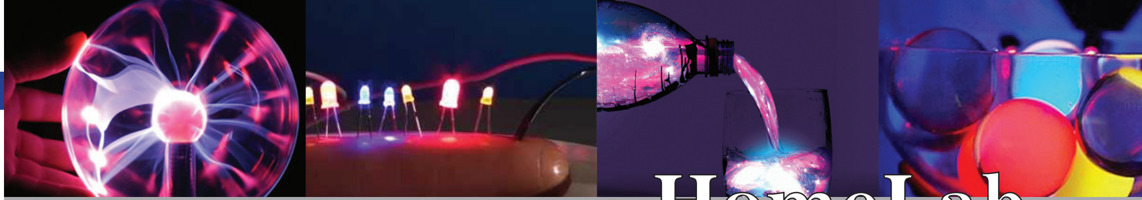
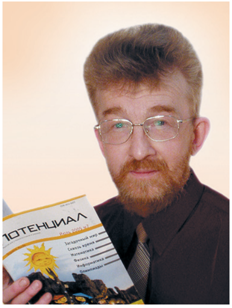




Лукьянов Андрей Александрович
Кандидат физико-математических наук, доцент, лаборатория по работе с одарёнными детьми МФТИ.

Нахождение центров тяжести плоских фигур разной формы

Обсуждается определение центра тяжести. Приведены примеры на нахождение центра тяжести. Разобраны простые экспериментальные задачи на нахождение центра тяжести.

Задачи, связанные с понятием о **центре тяжести тел**, традиционно вызывают затруднения у школьников. Во-первых, потому, что само это понятие непростое, во-вторых, потому, что пользуемся мы им не каждый день. А ещё потому, что в современных школах этой теме часто просто не отводят часов. Или иначе: часы отведены, но преподаватели об этом понятии упоминают лишь вскользь. (Автору этих строк преподаватель физики московской школы прямо говорила: «Мы о центре тяжести школьникам не рассказываем»). Разумеется, любой опытный преподаватель физики сразу скажет, что **без понятия о центре тяжести бóльшая часть задач по динамике (кроме задач динамики материальной точки) вообще не будет понята школьниками.**

Однажды к автору обратилась целиком группа учащихся 10-го класса вечерней физ.-мат. школы при МФТИ, которые учатся в разных школах Москвы, чтобы автор провёл с ними отдельное занятие про центр тяжести. Параллельно автор проводил лабораторные работы с восьмиклассниками, и конечно, оказалось, что и те лишь *что-то слышали* об этом «загадочном понятии». Ни один из них не был в состоянии ясно сформулировать, что это такое; говорили нечто туманное. В результате, лабораторная работа началась с «импровизированной» лекции автора о центре тяжести. Без этого было бы, разумеется, пустой тратой времени находить его на опыте.

Настоящую статью автор намерен также начать с «Введения» – варианта его импровизированной «лекции». Впрочем, тем, кто считает, что знаком с понятием центра тяжести, можно пропустить «Введение».

Введение. Определение центра тяжести протяжённого тела

Автору известны несколько **определений** понятия центра тяжести тела. Самым точным и конструктивным (!) автор считает следующее: «**Центр тяжести – это такая точка, относительно которой моменты всех действующих на тело сил тяжести В СУММЕ обращаются в нуль независимо от ориентации тела**»[1]. **Равный нулю суммарный момент всех сил НЕ будет вызывать вращение твёрдого тела.** Автор лишь уточнил бы, что когда Суорц говорит о моменте сил относительно точки, это можно понимать просто как **момент сил относительно любой оси, проходящей через эту точку**.

Разумеется, обратиться в нуль сумма нескольких слагаемых может лишь в том случае, если одни из них будут положительными, а другие отрицательными (не станем запутывать школьника векторным характером момента силы; или уж совсем точно – псевдовекторным!). Откуда возьмутся разные знаки у слагаемых?

