

**Можаяев Виктор Васильевич**

*Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей физики Московского
физико-технического института (МФТИ),
член редколлегии журнала «Квант».*

Диэлектрик в плоском конденсаторе

В статье рассматриваются различные варианты заполнения плоского конденсатора диэлектриком. При решении задач такого типа используется метод эквивалентных схем. Проводится разбор задач по вычислению минимальной работы, необходимой для заполнения диэлектриком плоского конденсатора, а также расчёт сил, действующих на диэлектрик, частично вдвинутый в плоский конденсатор. В обоих случаях используется энергетический метод расчёта.

Диэлектрики отличаются от проводников главным образом тем, что в них по сравнению с металлами почти нет свободных электронов и поэтому они практически не проводят электрический ток. По этой же причине они совершенно по-разному ведут себя во внешнем электростатическом поле: свободные электроны проводников полностью экранируют внешнее поле, они перераспределяются так, что поле внутри проводника равно нулю, в то время как диэлектрики лишь частично уменьшают внешнее поле и не за счёт свободных электронов, а в результате *поляризации* молекул (атомов) диэлектрика. В случае однородной поляризации, например, когда плоский заряженный конденсатор полностью заполнен диэлектриком (твёрдым, жидким, газообразным), на поверхностях диэлектрика, которые соприкасаются с обкладками конденсатора, появляются *связанные (поляризационные) заряды*: у положительно заряженной обкладки – отрицательные связанные заряды, а у отрицательно заряженной – положительные. Суммарный связанный заряд естественно равен нулю, поскольку диэлектрик электронейтрален. Эти связанные заряды создают своё поле, которое направлено навстречу внешнему и частично компенсирует его. Степень компенсации внешнего поля зависит от молекулярного (атомного) строения диэлектрика и от конфигурации того объёма, который он занимает.

Пусть в окружающем пространстве имеется некоторое распределение свободных зарядов. Если мы сохраним это распределение и заполним всё пространство, где поле не равно нулю, диэлектриком, то напряжённость поля повсюду уменьшится в ϵ раз. Физическую характеристику диэлектрика ϵ называют *диэлектрической проницаемостью* данного вещества. Типичным примером такой ситуации являются заряженные конденсаторы (плоский, сферический или цилиндрический). Если мы сохраним распределение зарядов на таком конденсаторе и полностью заполним его диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ , то напряжённость поля в любой точке внутри конденсатора уменьшится в ϵ раз, а ёмкость такого конденсатора увеличится во столько же раз. А вот если мы будем поддерживать постоянную разность потенциалов между обкладками конденсатора, то после заполнения конденсатора диэлектриком поле внутри него не изменится. Сохранение величины поля приводит к росту свободных зарядов на обкладках конденсатора в ϵ раз.



Еще одним фактором, влияющим на величину напряжённости поля в диэлектрике, является конфигурация той части пространства, которая заполнена диэлектриком. Для диэлектрика произвольной формы это чрезвычайно сложная задача. Ниже мы разберём конкретные примеры, в которых ограничимся наиболее простыми формами диэлектрика: тонкая пластина или слой диэлектрика между двумя сферическими поверхностями.

Задача 1

Плоский воздушный конденсатор ёмкостью C_0 присоединён к источнику тока, который поддерживает на пластинах конденсатора разность потенциалов U . 1) Какой заряд протечёт через источник при заполнении пространства между обкладками жидкостью с диэлектрической проницаемостью ϵ ? 2) Чему будет равна величина связанного заряда диэлектрика у поверхности пластин конденсатора?

Решение

Очевидно, что заряд на нашем воздушном конденсаторе до заполнения диэлектриком равен

$$Q_0 = C_0 U.$$

После заполнения диэлектрической жидкостью ёмкость конденсатора увеличится в ϵ раз:

$$C_1 = \epsilon C_0.$$

Новый заряд на конденсаторе после заполнения жидкостью

$$Q_1 = \epsilon C_0 U.$$

Изменение заряда на конденсаторе произойдёт за счёт заряда, который протёк через батарею:

$$\Delta Q_{\text{бат}} = Q_1 - Q_0 = (\epsilon - 1) C_0 U.$$

После того, как жидкость заполнила конденсатор, на его обкладках находится свободный заряд Q_1 , а на поверхности ди-

электрика в результате поляризации появится связанный заряд $q_{\text{связ}}$ (рис. 1). Найдём величину этого заряда. Напряжённость электрического поля в жидкости внутри конденсатора

$$E = \frac{U}{d}, \quad (1)$$

где d – расстояние между обкладками конденсатора.

