 2

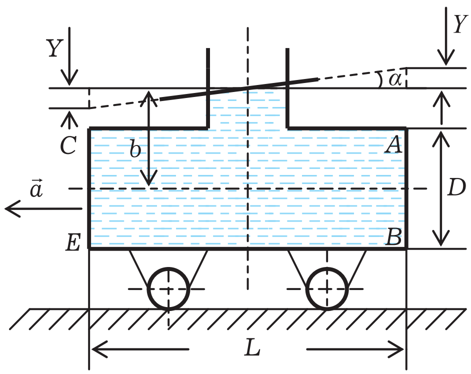


Рис. 3

Поскольку общее количество нефти не изменилось, в середине цистерны уровень не изменился (рис. 2 a и 3). У задней стенки он поднялся бы на величину y (рис. 3), если бы не было ограничивающих стенок цистерны (у передней стенки он на столько же опустился бы):

$$y = \frac{L}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{L}{2}\cdot\frac{a}{g} = \frac{2{,}5\cdot 2}{2\cdot 9{,}81} = 0{,}25 \text{ м}. \qquad (3)$$

Стенки цистерны по третьему закону Ньютона создают в точке A (рис. 3) давление, равное

$$p_A = p_0 + \rho g\left(y + b - \frac{D}{2}\right), \qquad (4)$$

где p_0 – атмосферное давление.

Давление нефти в точке B равно

$$p_B = p_A + \rho g D. \qquad (5)$$

Сила давления нефти на заднюю стенку цистерны равна

$$F_1 = \frac{p_A + p_B}{2}S - p_0 S. \qquad (6)$$

Здесь площадь поверхности стенки цистерны

$$S = \frac{\pi D^2}{4}. \qquad (7)$$

Решение системы уравнений (3) – (7) относительно F_1

$$F_1 = \frac{\pi D^2\rho}{4}\left(\frac{La}{2} + bg\right) = 12{,}52 \text{ кН}.$$

Давление нефти в точке C (рис. 3) равно

$$p_C = p_0 + \rho g\left(b - y - \frac{D}{2}\right). \qquad (8)$$

Давление нефти в точке E равно

$$p_E = p_0 + \rho g(D + b - y). \qquad (9)$$

Сила давления нефти на переднюю стенку цистерны

$$F_2 = \frac{p_C + p_E}{2}S - p_0 S. \qquad (10)$$

Решение системы уравнений (8) – (10) относительно F_2:

$$F_2 = \frac{\pi D^2\rho}{4}\left(gb - \frac{La}{2} + \frac{D}{2}\right) = 8{,}05 \text{ кН}.$$

Ответ.

$$F_1 = \frac{\pi D^2\rho}{4}\left(\frac{La}{2} + gb\right) = 12{,}52 \text{ кН}.$$

$$F_2 = \frac{\pi D^2\rho}{4}\left(gb - \frac{La}{2} + \frac{D}{2}\right) = 8{,}05 \text{ кН}.$$

Задача 2. По наклонной под углом $\alpha = 45^{\circ}$ к горизонту плоскости скользит под действием силы тяжести призматический сосуд, целиком заполненный водой (рис. 1). Сосуд закрыт крышкой с малым отверстием, расположенным на расстоянии $L = 0{,}5$ м от передней стенки. Масса сосуда $m = 150$ кг, размер $b = 1$ м, коэффициент трения дна сосуда о плоскость $\mu = 0{,}278$. Плотность воды $\rho = 10^3 \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

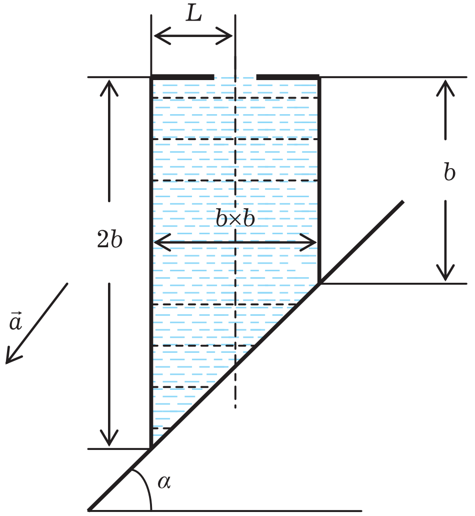


Рис. 1

Найдите величину силы давления воды на заднюю F_2 и переднюю F_1 (по ходу движения) стенки сосуда.