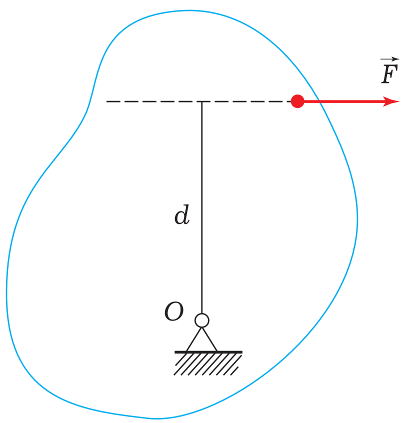


Рис. 1. К определению понятия момента силы

Напомним, что моментом M силы $\vec{F}$ относительно оси O (см. рис. 1; ось O направлена перпендикулярно рисунку) называют произведение модуля силы $F = \left|\vec{F}\right|$ на плечо d: $M = \pm Fd$, где d – расстояние от оси до линии действия силы $\vec{F}$, причём **знак момента** определяется выбором положительного направления вращения, – например, он считается положительным, если сила вызывает вращение тела по часовой стрелке.

Автор намерен сделать несколько замечаний к такому определению. Читатель может также пропустить их, если считает, что и без того всё понятно.

Замечание 1. Что значит по часовой стрелке? Вопрос: «На рисунке 1 сила $\vec{F}$ стремится повернуть тело вокруг оси О **по** или **против** часовой стрелки?». Кажется, что **по** часовой стрелке. Однако тот, кто посмотрел бы на рисунок из области за плоскостью рисунка (и смотрел бы на нас), сказал бы, что **против**! Видно, что понятия «по» и «против» часовой стрелки не вполне определены. **В каждой конкретной задаче сначала устанавливают соглашение, что считать «по часовой стрелке», а что «против»**. Далее важно лишь **не** менять этого соглашения в процессе решения задачи. Иначе запутаетесь!

Замечание 2. Читатель может встретить и другие определения центра тяжести, – например, в учебнике: «*Точку приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на отдельные части тела, называют центром тяжести тела*»[2]. С небольшой перестановкой или заменой слов примерно такое определение можно встретить и в других книгах. Пользоваться этим определением, однако, трудно (практически – невозможно!), т. к. в *современных* школьных программах ничего не

[1] *Суорц Кл.Е.* Необыкновенная физика обыкновенных явлений. – Москва: Наука, 1986, в 2-х томах, т. 1, с. 94.

[2] *Пёрышкин А.В.* «Физика-7», 2013, с. 185.

говорится о правиле сложения *параллельных* сил. («Правило параллелограмма», или эквивалентное ему «правило треугольника» относятся к НЕ параллельным силам!)

Замечание 3. Большинство школьников смущает и то, что центр тяжести, например, кольца – это центр кольца. «Ну, и покажите, – скажет школьник, – как эта равнодействующая сил приложена к *пустому месту*! Я что-то не чувствую действия никакой силы в этой точке, когда помещаю в неё палец! Только не надо натягивать дополнительно никаких ниточек, – добавляет школьник, – в определении ни о каких дополнительных ниточках не говорилось!» И что возразишь умному школьнику?!

А теперь вернёмся к определению, данному в начале параграфа: в нём и **не** сказано ни о каких ниточках. Более того, не говорилось, что такая-то сила реально поворачивает тело (или даже стремится повернуть его). Определение было формально **математическое**: нужно было лишь вычислить несколько математических величин (отдельных моментов сил тяжести), а потом алгебраически (с учётом знаков) сложить их и приравнять сумму нулю. Всё!

Рассуждения в процессе решения задачи о том, что та группа сил **стремится** повернуть тело по часовой стрелке, а другая – против часовой стрелки, автор считает всё же полезными. Однако приписывание силам стремлений, мягко говоря, не обязательно.

Посмотрим, как данное в начале параграфа определение работает в конкретных задачах.

Пример 1. Шары массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 9$ кг соединены лёгким стержнем (см. рис. 2). Расстояние между центрами шаров $a = 20$ см. Определить положение центра тяжести системы. Шары считать вначале материальными точками. После рассмотрения примера о центре тяжести однородного шара (см. ниже) вернуться к данной задаче, считая шары однородными (но не точками).