С другой стороны, поле в конденсаторе выражается через суммарный (свободный плюс связанный) заряд у поверхности пластин:

$$E = \frac{Q_1 - q_{\text{связ}}}{\epsilon_0 S}, \quad (2)$$

где S – площадь пластин. Приравнявая (1) и (2), получим

$$q_{\text{связ}} = Q_1 - \frac{\epsilon_0 S U}{d} = (\epsilon - 1) C_0 U.$$

Мы нашли, что связанный заряд равен притекшему на пластины свободному заряду, так и должно быть, поскольку поле внутри конденсатора остаётся неизменным.

Задача 2

Плоский воздушный конденсатор с квадратными пластинами частично заполнен диэлектриком, как это изображено на рис. 2а, 2б. Определите напряжённость электрического поля внутри диэлектрика, если заряд на обкладках конденсатора равен Q , площадь пластин S , диэлектрическая проницаемость диэлектрика ϵ . Размеры диэлектрика указаны на рисунках.

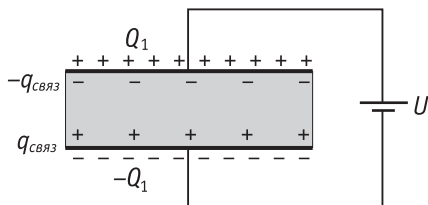


Рис. 1

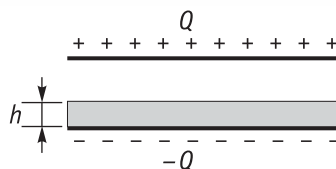
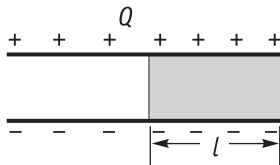


Рис. 2а

Рис. 26

**Решение**

Рассмотрим случай, когда конденсатор частично заполнен слоем диэлектрика толщиной h (рис. 2а). В отсутствие диэлектрика напряжённость электрического поля в конденсаторе равна

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}. \quad (1)$$

При таком частичном заполнении мы можем рассматривать наш конденсатор как систему двух последовательно соединённых конденсаторов: один – воздушный с ёмкостью

$$C_{\text{возд}} = \frac{\varepsilon_0 S}{d-h},$$

а другой – полностью заполненный диэлектриком, ёмкость которого

$$C_{\text{диэл}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{h}.$$

На каждом из конденсаторов находится заряд Q , поэтому разность потенциалов на заполненной части конденсатора

$$U_{\text{диэл}} = \frac{Q}{C_{\text{диэл}}} = \frac{Qh}{\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Тогда напряжённость поля в заполненном конденсаторе

$$E_{\text{диэл}} = \frac{U_{\text{диэл}}}{h} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Сравнивая полученное выражение с (1), мы видим, что напряжённость поля в диэлектрике уменьшилась в ε раз и это ослабление поля не зависит от толщины слоя диэлектрика. При таком способе заполнения происходит максимальное ослабление поля в диэлектрике.

Перейдём ко второму случаю (рис. 2б). В этом случае мы можем рассматривать наш конденсатор как систему двух параллельно соединённых конденсаторов с ёмкостями:

$$C_{\text{возд}} = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{S}(\sqrt{S}-l)}{d} \quad \text{и} \quad C_{\text{диэл}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \sqrt{S} \cdot l}{d},$$

где \sqrt{S} – размер обкладок конденсатора. Общая ёмкость конденсатора

$$C_{\text{общ}} = C_{\text{возд}} + C_{\text{диэл}} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \left[1 + \frac{l(\varepsilon-1)}{\sqrt{S}} \right].$$

Разность потенциалов между обкладками конденсатора

$$U = \frac{Q}{C_{\text{общ}}} = \frac{Q \cdot d}{\varepsilon_0 S \left[1 + \frac{l(\varepsilon-1)}{\sqrt{S}} \right]},$$

а напряжённость поля в диэлектрике

$$E_{\text{диэл}} = \frac{U}{d} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S \left[1 + \frac{l(\varepsilon-1)}{\sqrt{S}} \right]}.$$

Проанализируем полученное выражение на предмет зависимости $E_{\text{диэл}}$ от l .