Решение. «Выделяем» сосуд с водой (рис. 2), «заменяя» взаимодействующие с ним тела силами: Землю – силой тяжести $M\vec{g}$, наклонную плоскость – силой $\vec{N}$ (нормальная реакция опоры) и силой трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Обозначим

$$M = m + m_1, \qquad (1)$$

где m_1 – масса воды.

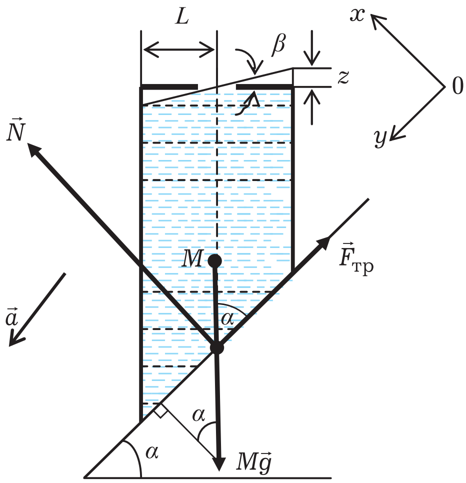


Рис. 2

Записываем второй закон Ньютона в проекциях на оси координат xOy, связанные с Землёй:

$$Mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} = Ma, \qquad (2)$$

$$N - Mg\cos\alpha = 0. \qquad (3)$$

Выражение для силы трения

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \qquad (4)$$

Решение системы уравнений (1) – (4) относительно a:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha). \qquad (*)$$

Вычислим a:

$$a = 9{,}81\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0{,}278\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5{,}02\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \qquad (**)$$

«Выделим» частичку Δm на поверхности воды. Рассмотрим её движение в неинерциальной системе отсчёта, связанной с движущимся с ускорением a сосудом. В этой системе отсчёта вода неподвижна. На частичку воды на поверхности воды действуют: Земля с силой тяжести $\Delta m\vec{g}$, поверхность воды с силой $\vec{N}_1$ (нормальная реакция опоры) и сила инерции $-\Delta m\vec{a}$.

Условие равновесия частички жидкости

$$\Delta m\vec{g} + \vec{N}_1 - \Delta m\vec{a} = 0. \qquad (5)$$

Векторное уравнение (5) построено на рисунке 3. Как следует из рисунка 3, угол наклона свободной поверхности воды в сосуде при скольжении его по наклонной плоскости β равен

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{\Delta m a\cos\alpha}{\Delta m g - \Delta m a\sin\alpha} = \operatorname{arctg}\frac{a\cos\alpha}{g - a\sin\alpha}.$$

Вычислим β:

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{2}(g - \frac{a}{\sqrt{2}})} = \operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{2}g - a} = \operatorname{arctg}\frac{5,02}{1,41\cdot 9,81 - 5,02} = \operatorname{arctg}0,57 = 30^\circ. \qquad (6)$$

Часть воды Δm выльется (см. рис. 2):

$$\Delta m = \frac{1}{2}Lzb\rho = \frac{1}{2}L\cdot L\operatorname{tg}\beta\cdot b\rho =$$

$$= \frac{L^2}{2}b\rho\cdot\operatorname{tg}\beta = \frac{0,5^2}{2}\cdot 0,57\cdot 10^3 = 71,25\,\text{кг}.$$

Сила давления воды на заднюю стенку (см. рис. 2)

$$F_2 = \frac{1}{2}(p_0 + p_0 + \rho g b)b^2 - p_0 b^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\rho g b^3 = 0,5\cdot 10^3\cdot 9,81 = 4,905\,\text{кН}.$$

Сила давления воды на переднюю стенку

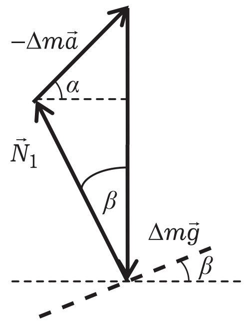


Рис. 3.

$$F_1 = \frac{1}{2}\left(p_0 + p_0 + \rho g(2b - L\operatorname{tg}\beta)\right)(2b - L\operatorname{tg}\beta)b - p_0(2b - L\operatorname{tg}\beta)b =$$

$$= \frac{1}{2}\rho g b(2b - L\operatorname{tg}\beta)^2 = \frac{1}{2}\cdot 10^3\cdot 9,81(2 - 0,5\cdot 0,57)^2 = 14,43\cdot 10^3\,\text{Н} = 14,43\text{кН}.$$

Ответ. $F_2 = \frac{1}{2}\rho g b^3 = 4,905$ кН,

$F_1 = \rho g b(2b - L\operatorname{tg}\beta)^2 = 14,43$ кН.