Рис. 2

Решение. Скажем, во-первых, что центр тяжести такой системы будет лежать на прямой, соединяющей материальные точки (центры шаров).

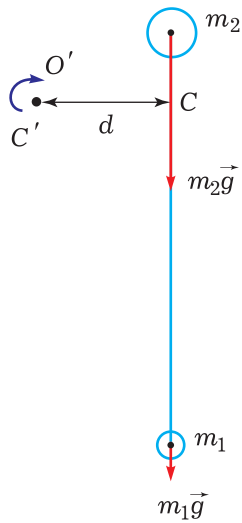


Рис. 3

В самом деле, представим себе, что центр тяжести системы лежал бы в стороне, например, в точке C′. Расположим шары (пока – материальные точки) на одной вертикали (см. рис. 3). Проведём ось O′ через точку C′ *перпендикулярно* рисунку. Обе силы тяжести имели бы моменты *одного знака* (и равнялись бы по модулю $m_1 g \cdot d$ и $m_2 g \cdot d$). Суммарный момент их **не** был бы равен нулю! (Можно сказать, что обе силы тяжести стремятся повернуть систему в одну сторону – по часовой стрелке вокруг оси O′, см. рис. 3). Значит, точка C′ не может быть центром тяжести системы двух материальных точек. Остаётся единственная возможность – центр тяжести C лежит на линии, соединяющей точечные массы. В этом случае плечи сил $d = 0$, поэтому каждый из моментов сил тяжести равен нулю.

Расположим теперь шары горизонтально. Проведём мысленно через точку C горизонтальную ось O, *перпендикулярную* линии, соединяющей центры шаров (см. рис. 4).

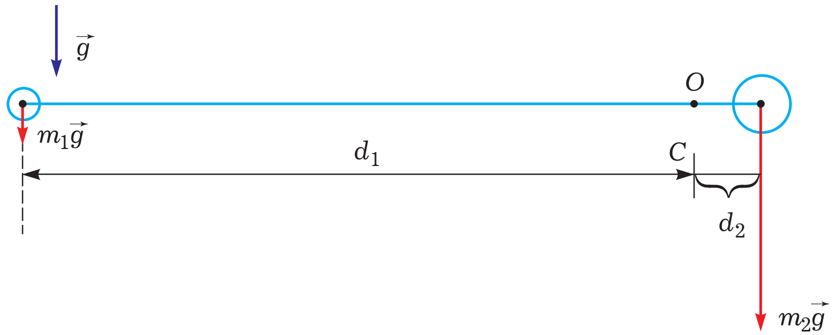


Рис. 4

Моменты сил $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ в этом случае будут разного знака: $-m_1 g \cdot d_1$ и $+m_2 g \cdot d_2$. Приравнивая суммарный момент нулю:

$$-m_1 g \cdot d_1 + m_2 g \cdot d_2 = 0,$$

получаем соотношение между расстояниями от центра тяжести до точечных масс

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{m_1}{m_2}, \qquad (1)$$

т. е. расстояния обратно пропорциональны массам: чем больше масса, тем меньше расстояние от неё до центра тяжести. В нашем конкретном примере имеем:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1} = 9,$$

т. е. сами расстояния будут равны

$$d_1 = \frac{9}{10} \cdot 20\text{ см} = 18\text{ см}$$

и

$$d_2 = \frac{1}{10} \cdot 20 = 2\text{ см}.$$

А если бы массы шаров были одинаковыми, $m_1 = m_2$? В этом случае согласно соотношению (1) получаем, что центр тяжести лежал бы *посередине* отрезка, соединяющего точечные массы, т. е. расположен по *центру*.

В случае многих *одинаковых* материальных частиц, расположенных на одной прямой на *одинаковом* расстоянии друг от друга, центр тяжести системы находится на этой прямой *на равном расстоянии от крайних материальных точек*. Обобщая, можно сказать, что центр тяжести тонкой *однородной* спицы (отрезка прямой) расположен *посередине* спицы, а центр тяжести *однородного* прямоугольника – *в центре прямоугольника* (в точке пересечения диагоналей). Только в этом случае суммарный момент сил тяжести отдельных частей тела (спицы, прямоугольника) относительно любой оси, проходящей через центр тяжести системы, равен нулю.

