


**Мукушев Базарбек Агзашулы**
*Доктор педагогических наук, профессор кафедры физики и информатики Семипалатинского государственного педагогического института, обладатель государственного гранта Республики Казахстан «Лучший преподаватель вуза – 2007».*

# Метод анализа размерностей

В статье на конкретных примерах показано, что даёт анализ размерностей при физических исследованиях, говорится о его возможностях и ограничениях, а также о полезности при обработке и представлении теоретических и экспериментальных результатов.

## Введение

В физических исследованиях обязательным этапом (вернее, первым этапом) моделирования, подготовки эксперимента, проектирования установки, теоретической разработки являются физические оценки, которые подсказывают правильный путь решения поставленной задачи, дают возможность установить границы области применения решения и понять, какие изменения потребуются при постановке и решении задачи вне пределов этой области. Этот этап физического исследования называется качественным анализом физического явления и объектов.

Наиболее эффективным методом такого анализа является метод анализа размерностей, ставший надёжным инструментом физиков-экспериментаторов, инженеров и других исследователей технических процессов и объектов. Выражение единиц измерения произвольной физической величины через единицы измерения основных величин называется размерностью. А размерность произвольной физической величины может быть лишь произведением степеней размерностей величин, принятых за основные. Следовательно, размерности обеих частей формулы, отражающей некоторую физическую закономерность, должны быть одинаковы.

Метод размерностей помогает установить функциональные зависимости между разными физическими величинами, но только для тех ситуаций, когда эти зависимости степенные. Действительно, таких зависимостей в природе довольно много, и этот метод широко используются исследователями. Есть случаи, когда функциональные зависимости между физическими величинами не степенные. Например, невозможно найти степенные формулы зависимости координаты математического или пружинного маятника от времени и циклической частоты или выражение скорости для ракет от массы (формула Циолковского).

Величины, численное значение которых одинаково во всех системах единиц измерения (СГС, СИ и др.) внутри данного класса, называются безразмерными, и их размерности равны единице.

Довольно много примеров можно привести из истории физических открытий, где анализ размерностей использован как единственный метод исследования. Идея квантования, ставшая фундаментальным открытием квантовой физики, родилась на основе анализа Нильсом Бором размерностей физических величин, характеризующих движение электрона вокруг ядра атома. Н. Бору надо было найти радиусы разрешённых орбит для определения энергии атома в стационарных состояниях. Для этого нужно было указать правило квантования. Он предположил, что какая-то величина должна быть кратной постоянной Планка $\hbar$. Постоянная Планка имеет размерность Дж·с. Но такую же размерность имеет широко используемая в механике величина $mvr$ (момент импульса). Для электрона, движущегося по круговой орбите, модуль его импульса $mv$ и радиус орбиты $r$ остаются неизменными. Следовательно, постоянной будет и величина $mvr$. Естественно было предположить, что должно выполняться соотношение

$mvr = \hbar n, \quad \hbar = h/2\pi = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с,

где $n = 1, 2, 3, \ldots$ , $m$ – масса, $v$ – скорость электрона.


## Правило $N - K = 1$

При применении метода размерностей следует соблюдать правило $N–K=1$. Это правило заключается в следующем. Если размерности всех $N$ величин выражаются через размерности $K$ основных величин и если при этом $N - K = 1$, то существует единственная формула, задающая степенную зависимость между $N$ величинами, и эта формула может быть найдена методом размерностей.

Проиллюстрируем это правило простым примером. В качестве примера рассмотрим задачу Рэлея о колебаниях шарика на струне.

**Задача 1.** Пусть между точками $A$ и $B$ натянута струна. Сила натяжения струны $F$. На середине этой струны в точке $C$ находится тяжёлый шарик. Длина отрезка $AC$ (и соответственно $CB$) равна $L$. Масса $M$ шарика намного больше массы самой струны. Струну оттягивают и отпускают, и шарик начинает совершать колебания. Нужно определить частоту колебаний шарика на струне.