При стремлении l к \sqrt{S} поле в диэлектрике уменьшается и стремится к значению

$$E_{\text{диэл}}(\sqrt{S}) = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S},$$

а при стремлении l к нулю поле растёт и при $l=0$

$$E_{\text{диэл}}(0) = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

При произвольном l поле в диэлектрике

$$\frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S} \leq E_{\text{диэл}}(l) \leq \frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

Задача 3

Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено двумя слоями разнородных диэлектриков: слой толщиной h_1 с диэлектрической проницаемостью ε_1 , а слой толщиной h_2 – с ε_2 . Площадь обкладок S , расстояние между ними равно $h_1 + h_2$. 1) Определите ёмкость такого конденсатора. 2) Найдите напряжённости электрического поля внутри каждого из слоёв, если заряд на обкладках равен Q .

Решение

Будем рассматривать наш конденсатор как систему двух последовательно соединённых конденсаторов C_1 и C_2 с ёмкостями:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{h_1}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{h_2}.$$

Ёмкость такой системы

$$C_{\text{общ}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{\left(\frac{h_2}{\varepsilon_2} + \frac{h_1}{\varepsilon_1}\right)}.$$

Разность потенциалов U_1 на конденсаторе ёмкостью C_1 .

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{Q \cdot h_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}.$$

Разность потенциалов U_2 на конденсаторе ёмкостью C_2

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{Q \cdot h_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}.$$

Напряжённость поля внутри конденсатора ёмкостью C_1

$$E_1 = \frac{U_1}{h_1} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}.$$

Напряжённость поля внутри конденсатора ёмкостью C_2

$$E_2 = \frac{U_2}{h_2} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}.$$

Задача 4

Диэлектрическая пластина толщиной l_2 с диэлектрической проницаемостью ε введена между обкладками плоского воздушного конденсатора (рис. 3). Между поверхностями пластины и обкладками конденсатора остались воздушные зазоры, суммарная толщина которых равна l_1 . Определите силу притяжения между обкладками, если разность потенциалов между ними равна U , а площадь пластин S .

Решение

Конденсатор при таком заполнении диэлектриком эквивалентен двум последовательно соединённым конденсаторам, один из которых воздушный с ёмкостью

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{l_1},$$

а другой, заполненный диэлектриком, с ёмкостью

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{l_2}.$$

Это можно показать, рассмотрев искомый конденсатор, как последовательное соединение трёх конденсаторов: воздушного с расстоянием x между обкладками (x – расстояние от верхней обкладки искомого конденсатора до диэлектрической пластины), конденсатора с диэлектриком толщиной l_2 и воздушного конденсатора с расстоянием между обкладками $l_1 - x$. (Примечание редакции журнала.)

Общая ёмкость конденсатора

$$C_{\text{общ}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{l_2 + \varepsilon l_1}.$$

Заряд на обкладках конденсатора

$$Q = C_{\text{общ}} \cdot U = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U}{l_2 + \varepsilon l_1}.$$

Разность потенциалов на конденсаторе C_1

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{\varepsilon U l_1}{l_2 + \varepsilon l_1}.$$

Напряжённость поля в воздушном зазоре конденсатора

$$E_1 = \frac{U_1}{l_1} = \frac{\varepsilon U}{l_2 + \varepsilon l_1}.$$

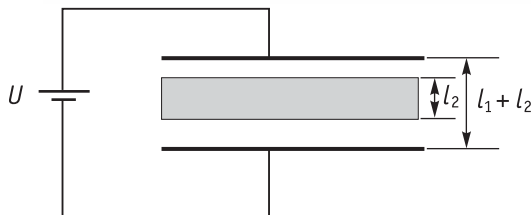


Рис. 3



Сила, действующая на обкладку конденсатора,

$$F = Q \cdot \frac{E_1}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon^2 S U^2}{2(l_2 + \varepsilon l_1)^2}.$$

При написании выражения для силы F заряд обкладки умножается на половину величины поля у обкладки. Это связано с тем, что напряжённость E_1 поля создаётся зарядами обеих обкладок, а мы должны умножать на поле, создаваемое только одной обкладкой: собственное поле обкладки на свои заряды не действует.

Задача 5

Плоский конденсатор, пластины которого имеют площадь S и расположены на расстоянии d , полностью заполнен твёрдым диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε . Конденсатор подключён к батарее, ЭДС которой равна \mathcal{E} . Одну из пластин конденсатора отодвигают так, что образуется воздушный зазор. На какое расстояние x отодвинута пластина, если при этом внешними силами была совершена работа A ?