Из тех же соображений (что **суммарный** момент отдельных сил тяжести системы относительно центра тяжести должен равняться нулю) следует, что центр тяжести *однородного* круга расположен *в центре круга*, центр тяжести кольца (тоже *однородного*) – в центре кольца (всё-таки в центре – в пустом месте!). Центр тяжести однородного шара расположен в центре шара, а *однородной* сферы – в центре сферы (снова – в пустом месте!).

Слово «однородный» здесь очень важно: если бы, например, половина шара была деревянной, а другая половина сделана из свинца, мы бы не могли гарантировать, что суммарный момент всех сил тяжести отдельных частиц шара *для любой оси*, проходящей через центр шара, равен нулю. Центр шара в этом случае не был бы центром тяжести шара!

Как уже говорилось, полезность понятия центра тяжести состоит в том, что мы заменяем действие сил на сложную фигуру (её притяжение к Земле) силой тяжести, приложенной к одной точке – к центру тяжести фигуры. Поэтому, возвращаясь к примеру 1, мы можем сказать, что если вместо материальных точек будут *однородные* шары (при этом их центры тяжести будут совпадать с центрами шаров!), то наш результат (1) не изменится, если под d_1 и d_2 понимать расстояния от центра тяжести системы до *центров* шаров.

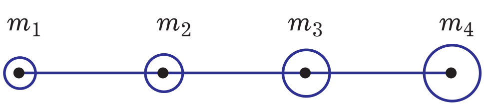


Рис. 5

Пример 2. Однородные шары массами $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг и $m_4 = 4$ кг насажены на лёгкую спицу (см. рис. 5). Расстояние между центрами шаров $d = 20$ см. Определить положение центра тяжести системы.

Решение. Весьма полезным бывает такой способ рассуждений. Расположим спицу с насаженными частицами горизонтально. Проведём ось X вдоль спицы слева направо и совместим нуль с центром самого левого шара (рис. 6). Мысленно подопрём систему в месте расположения центра тяжести – в точке с искомой координатой x_C. В этой точке возникнет сила реакции опоры N, направленная вверх.

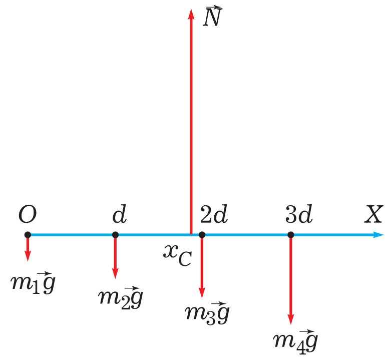


Рис. 6

Пусть вас не смущает, что мы пока не знаем значения x_C и не можем сказать точно, в каком месте надо подпереть спицу с насаженными на неё шарами. Мы нигде не будем пользоваться тем, что центр тяжести лежит между 2-м и 3-м шарами. (В конце даже выяснится, что это наше *предположение* не верно!)

В условиях равновесия сила реакции N равна по модулю сумме сил тяжести отдельных шаров:

$$N = m_1g + m_2g + m_3g + m_4g =$$
$$= (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)g.$$

Мысленно проведём ещё ось O, перпендикулярную рисунку и проходящую через точку расположения, например, первого шара. Плечи сил тяжести относительно этой оси совпадают с координатами шаров. Суммарный момент сил тяжести отдельных шаров относительно оси O (**не** относительно центра тяжести!) равен

$$m_1g \cdot x_1 + m_2g \cdot x_2 + m_3g \cdot x_3 + m_4g \cdot x_4 =$$
$$= (m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4)g$$

(относительно центра тяжести он равнялся бы нулю!). Момент силы реакции опоры равен

$$-N \cdot x_C = -(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)g \cdot x_C.$$

В условиях равновесия сумма моментов всех сил **относительно любой оси (не обязательно проходящей через центр тяжести!) равна нулю**:

$$(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4)g -$$
$$-(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)g \cdot x_C = 0.$$

Отсюда находим

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} =$$
$$= \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot d + 3 \cdot 2d + 4 \cdot 3d}{1 + 2 + 3 + 4} =$$
$$= 2d = 40 \text{ см}$$

(положение центра тяжести случайно совпало с центром 3-го шара).