**Решение.** Пусть величины $\omega$, $F$, $M$ и $L$ связанны степенной зависимостью:

$$\omega \sim F^x M^y L^z. \qquad (1)$$

Всего у нас есть, следовательно, четыре величины ($\omega$, $F$, $M$ и $L$), связь между которыми нас интересует. Выпишем размерности этих величин в системе СИ: $[\omega]$ = с$^{-1}$, $[F]$ = кг · м · с$^{-2}$, $[M]$ = кг, $[L]$ = м. Мы видим, что число основных величин $K = 3$ (м, кг, с). Значит, $N - K = 1$.

Показатели степени $x$, $y$, $z$ – числа, которые нам нужно определить.

Если формула (1) выражает реальную физическую закономерность, то размерности правой и левой частей этой формулы должны совпадать, то есть должно выполняться равенство

$$\text{с}^{-1} = (\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2})^{x} \cdot (\text{кг})^{y} \cdot (\text{м})^{z} = \\ = \text{кг}^{x} \cdot \text{м}^{x} \cdot \text{с}^{-2x} \cdot \text{кг}^{y} \cdot \text{м}^{z} = \\ = \text{кг}^{x+y} \cdot \text{м}^{x+z} \cdot \text{с}^{-2x}.$$

В левую часть этого равенства вообще не входят метр и килограмм, а секунда входит в степени – 1. Это означает, что для $x$, $y$ и $z$ выполняются уравнения:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x + z = 0, \\ -2x = -1. \end{cases}$$


Решая эту систему, находим: $x = 1/2$, $y = -1/2$, $z = -1/2$.

Следовательно, $\omega \sim F^{1/2}M^{-1/2}L^{-1/2}$.

Точная формула для частоты отличается от найденной всего в $\sqrt{2}$ раз $\left(\omega^2 = \dfrac{2F}{ML}\right)$.

Однако бывают случаи, когда правило $N - K = 1$ не выполняется. Тогда предпринимается попытка по увеличению основных размерностей физических величин. Для примера рассмотрим движение тела в однородном поле силы тяжести Земли.

**Задача 2**. Тело брошено горизонтально со стола. Высота стола равна $H$. Скорость тела в момент отрыва от стола горизонтальна и равна $v_0$. Нужно найти формулу дальности полёта брошенного тела.

**Решение**. Дальность его полёта $x_0$ свяжем с $H$, $v_0$ и, конечно, с $g$. Поскольку задача чисто кинематическая, дальность полёта не зависит от массы тела. Пренебрегаем сопротивлением среды. У нас получилось 4 физические величины, т. е. $N = 4$. В выражения же для размерностей всех этих величин входят только метры и секунды ($K = 2$). Не выполняется правило $N - K = 1$. Если записать $x_0 \sim {v_0}^{\alpha}H^{\beta}g^{\gamma}$, то для трёх неизвестных величин $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ мы сможем написать только два уравнения. Этот случай нас заставляет увеличить число основных размерностей кинематики.

Введём отдельные единицы для измерения расстояний по вертикали и по горизонтали: расстояния вдоль вертикальной оси $Y$ будем измерять в «вертикальных» метрах – $\text{м}_y$, а расстояния вдоль горизонтальной оси $X$ – в «горизонтальных» метрах – $\text{м}_x$. Тогда размерности всех этих кинематических величин пишутся так: $[g] = \text{м}_y \cdot \text{с}^{-2}$, $[v_0] = \text{м}_x \cdot \text{с}^{-1}$, $[H] = \text{м}_y$, $[x_0] = \text{м}_x$. Теперь $K = 3$ – основными размерностями стали $\text{м}_x$, $\text{м}_y$, и с. Сейчас мы сможем использовать формулу $x_0 \sim {v_0}^{\alpha}H^{\beta}g^{\gamma}$ и напишем следующие соотношения размерностей физических величин:

$$\text{м}_x = {\text{м}_x}^{\alpha} \cdot \text{с}^{-\alpha} \cdot {\text{м}_y}^{\beta} \cdot {\text{м}_y}^{\gamma} \cdot \text{с}^{-2\gamma} = \\ = {\text{м}_x}^{\alpha} \cdot \text{с}^{-\alpha-2\gamma} \cdot {\text{м}_y}^{\beta+\gamma}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha = 1, \\ -\alpha - 2\gamma = 0, \\ \beta + \gamma = 0, \end{cases}$$

находим $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, и мы получим формулу $x_0 \sim v_0 \sqrt{\frac{H}{g}}$, или

$$x_0 = Cv_0 \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

Аналитическое решение этой задачи даёт точную формулу $x_0 = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$, значит, $C = \sqrt{2}$.