Решение

Решение данной задачи проведём с помощью закона сохранения энергии. Перемещая пластину конденсатора, мы совершаем работу A , одновременно с этим батарея совершает работу $A_{\text{бат}}$, перемещая заряд с одной пластины на другую. Обе эти работы идут на изменение энергии конденсатора:

$$A + A_{\text{бат}} = W_2 - W_1. \quad (1)$$

В исходном состоянии заряд конденсатора

$$Q_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} \mathcal{E}.$$

Энергия, запасённая в конденсаторе,

$$W_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S \mathcal{E}^2}{2d}.$$

После перемещения пластины ёмкость конденсатора равна ёмкости двух последовательно соединённых конденсаторов:

$$C_2 = \frac{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} \cdot \frac{\varepsilon_0 S}{x}}{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} + \frac{\varepsilon_0 S}{x}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d + \varepsilon x}.$$

Новый заряд на конденсаторе

$$Q_2 = C_2 \mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S \mathcal{E}}{d + \varepsilon x}.$$

Энергия конденсатора после перемещения

$$W_2 = C_2 \frac{\mathcal{E}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S \mathcal{E}^2}{2(d + \varepsilon x)}.$$

Заряд, протёкший через батарею за время перемещения,

$$q = Q_2 - Q_1 = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon^2 S \mathcal{E} x}{d(d + \varepsilon x)}.$$

Отрицательность заряда q означает, что заряд протёк «против» ЭДС батареи, т.е. батарея совершила отрицательную работу:

$$A_{\text{бат}} = q \mathcal{E} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon^2 S \mathcal{E}^2 x}{d(d + \varepsilon x)}.$$

Подставим в (1) найденные выражения для $W_1, W_2, A_{\text{бат}}$:

$$A - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon^2 x S \mathcal{E}^2}{d(d + \varepsilon x)} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon^2 \mathcal{E}^2 S x}{2d(d + \varepsilon x)}.$$

Отсюда

$$x = \frac{d}{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon^2 S \mathcal{E}^2}{2Ad} - \varepsilon}.$$

Задача 6

С какой силой втягивается диэлектрическая пластина в плоский конденсатор с зарядом Q на обкладках, когда она входит в пространство между обкладками на длину x (рис. 4)? Расстояние между обкладками d , длина обкладок l , а ширина a . Диэлектрическая проницаемость пластины ε . Рассмотреть диапазон значений x , при которых $x \gg d$ и $(l - x) \gg d$.

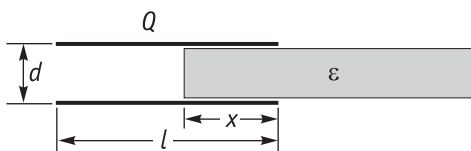


Рис. 4

Решение

Для определения силы, действующей на диэлектрическую пластину со стороны электрического поля конденсатора, воспользуемся методом виртуальных (мысленных) перемещений. Приложим к пластине силу F , равную по величине втягивающей силе и направленную в противоположную сторону. Выдвинув пластину на небольшую величину Δx , мы совершим работу $\Delta A = F \cdot \Delta x$.

По закону сохранения энергии эта работа пойдёт на увеличение энергии конденсатора. Найдём это приращение энергии. Ёмкость конденсатора при вдвинутой на расстояние x пластине

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0(l-x)a}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon x a}{d} = \frac{\varepsilon_0 a [l + (\varepsilon - 1)x]}{d}.$$

Энергия конденсатора с зарядом Q равна

$$W = \frac{Q^2}{2C(x)} = \frac{Q^2 d}{2a\varepsilon_0 [l + (\varepsilon - 1)x]}.$$

Найдём приращение энергии конденсатора при уменьшении x на Δx :

$$\Delta W = \frac{(\varepsilon - 1)dQ^2 \Delta x}{2a\varepsilon_0 [l + (\varepsilon - 1)x]^2}.$$

Полученное приращение

$$\Delta W \approx W'(x) \cdot (-\Delta x),$$

где $W'(x)$ – производная по x функции $W = W(x)$.

Приравнявая ΔA к ΔW , получим

$$F = \frac{(\varepsilon - 1)dQ^2}{2a\varepsilon_0 [l + (\varepsilon - 1)x]^2}.$$

Отметим, что полученное выражение для втягивающей силы справедливо только для $x \gg d$ и $l - x \gg d$. Это связано с тем, что когда левый конец пластины близок к правому или левому концам обкладок, то мы не можем считать ёмкости конденсаторов, у которых длина обкладок мала или сравнима с расстоянием d , как ёмкости плоских конденсаторов, формулу которых мы использовали при расчёте.



М. ТРУХАН