Несложные эксперименты и задачи на центр тяжести

Эксперимент 1. Геометрическим построением найти центр тяжести однородного плоского треугольника.

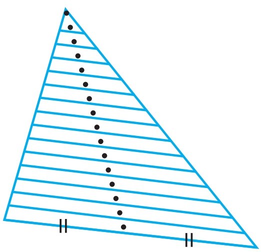


Рис. 7

Решение. Легко понять, что центр тяжести однородного треугольника находится в точке пересечения его медиан. В самом деле, мысленно разобьём треугольник на тонкие полоски, параллельные сначала одной какой-нибудь стороне (см. рис. 7). Центр тяжести каждой из полосок лежит посередине полоски. Каждую из полосок теперь заменим точечной массой, сосредоточенной в её центре тяжести. Ясно, что центр тяжести всего треугольника лежит тогда на линии, соединяющей центры тяжести полосок, т. е. на медиане треугольника. На **каждой** из трёх медиан! Т. е. в точке их пересечения. После проведения этого мысленного эксперимента легко найти центр тяжести реальной пластины в форме треугольника.

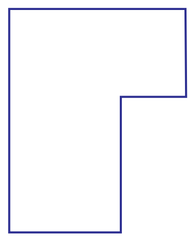
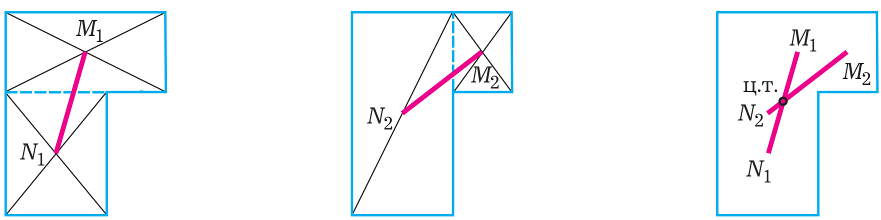


Рис. 8

Эксперимент 2. Геометрическим построением найти центр тяжести прямоугольной пластины с вырезом в виде прямоугольника (см. рис. 8).

Решение. См. последовательно рис. 9 *а* – *в*.



а *б* *в*

Рис. 9

Эксперимент 3. Определить положение центра тяжести плоской фигуры неправильной формы.

Решение. Подвешиваем вырезанную из картона фигуру за какую-нибудь её точку и, пользуясь отвесом, прочерчиваем первую вертикальную линию (см. рис. 10). В условиях равновесия сила $\vec{F}$ в точке крепления фигуры (например, со стороны кнопки (рис. 12)) уравновесит силу тяжести фигуры:

$$\vec{F} = -\vec{F}_{тяж} = -m\vec{g}.$$

Центр тяжести должен находиться где-то на прочерченной вертикали под ниткой, к которой крепится грузик отвеса (см. объяснение ниже – рис. 12). Далее подвешиваем фигуру за какую-то другую её точку и прочерчиваем новую вертикальную линию (см. рис. 11). *Центр тяжести фигуры должен лежать и где-то на новой линии.* Где? В точке пересечения двух прямых. Это и будет центром тяжести сложной фигуры неправильной формы.