Таким образом, получена не только качественная, но и количественная оценка зависимости для $x_0$ от величин $v_0$, $H$ и $g$. По порядку величины найденная степенная комбинация даёт правильное значение $x_0$. Оценка всегда интересует по порядку величины. В простых задачах часто коэффициенты, не определяемые методом размерностей, можно считать числами порядка единицы. Конечно, это не есть строгое правило.

## Анализ размерностей физических величин как эвристический метод

Мы на нескольких примерах и задачах покажем эвристическую функцию метода размерностей.

**Задача 3.** Анализируя размерности физических величин, нужно найти период малых колебаний математического маятника.

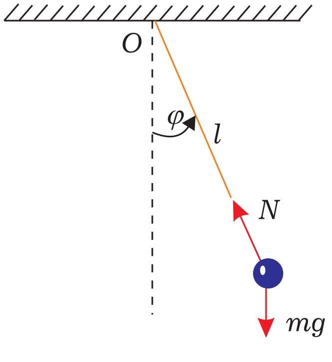



*Рис. 1*

**Решение.** Математический маятник (рис. 1) представляет собой материальную точку массой $m$, подвешенную на невесомой и нерастяжимой нити длиной $l$, которая закреплена другим своим концом неподвижно. Через $\varphi$ обозначаем угол между нитью и вертикалью. Считая, что отсутствует сила сопротивления воздуха, запишем законы движения маятника:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi, \qquad (1)$$

$$m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 l = N - mg\cos\varphi. \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2) очевидно, что в качестве определяющих параметров можно взять следующую систему: $t$, $l$, $g$, $m$, $\varphi$.

Будем искать формулу периода колебаний в виде

$$T \sim l^\alpha g^\beta m^\gamma \varphi^k.$$

Напишем размерности для обеих частей для этого выражения

$$\text{с} = (\text{м})^\alpha \cdot (\text{м}\cdot\text{с}^{-2})^\beta \cdot (\text{кг})^\gamma \cdot (\text{рад})^k =$$
$$= \text{м}^{\alpha+\beta} \cdot \text{с}^{-2\beta} \cdot \text{кг}^\gamma \cdot \text{рад}^k.$$

У нас получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0, \\ -2\beta = 1, \\ \gamma = 0, \\ k = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим:

$\beta = -1/2$, $\alpha = 1/2$, $\gamma = 0$; $k = 0$.

Следовательно, $T \sim l^{1/2} \cdot g^{-1/2}$, или $T = C\sqrt{\frac{l}{g}}$, где $C$ – безразмерная постоянная величина, которую находят посредством других методов ($C = 2\pi$). Период свободных колебаний математического маятника зависит только от его длины и ускорения свободного падения. Примечательно то, что метод размерностей однозначно отвергает «кажущуюся» зависимость периода колебаний маятника от его массы и угла отклонения нити от вертикали.

**Задача 4.** Период колебаний камертона зависит от плотности $\rho$ и модуля упругости $E$ материала, из которого изготовлен камертон, и длины $L$ ножки камертона.

Анализируя размерности величин, характеризующих колебания камертона, нужно найти зависимость периода его колебаний от указанных параметров.

Из опытов с камертонами разной длины были получены следующие результаты:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $L$ (мм) | 122 | 108 | 96 | 82 | 64 |
| $\nu$ (Гц) | 252 | 284 | 320 | 375 | 480 |

Согласуются ли эти экспериментальные данные с формулой, найденной посредством метода размерностей?

