

Можаев Виктор Васильевич

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей физики Московского
физико-технического института (МФТИ),
член редколлегии журнала «Квант».



Соединения заряженных конденсаторов

В статье рассматриваются различные варианты соединения заряженных конденсаторов. При вычислении напряжений на конденсаторах применяется закон сохранения заряда и закон Ома. Для определения тепловых потерь при переходных процессах в цепях с заряженными конденсаторами используется закон сохранения энергии.



Когда имеется система последовательно соединённых изначально незаряженных конденсаторов, мы можем её рассматривать как один конденсатор с эквивалентной ёмкостью. Например, два последовательно соединённых незаряженных конденсатора с ёмкостями C_1 и C_2 равносильны конденсатору с ёмкостью $C_{\text{эkv}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$. Если мы такую систему кон-

денсаторов включаем в электрическую цепь, то напряжение U на ней будет всегда связано с зарядом q соотношением: $q = C_{\text{эkv}} \cdot U$, а энергия такой системы $W = \frac{C_{\text{эkv}} U^2}{2}$ или $W = \frac{q^2}{2C_{\text{эkv}}}$. Другая ситуа-

ция имеет место, когда мы последовательно соединяем предварительно произвольно заряженные конденсаторы. В этом случае мы не можем нашу систему заменить одним эквивалентным конденсатором и вынуждены рассматривать её как систему двух конденсаторов со своими зарядами и

напряжениями. Ниже мы рассмотрим примеры таких последовательно соединённых предварительно заряженных конденсаторов.

Задача 1

Два конденсатора с ёмкостями $C_1 = 0,1 \text{ мкф}$ и $C_2 = 0,5 \text{ мкф}$ включены в цепь, изображённую на рис.1. В начальный момент ключ k разомкнут, а конденсаторы заряжены до напряжений: $U_1 = 200 \text{ В}$, $U_2 = 100 \text{ В}$.

1) Какие напряжения установятся на конденсаторах после замыкания ключа?
2) Какое количество теплоты выделится в резисторе R за время установления нового равновесного состояния?

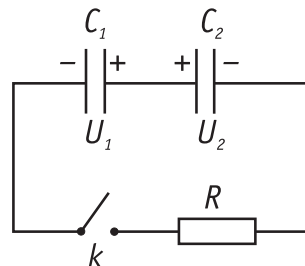


Рис. 1.



Решение

До замыкания ключа на его концах напряжение равно $U_1 - U_2$. Сразу после замыкания ключа начнётся процесс перераспределения зарядов на конденсаторах и потечёт ток (по часовой стрелке). Начальный ток J_0 , очевидно, будет равен

$$J_0 = \frac{U_1 - U_2}{R}.$$

Затем ток будет спадать и станет равным нулю, когда потенциалы левой обкладки конденсатора C_1 и правой обкладки конденсатора C_2 будут равны, т.е. суммарная разность потенциалов на конденсаторах станет равна нулю. Это есть условие окончания переходного процесса. Для определения новых установившихся напряжений на конденсаторах воспользуемся законом сохранения заряда. Пусть на конденсаторе C_1 установится напряжение U'_1 с теми же знаками на обкладках, тогда это означает, что с правой обкладки конденсатора C_1 ушёл заряд

$$\Delta q = C_1(U_1 - U'_1).$$

Очевидно, что этот заряд перетёк на конденсатор C_2 . Новый заряд на левой обкладке конденсатора C_2 будет равен:

$$q'_2 = C_2 U_2 + C_1(U_1 - U'_1),$$

а новое напряжение

$$U'_2 = \frac{q'_2}{C_2} = U_2 + \frac{C_1}{C_2}(U_1 - U'_1).$$

Запишем условие равенства нулю суммарного напряжения на конденсаторах:

$$U'_1 - U'_2 = 0 \text{ или } U'_1 - U_2 - \frac{C_1}{C_2}(U_1 - U'_1) = 0.$$

Отсюда

$$U'_1 = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2} = 116,6 \text{ В}.$$

Точно такое же (по величине) напряжение установится и на конденсаторе C_2 . Знаки зарядов на обоих конденсаторах сохраняются.

Для ответа на второй вопрос воспользуемся законом сохранения энергии. Начальная энергия конденсаторов

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2} + \frac{C_2 U_2^2}{2}.$$

Конечная энергия конденсаторов

$$W_2 = \frac{C_1 U_1'^2}{2} + \frac{C_2 U_1'^2}{2} = \frac{(C_1 U_1 + C_2 U_2)^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

Тогда количество теплоты, которое выделится в резисторе, будет равно:

$$Q = W_1 - W_2 = \frac{C_1 C_2 (U_1 - U_2)^2}{2(C_1 + C_2)} = 4,16 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Как мы видим, полученные результаты не зависят от величины сопротивления резистора. Возникает вопрос: а какова роль резистора в данном процессе? Не вдаваясь в подробности, сообщим, что от величины сопротивления зависит время установления нового состояния нашей системы. Чем меньше сопротивление, тем больше начальный ток J_0 и тем быстрее установятся новые напряжения на конденсаторах.



Задача 2

Два конденсатора с ёмкостями $C_1 = 0,1 \text{ мкф}$ и $C_2 = 0,5 \text{ мкф}$ включены в цепь, изображённую на рис. 2. В начальный момент ключ k разомкнут, а конденсаторы заряжены до напряжений $U_1 = 200 \text{ В}$, $U_2 = 100 \text{ В}$.

1) Какое напряжение установится на конденсаторах после замыкания ключа? 2) Какое количество теплоты выделится в резисторе R за время установления нового равновесного состояния?