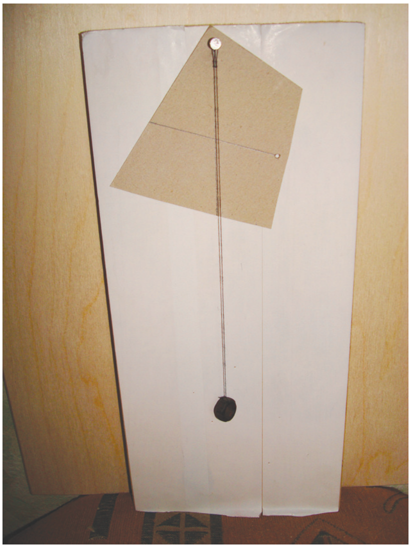


Рис. 10

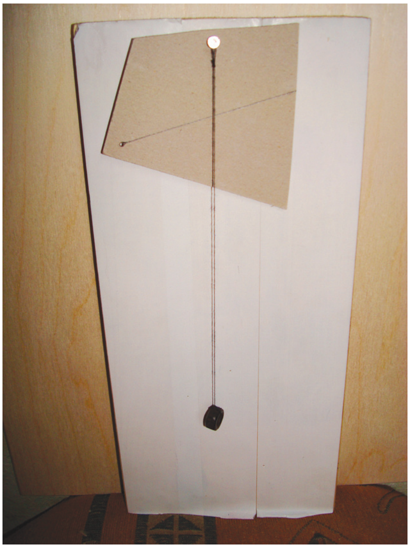


Рис. 11

Замечание к проведению эксперимента. Фигура не должна быть прикреплена к вертикальной досочке кнопкой, а должна свободно вращаться вокруг ножки кнопки. Назначение кнопки – лишь в том, чтобы фигурка не падала. Следите также за тем, чтобы сила трения между картоном и досочкой не мешала свободно вращаться фигурке. Для проверки лучше подвесить фигуру ещё раз или два за другие точки и убедиться, что новые вертикали пересекутся с предыдущими прямыми в этой же точке.

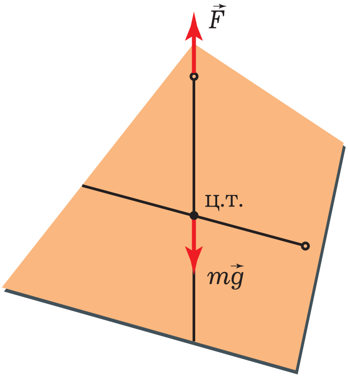


Рис. 12

Объяснение, почему центр тяжести должен находиться под ниткой, к которой крепится грузик отвеса. Дело в том, что обе силы – и $\vec{F}$, и $\vec{F}_{тяж} = m\vec{g}$ – должны быть не просто параллельными друг другу, – они должны действовать вдоль одной вертикальной прямой (см. рис. 12). Только в этом случае плечо силы $\vec{F}$ относительно центра тяжести будет равно нулю, а значит, нулю равен будет и момент силы $\vec{F}$. Момент силы тяжести $\vec{F}_{тяж}$ относительно центра тяжести равен нулю по определению центра тяжести. Тогда и суммарный момент всех сил равен будет нулю, что требуется для равновесия.

Эксперимент 4. На столе лежит плоская фигура неправильной формы. Определить положение центра тяжести фигуры. Прикреплять фигуру не за что. Отвеса нет.

Решение. Пробуйте класть фигуру неправильной формы на прямолинейный край стола и прочертите направления края в те моменты, когда фигура вот-вот начинает падать (рис. 13).

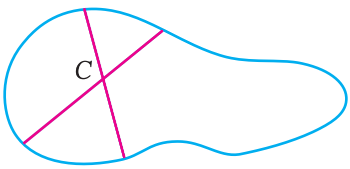


Рис. 13

Эксперимент 5. Как определить положение центра тяжести линейки (или палки; не обязательно однородной, может быть с набалдашником), не пользуясь никакими инструментами?

Решение. Возьмите длинную линейку (длинную палку, длинный карандаш) и положите на вытянутые горизонтально пальцы обеих рук. (См. рис. 14.)