**Решение.** Будем искать формулу периода колебаний в виде:

$$T \sim \rho^{\alpha} E^{\beta} L^{\gamma}.$$

Напишем размерности для обеих частей этого выражения:

$$\text{с} = (\text{кг}\cdot\text{м}^{-3})^{\alpha}\cdot(\text{кг}\cdot\text{м}^{-1}\cdot\text{с}^{-2})^{\beta}\cdot(\text{м})^{\gamma} =$$
$$= \text{кг}^{\alpha+\beta}\cdot\text{м}^{-3\alpha-\beta+\gamma}\cdot\text{с}^{-2\beta}.$$

Получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0, \\ -3\alpha - \beta + \gamma = 0, \\ -2\beta = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим:

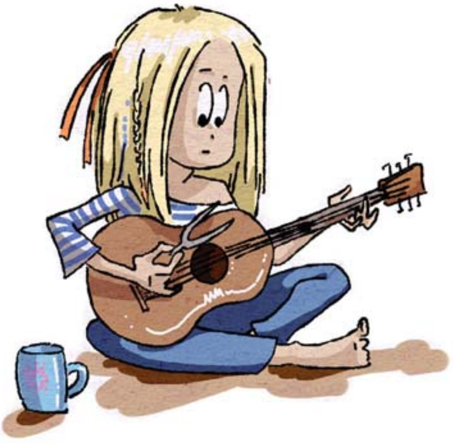
$$\beta = -1/2,\ \alpha = 1/2,\ \gamma = 1.$$

Итак, находим зависимость

$$T = CL\sqrt{\frac{\rho}{E}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{CL}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L\nu = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

На основе табличных данных вычислим, что значения $L\nu$ находятся в пределах (30672 – 30750). Можно считать, что экспериментальные данные хорошо согласуются с формулой, найденной посредством метода размерностей.



**Задача 5.** Нужно найти формулу скорости распространения сферической ударной волны точечного взрыва.

*Примечание*. При любом взрыве происходит мгновенное выделение значительной энергии в точке. Опыт и теория показывают, что в точке взрыва возникает сильная сферическая ударная волна (рис. 2), отделяющая окружающую невозмущённую атмосферу от движущегося за ударной волной раскалённого газа. Давление за фронтом ударной волны на начальной стадии взрыва во много тысяч раз больше, чем начальное давление воздуха, влиянием которого на процесс распространения ударной волны можно пренебречь.

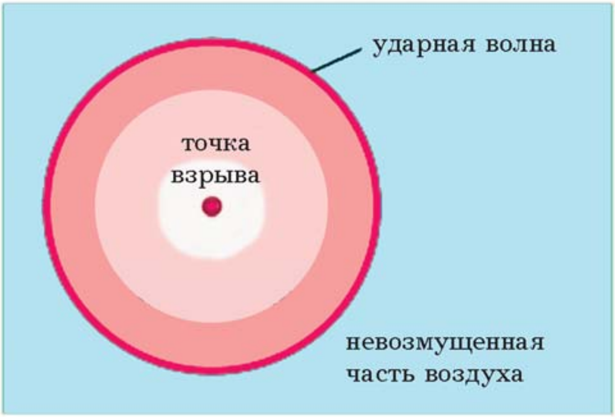



*Рис. 2. Распространение сферической ударной волны от точечного взрыва*

**Решение.** Попытаемся найти закон распространения ударной волны $r = r(t)$ ($r$ – расстояние фронта ударной волны от центра взрыва, $t$ – время). Очевидно, что основными определяющими параметрами в этой задаче будут: $E$ – энергия в точке взрыва, $\rho$ – начальная плотность невозмущённого воздуха, $t$ – время. Считаем, что физическое свойства воздуха не играют решающей роли.