Задача 3. Сосуд с квадратным основанием $l\times l$, масса которого m_1, наполнен водой до высоты h и скользит по горизонтальной плоскости под действием груза массой m_2. Коэффициент трения между сосудом и горизонтальной плоскостью μ (рис. 1).

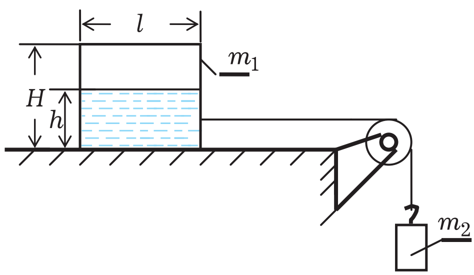


Рис. 1

Найти: 1) высоту сосуда H, необходимую для сохранения в нём всей воды во время движения; 2) силы F_1, F_2, с которыми вода давит на переднюю и заднюю стенки сосуда.

Решение.

1) «Изолируем» сосуд с водой и груз. На сосуд действуют (рис. 2):

Земля с силой $(m_1 + \rho l^2 h)g$,

горизонтальная плоскость с силами N – (нормальная реакция опоры),

$F_{\text{тр}}$ – (сила трения) и нить с силой T.

Сосуд движется с ускорением a.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси координат (система координат xOy связана с Землёй):

$$T - F_{\text{тр}} = (m_1 + \rho l^2 h)a, \qquad (1)$$

$$N - (m_1 + \rho l^2 h)g = 0. \qquad (2)$$

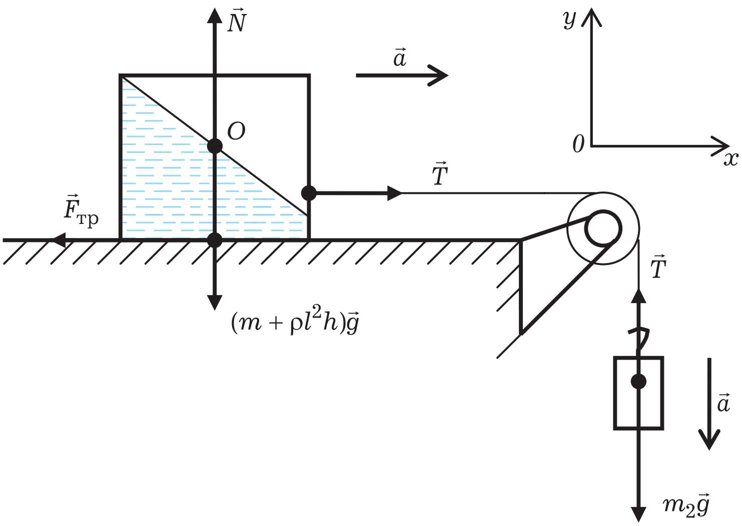


Рис. 2.

Выражение для силы трения:

$$F_{mp} = \mu N. \qquad (3)$$

«Выделяем» груз, на него действуют нить с силой $\vec{T}$ и Земля с силой $m_2\vec{g}$. Второй закон Ньютона в проекции на ось Oy

$$m_2 g - T = m_2 a. \qquad (4)$$

Решение (1) – (4) относительно a:

$$a = \frac{m_2 - \mu(m_1 + \rho l^2 h)}{m_1 + m_2 + \rho l^2 h} g. \qquad (5)$$

«Выделим» частичку воды Δm, находящуюся на свободной поверхности (рис. 3), её движение рассмотрим в неинерциальной системе отсчёта xOy, связанной с движущимся с ускорением $\vec{a}$ сосудом. На частицу воды действуют Земля с силой тяжести $\Delta m\vec{g}$, свободная поверхность воды с силой $\vec{N}$, нормальной к свободной поверхности воды, и, кроме того, сила инерции $-\Delta m\vec{a}$ (рис. 3 *a*). Относительно сосуда вода неподвижна. Условие равновесия частички воды:

$$\Delta m\vec{g} - \Delta m\vec{a} + \vec{N} = 0. \qquad (6)$$

Векторное уравнение (6) построено на рис. 3 *b*. Из этого рисунка следует

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{g}. \qquad (7)$$

Следовательно, при горизонтальном движении сосуда с ускорением $\vec{a}$

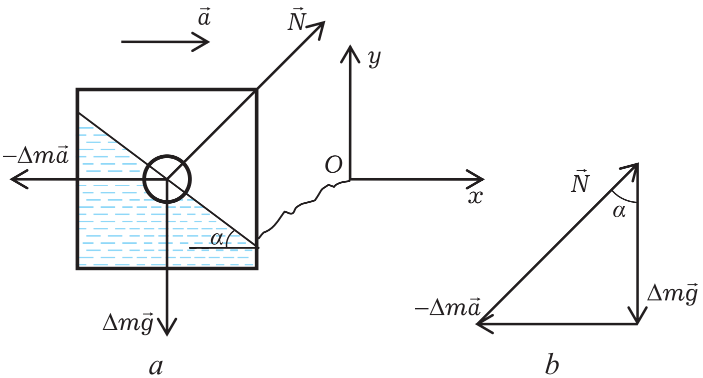


Рис. 3

свободная поверхность жидкости наклонится к горизонту под углом α.

Для ответа на первый вопрос задачи запишем условие сохранения количества воды при движении – равенство объёмов (рис. 4)

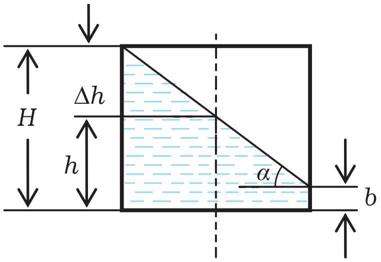


Рис. 4

$$l^2h = \frac{1}{2}(H+b)l^2, \qquad (8)$$

где, как следует из рисунка 4,

$$H - b = l\text{tg}\alpha. \qquad (9)$$

Из (8) и (9) с учётом (7) решение для H имеет вид:

$$H = h + \frac{la}{2g}. \qquad (*)$$

Из рис. 4

$$H = h + \Delta h. \qquad (**)$$

Сравнивая (*) и (**), получаем

$$\Delta h = \frac{l}{2}\cdot\text{tg}\alpha = \frac{l}{2}\cdot\frac{a}{g}.$$

Это значит, что в середине сосуда уровень не изменился: у задней стенки он поднялся на

$$\frac{l}{2}\cdot\text{tg}\alpha = \frac{l}{2}\cdot\frac{a}{g},$$

а у передней стенки на столько же опустился.

Из (8) и (9) с учётом (5) получаем

$$H = h + \frac{l}{2}\frac{m_2 - \mu(m_1 + \rho l^2 h)}{m_1 + m_2 + \rho l^2 h}. \qquad (10)$$

Сила давления воды на заднюю стенку

$$F_2 = \left(p_0 + \frac{\rho g H}{2}\right)lH - p_0 lH = \frac{\rho g l H^2}{2} =$$

$$= \frac{\rho g l}{2}\left(h + \frac{l}{2}\frac{m_2 - \mu(m_1 + \rho l^2 h)}{m_1 + m_2 + \rho l^2 h}\right)^2.$$

Здесь p_0 – атмосферное давление.

Второй способ вычисления силы давления.

$$dF_2 = (p_0 + \rho g y)ldy - p_0 ldy.$$

Интегрируя последнее выражение, получаем

$$F_2 = \int_0^H (p_0 + \rho g y)ldy - \int_0^H p_0 ldy = \frac{\rho g l H^2}{2}.$$

Сила давления воды на переднюю стенку сосуда

$$F_1 = (p_0 + \frac{\rho g b}{2})lb - p_0 lb = \frac{\rho g l b^2}{2} =$$

$$= \frac{\rho g l}{2}\left(h - \frac{l}{2}\frac{m_2 - \mu(m_1 + \rho l^2 h)}{m_1 + m_2 + \rho l^2 h}\right)^2.$$

При вычислении F_1 учтены уравнения (9) и (10).