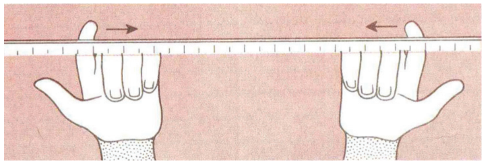


Рис. 14

Приближайте теперь пальцы друг к другу так, чтобы линейка оставалась горизонтальной. Линейка станет скользить **поочерёдно** сначала по одному пальцу, затем по другому. Для длинной линейки это будет повторяться много раз. В конце концов, **пальцы сойдутся под центром тяжести** линейки. Строго математически доказать это не просто. Но легко проверить на опыте: если подпереть линейку в точке, где сойдутся пальцы, то она окажется в равновесии. Это и доказывает, что пальцы сойдутся под центром тяжести линейки.

Но попробуйте теперь **раздвигать** пальцы! – Получится **другой результат**: линейка будет скользить лишь **по одному пальцу**! Попытайтесь объяснить отличие от случая, когда пальцы рук смыкали. Автор не утверждает, что это совсем просто.

Дополнительные задачи

Задача 1. Геометрическим построением найти центр тяжести неправильного четырёхугольника (рис. 15).

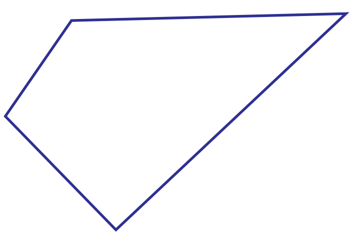


Рис. 15

Указание к решению. В духе эксперимента 2 разбейте четырёхугольник двумя способами на два треугольника, центры тяжести, которых легко найти построением.

Задача 2. Определить положение центра тяжести тонкого однородного диска радиусом R, из которого вырезан круг радиусом $R/2$ (см. рис. 16).

Решение. Ясно, что центр тяжести лежит на линии, соединяющей два круга – исходного и вырезанного, причём лежит левее центра исходного круга. Пусть x – расстояние от центра тяжести до центра исходного круга. Мысленно восстановим вырезанную часть круга.

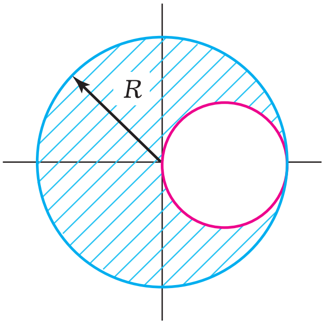


Рис. 16

Теперь сумма моментов сил относительно центра полного круга будет равна нулю (как до вырезания, так как центр тяжести круга без выреза есть центр круга). С другой стороны, эту сумму моментов мы можем представить в виде двух слагаемых:

$$+ (m/4)g \cdot R/2$$

(момент сил той части круга, которой мы дополнили его для восстановления) и

$$-(3m/4)g \cdot x$$

(момент сил части круга до восстановления). Полагая

$$+ (m/4)g \cdot R/2 - (3m/4)g \cdot x = 0,$$

находим $x = R/6$.

Задача 3. Определить положение центра тяжести однородного шара радиусом R, из которого вырезан шар радиусом $R/2$ (см. рис. 16 к предыдущей задаче).

Указание. Какую долю массы большого шара составляет масса вырезанной части?

Ответ. $x = R/14$.

Задача 4. Цепочка подвешена за два конца. Ученик взялся за нижнюю часть цепочки и потянул вниз. При этом образовался почти угол. Поднялся или опустился при этом центр тяжести цепочки?

Подсказка. В равновесии центр тяжести занимает по возможности наинизшее или наивысшее положение? Если шарик у стенки в миске отпустить, то он только под действием силы тяжести (и сил со стороны миски) будет стремиться скатиться в низшую точку миски или будет стремиться «выпрыгнуть» из миски?

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Из высказываний А. Эйнштейна

«Наука – это неустанная многовековая работа мысли.»

***

«Если говорить честно... мне хотелось не только знать, как устроена природа (и как происходят природные явления), но и по возможности достичь цели, может быть утопической и дерзкой на вид, – узнать, почему природа является именно такой, а не другой.»

***

«Цель учёного состоит в том, чтобы дать логически непротиворечивое описание природы. Логика для него означает то же, что законы пропорции для художника.»

***

«В научном мышлении всегда присутствует элемент поэзии. Настоящая наука и настоящее искусство требуют однородного мыслительного процесса.»