Таким образом, получилась простая модель взрыва, где выполняется правило $N - K = 1$. Действительно, $N = 4$ ($r$, $E$, $\rho$, $t$) и $K = 3$ (м, с, кг). Будем искать закономерность в виде зависимости $r \sim E^{\alpha}\rho^{\beta}t^{\gamma}$. Анализ размерностей этих физических величин даёт следующую зависимость:

$$r = C\left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}, \qquad (1)$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{2}{5}C\left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{5}}. \qquad (2)$$

Из уравнения (1) находим $t$ и подставляем его в уравнение (2), тогда мы получим уравнение (3):

$$v = \frac{2}{5}C^{\frac{5}{2}}\left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{r^3}}. \qquad (3)$$

Приравнивая (2) и (3), получим:

$$\frac{2}{5}C\left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5}C^{\frac{5}{2}}\left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{r^3}}. \qquad (4)$$

Постоянную $C$ можно найти на основе опыта в обыкновенной лаборатории с замером функции $r = r(t)$ в разные моменты времени при известной энергии заряда $E$ и плотности воздуха $\rho$. Для этого обычно проводят малые взрывы небольшой мощности. Решение соответствующей задачи газовой динамики показало, что значение постоянной $C$ близко к единице.

Формула (1) показывает, что если измерить радиус ударной волны в разные моменты времени, то в логарифмических координатах $\lg t$, $(5/2)\lg r$ экспериментальные точки должны лечь на прямую

$$\frac{5}{2}\lg r = \frac{5}{2}\lg C + \frac{1}{2}\lg\frac{E}{\rho} + \lg t. \qquad (5)$$

Опытные данные представлены

на рис. 3 красными крестиками, которые хорошо ложатся на прямую, наклонённую под углом 45° к осям координат, что является хорошим подтверждением теоретической формулы (1).

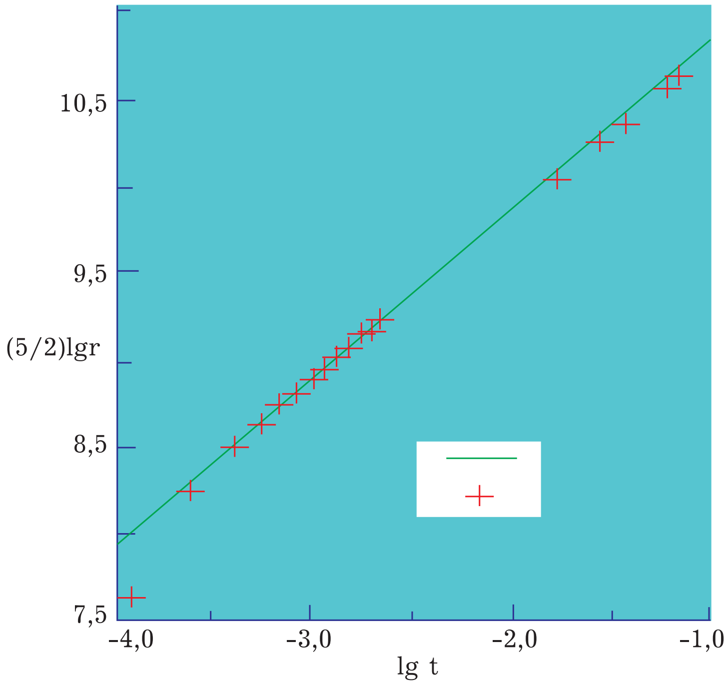



*Рис. 3. Сравнение теоретического (1) и экспериментального (2) закона распространения сферической ударной волны от точечного взрыва в зависимости от времени*

Полученные уравнения (1) – (3), характеризующие динамику распространения ударной волны при точечном взрыве, могут описать и взрыв атомной бомбы. В 1945 году американцы впервые успешно провели испытание атомной бомбы. Все параметры атомной бомбы были в то время строго секретны. Только кинофильм о распространении огненного шара, снятый Дж. Маком во время испытания ядерного взрыва в Нью-Мексико в 1945 году, был достоянием широкой публики. Задержка кадров киноаппарата составила 0,14 мкс. Известный механик из Великобритании Дж. И. Тейлор, обработав этот кинофильм, получил многочисленные фотографии, представляющие состояние огненного шара через каждый промежуток времени, равный 0,14 мкс. Одна из них показана на рис. 4, где отчётливо видны масштаб и время от начала взрыва.