Ответ. $H = h + \frac{l}{2}\frac{m_2 - \mu(m_1 + \rho l^2 h)}{m_1 + m_2 + \rho l^2 h}.$

$$F_2 = \frac{\rho g l}{2}\left\{h + \frac{l}{2}\frac{m_2 - \mu(m_1 + \rho l^2 h)}{m_1 + m_2 + \rho l^2 h}\right\}^2.$$

$$F_1 = \frac{\rho g l}{2}\left(h - \frac{l}{2}\frac{m_2 - \mu(m_1 + \rho l^2 h)}{m_1 + m_2 + \rho l^2 h}\right)^2.$$

Задача 4. Деревянный шарик прикреплён нерастяжимой нитью к дну цилиндрического сосуда с водой. Расстояние от точки закрепления нити до центра дна сосуда равно r, а до центра шарика – l. Сосуд раскручивают вокруг вертикальной оси, проходящей через центр дна. При какой угловой скорости ω нить отклонится от вертикали на угол $\alpha = 30^\circ$, если $r = 2l$? Массой нити пренебречь.

Решение. В неинерциальной системе отсчёта на шарик действуют (рис. 1) силы: $-m\vec{g}$ – сила тяжести; $\vec{F}_{A1}$ – сила Архимеда (в массовом гравитационном поле); $\vec{F}_{A2}$ – сила Архимеда (в массовом поле центробежных сил инерции); $m\vec{a}_n$ – центробежная сила инерции, где $\vec{a}_n$ – нормальное ускорение шарика; $\vec{T}$ – сила натяжения нити.

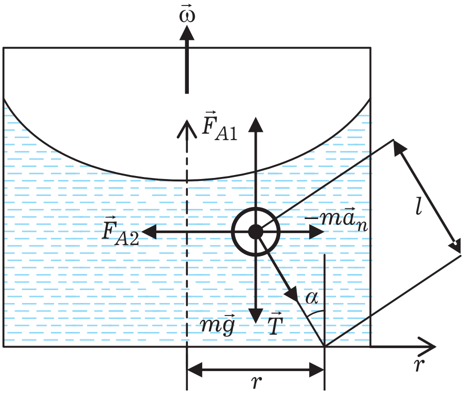


Рис. 1

Так как центробежная сила инерции $ma_д = \rho_д V a_n$, где $\rho_д$ – плотность дерева, V – объём шарика, меньше силы Архимеда $F_{A2} = \rho_в V a_n$, где $\rho_в$ – плотность воды, то шарик отклонится к оси сосуда.

Основные уравнения динамики материальной точки в неинерциальной системе отсчёта в проекциях на оси координат:

$$-F_{A2} + ma_n + T\sin\alpha = 0, \qquad (1)$$

$$F_{A1} - mg - T\cos\alpha = 0, \qquad (2)$$

$$F_{A2} = \rho_в V a_n, \qquad (3)$$

$$a_n = \omega^2(r - l\sin\alpha), \qquad (4)$$

$$F_{A1} = \rho_в V g, \qquad (5)$$

$$r = 2l, \qquad (6)$$

$$m = \rho_д V. \qquad (7)$$

Решение системы уравнений (1) – (7) относительно ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\alpha}{r - l\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\alpha}{l(2-\sin\alpha)}} = 0{,}621\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Ответ. $\omega = 0{,}621\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Литература

Иванов А.Е., Иванов С.А. Механика, молекулярная физика и термодинамика: учебник –М.: Кнорус, – 2012.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Беспроигрышный итог

Как-то, играя с известным шахматистом, человек проиграл ему три раза подряд. Подошедший к нему приятель спросил:

– Неужели ты проиграл три партии?

– Да нет. Первую партию мой партнёр не проиграл, вторую я у него не выиграл, а третью я хотел свести вничью, но он не согласился.

Успокоил

Врач спрашивает пациента:

– Что Вас беспокоит?

– Я слышал, доктор, что гениальность это болезнь…

– Пусть это Вас не беспокоит: Вы абсолютно здоровы.