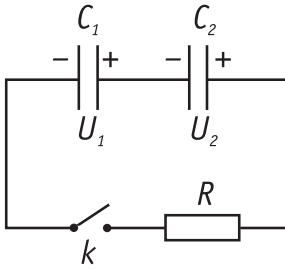


Рис. 2.

Решение

Как в предыдущей задаче, так и здесь до замыкания ключа мы имеем дело с последовательным соединением предварительно заряженных конденсаторов. В задаче 1 соединены обкладки с одинаковым по знаку зарядами, а в данной задаче – с противоположными. Подчеркнём, что речь идёт не о системе последовательно соединённых конденсаторов, когда заряды на конденсаторах равны, а заряды соединённых обкладок имеют противоположные знаки, а о последовательном соединении произвольно заряженных конденсаторов.

Для ответа на вопросы нашей задачи можно воспользоваться результатом, полученным при решении задачи 1, заменив в ответах “ U_2 ” на “ $-U_2$ ”. Но мы приведём решение, которое немного отличается от решения задачи 1.

До замыкания ключа напряжение на его концах было равно $U_1 + U_2$. Начальный ток (против часовой стрелки) сразу после замыкания

$$J_0 = \frac{U_1 + U_2}{R}.$$

Ток в цепи прекратится, когда наши конденсаторы перейдут в систему параллельно соединённых конденсаторов. Обозначим величину установившегося напряжения на конденсаторах через U_{12} . По закону сохранения заряда суммарный заряд на левой обкладке конденсатора C_1 и на правой обкладке конденсатора C_2 остаётся неизменным. Величина этого заряда до замыкания ключа

$$q_0 = C_2 U_2 - C_1 U_1,$$

а после установления нового равновесного состояния

$$q_{12} = (C_1 + C_2) U_{12}.$$

Приравнявая эти два выражения, получим:

$$U_{12} = \frac{C_2 U_2 - C_1 U_1}{C_1 + C_2} = 50 \text{ В}.$$

Знаки зарядов на конденсаторе C_2 сохраняются, а на конденсаторе C_1 меняются на противоположные.

Для ответа на второй вопрос в выражении для Q (задача 1) заменим “ U_2 ” на “ $-U_1$ ” и получим:

$$Q = \frac{C_1 C_2 (U_1 + U_2)^2}{2(C_1 + C_2)} = 3,75 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Задача 3

Три конденсатора с ёмкостями $C_1 = C_0$, $C_2 = 2C_0$, $C_3 = 3C_0$, каждый из которых заряжен от батареи с ЭДС \mathcal{E} , и резистор с сопротивлением R включены в схему, изображённую на рис. 3. 1) Чему будет равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? 2) Какие разности потенциалов установятся на конденсаторах после нового равновесного состояния? 3) Какое количество теплоты выделится в резисторе после замыкания ключа?

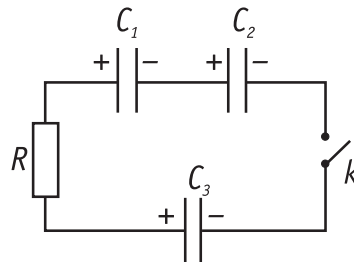


Рис. 3.

Решение

Пусть сразу после замыкания ключа в цепи течёт ток J_0 . Очевидно, что ток будет течь против часовой стрелки. Из закона Ома следует, что для резистора можно записать:

$$J_0 R = \mathcal{E} + \mathcal{E} - \mathcal{E}.$$



Отсюда

$$J_0 = \frac{\varepsilon}{R}$$

Обозначим суммарный заряд, протёкший в нашей цепи за время переходного процесса, через q . Учитывая направление, в котором протёк заряд, запишем новые установившиеся напряжения на конденсаторах:

$$U_1 = \varepsilon - \frac{q}{C_1} = \varepsilon - q/C_0,$$

$$U_2 = \varepsilon - \frac{q}{C_2} = \varepsilon - q/2C_0,$$

$$U_3 = \varepsilon + \frac{q}{C_3} = \varepsilon + q/3C_0.$$

Положительные значения напряжений U_1 , U_2 , U_3 соответствуют первоначальным знакам зарядов на конденсаторах.

В новом состоянии

$$U_1 + U_2 - U_3 = 0.$$

После подстановки значений U_1 , U_2 , U_3 получим:

$$\varepsilon - \frac{q}{C_0} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 0.$$

Отсюда

$$q = \frac{6}{11} C_0 \varepsilon.$$

Теперь мы можем найти новые напряжения на конденсаторах:

$$U_1 = \frac{5}{11} \varepsilon, \quad U_2 = \frac{8}{11} \varepsilon, \quad U_3 = \frac{13}{11} \varepsilon.$$

Все напряжения имеют положительный знак, следовательно, знаки зарядов на всех конденсаторах остались неизменными.

Перейдём к третьему вопросу. Начальная энергия конденсаторов

$$W_1 = \frac{C_0 \varepsilon^2}{2} + \frac{2C_0 \varepsilon^2}{2} + \frac{3C_0 \varepsilon^2}{2} = 3C_0 \varepsilon^2.$$

Конечная энергия конденсаторов

$$W_2 = \frac{C_0 U_1^2}{2} + \frac{2C_0 U_2^2}{2} + \frac{3C_0 U_3^2}{2} = \frac{30}{11} C_0 \varepsilon^2.$$

По закону сохранения энергии количество теплоты, которое выделится в резисторе,

$$Q = W_1 - W_2 = \frac{3}{11} C_0 \varepsilon^2.$$