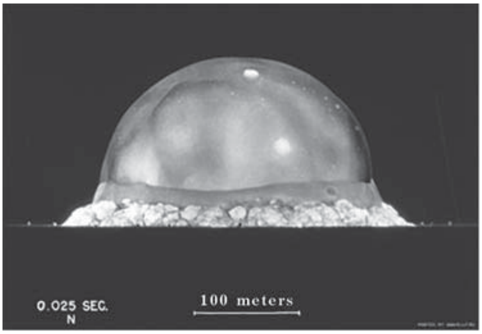



*Рис. 4. Огненный шар при $t \approx$ $\approx 25$ мкс*

На основании фотографий в работе Тейлора указана зависимость между радиусом $r$ расширяющейся сферической ударной волны для значений от 11 м до 185 м и соответствующими моментами времени $t$ от момента возникновения взрыва в интервале от 0,1 мкс до 62 мкс [3]. На рисунке 3 опытные данные представлены крестиками. Прямая отвечает формуле:

$$\frac{5}{2}\lg r - \lg t = \frac{5}{2}\lg C + \frac{1}{2}\lg\frac{E}{\rho}. \quad (6)$$

Из графика (рис. 3) $\frac{5}{2}\lg r\,(\text{см}) - \lg t\,(\text{с}) \approx$ $\approx 11{,}915$. Из уравнения (6) $\frac{1}{2}\lg\frac{E}{\rho} =$ $= 11{,}915$, откуда при $\rho = 0{,}00125\,\text{г/см}^3$ (плотность воздуха)

$$E \approx 6{,}76\cdot10^{23}\,\rho = 8{,}45\cdot10^{20}\ \text{эрг}.$$

Тейлоровская оценка мощности первой атомной бомбы оказалась очень близка к секретным данным. После рассекречивания стало известно значение выделившейся энергии первой атомной бомбы, она оценивалась в эквивалентах 21 килотонны тротила, или $8{,}88\cdot10^{20}$ эрг. Публикация Дж. И. Тейлором этой величины вызвала в своё время немалое смущение в американских правительственных кругах, так как эта цифра считалась строго секретной.

**Задача 6**. (Задача Р. Фейнмана) Анализируя размерности, оцените «боровский радиус» атома водорода.

**Решение.** В задачу об определении радиуса электронной орбиты входят следующие константы: постоянная Планка $\hbar$, масса электрона $m$ и константа, характеризующая силу притяжения между электроном и протоном; в качестве такой величины возьмём $f = e^2/4\pi\varepsilon_0$, $e$ – элементарный заряд). Размерности этих констант соответственно: Дж·с, кг, Дж·м. Вспоминая размерность энергии, нетрудно убедиться, что единственной комбинацией этих констант, имеющей размерность длины, является $\frac{\hbar^2}{mf} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = r_0$. Это и есть боровский радиус. Численно он равен $r_0 =$

$$= \frac{4\cdot3{,}14\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot(1{,}055\cdot10^{-34})^2}{9{,}110\cdot10^{-31}\cdot(1{,}602\cdot10^{-19})^2} =$$

$= 0{,}528\cdot10^{-10}$ м.

В заключении подчеркнём, что уравнения и формулы, полученные из рассмотрения размерностей, создадут предпосылки для количественной оценки исследуемых физических явлений. Разумеется, что за этапом построения простых моделей посредством анализа размерностей должно следовать более аккуратное и по возможности точное изучение обсуждаемых явлений.

## Литература


1. *Брук Ю.М., Стасенко А.Л.* Как физики делают оценки – метод размерностей и порядки физических величин. В книге «О современной физике – учителю». – М.: Знание, 1975.
2. *Тирский Г.А.* Анализ размерностей // Соросовский образовательный журнал. – том 7, №6. – 2001.
3. *Taylor G.*, Proceedings of the Royal Society, 1950, №1065, Vol. 201, P. 159 – 186.
4. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями. – М.: Мир, 1978.