Граськин Сергей Сергеевич
Доктор технических наук, профессор, директор лицея № 1580 при МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Иванов Анатолий Ефимович
Кандидат технических наук, доцент кафедры «Основы физики» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Механические колебания

Колебания – повторяющиеся *ограниченные* движения относительно некоторого среднего положения, которое в частном случае может быть состоянием устойчивого равновесия.

Колебания в различных конструкциях играют отрицательную роль, поэтому стремятся предотвратить возникновение колебаний или уменьшить их. Вместе с тем, например, на колебательных процессах основана радиотехника.

Малые колебания

Рассмотрим механическую систему, имеющую одну степень свободы, т. е. положение этой системы может быть задано с помощью одной величины x. Потенциальная энергия системы

$$U = U(x).$$

Допустим, что система обладает положением устойчивого равновесия. В этом случае функция $U(x)$ имеет минимум (рис. 1).

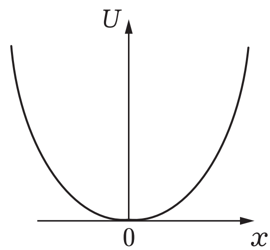

Рис. 1

Разложим функцию $U(x)$ в ряд по степеням x, причём ограничимся рассмотрением малых колебаний (значение x мало́), так что высшими степенями x можно будет пренебречь. По формуле Маклорена[1]:

$$U(x) = U(0) + U'(0)\cdot x + \frac{1}{2}U''(0)\cdot x^2 + \cdots$$

Так как при $x = 0$, $U(x) = 0$ и $U'(x) = 0$, а $U''(x) > 0$ (см. рис. 1), то

$$U(x) = (1/2)kx^2, \qquad (1)$$

где $U''(0) = k$ $(k > 0)$. Выражение (1) идентично выражению для потенциальной энергии деформированной пружины. Сила, действующая на систему,

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -kx. \qquad (2)$$

Сила (2) называется *квазиупругой*. Она всегда направлена к положению равновесия, иногда её называют *возвращающей*.

Гармонические колебания

Движение системы, находящейся под действием силы вида $F = -kx$, представляет собой *гармоническое колебание*.

Рассмотрим колебание материальной точки (МТ) массой m, подвешенной на пружине, массой которой можно пренебречь (рис. 2). Если пружину растянуть, то в ней возникает сила, стремящаяся вернуть МТ в положение равновесия. При небольшом удлинении пружины справедлив закон Гука $\vec{F} = -k\vec{x}$ (знак минус означает, что сила $\vec{F}$ направлена в сторону, противоположную смещению). Смещение вниз будем считать положительным.

В положении равновесия вес МТ уравновешивается силой упругости пружины:

$$mg = kx_0. \qquad (3)$$

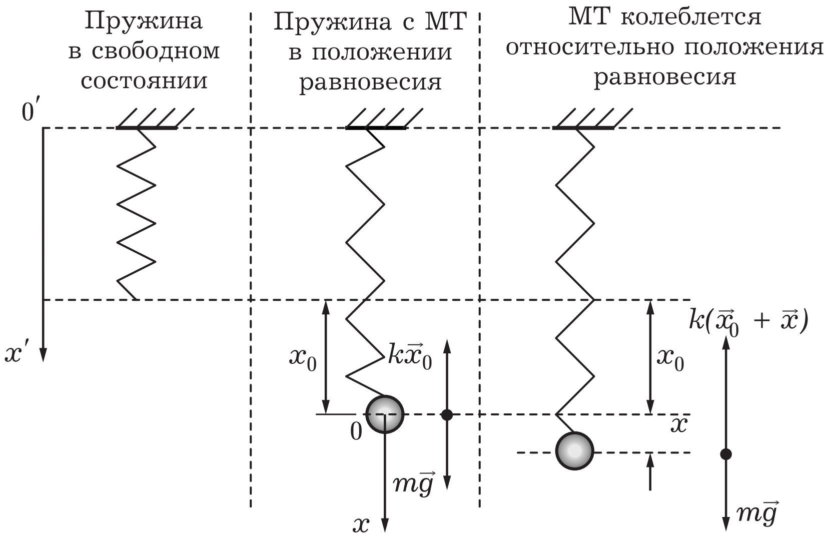

Рис. 2

[1] Ряд Маклорена $f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots$

Пусть МТ колеблется в среде, в которой отсутствует сопротивление, около нового положения равновесия 0. Рассмотрим промежуточное положение материальной точки (оно смещено на расстояние x от точки 0). На МТ действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости пружины $k(\vec{x}_0 + \vec{x})$. Согласно второму закону Ньютона, записанному в проекции на ось $0x$:

$$mg - k(x_0 + x) = ma. \qquad (4)$$

С учётом (3) выражение (4) примет вид

$$-kx = ma,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (5)$$

где ускорение МТ есть вторая производная от перемещения $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, а

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \qquad (6)$$

причём, т. к. $\dfrac{k}{m} > 0$, ω_0^2 – положительная величина.

Итак, в отсутствие сил трения движение под действием квазиупругой силы описывается дифференциальным уравнением (5).

Общим решением уравнения (5) является функция

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (7)$$

где A и φ_0– произвольные постоянные.

Конкретные значения A и φ_0 определяются начальными условиями[1]:

$$\begin{cases} t = 0, \\ x = -x_0, \\ \dfrac{dx}{dt} = v_0. \end{cases} \qquad (8)$$

Итак, смещение x изменяется со временем по закону косинуса. Следовательно, движение системы, находящейся под действием силы вида $F = -kx$, представляет собой гармоническое колебание. График функции (7) показан на рис. 3.

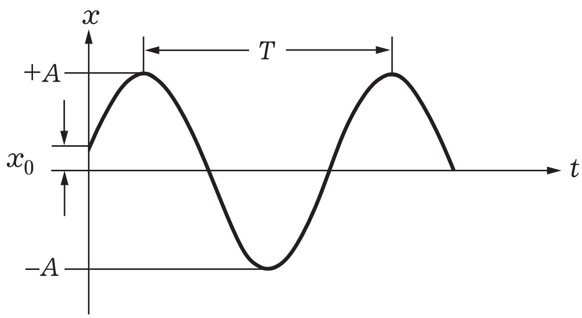

Рис. 3

Величина A наибольшего отклонения системы от положения равновесия называется *амплитудой*.

Величина $(\omega_0 t + \varphi_0)$ называется *фазой колебаний*. Постоянная φ_0 представляет собой значение фазы в

[1] В математике дифференциальное уравнение (5) с начальными условиями (8) называется задачей Коши (О. Л. Коши – французский математик (1789 – 1857)) и является одним из основных дифференциальных уравнений математической физики. Величину ω_0 называют *круговой*, или *циклической частотой*.

момент $t = 0$ и называется *начальной фазой колебаний*.

Поскольку косинус – периодическая функция, различные состояния системы[1] повторяются через промежуток времени T, за который фаза получает приращение, равное 2π.

Этот промежуток времени определяется из условия

$$\omega_0(t+T)+\varphi_0 = (\omega_0 t+\varphi_0)+2\pi,$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Частота колебаний

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Величину

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad (9)$$

называют круговой, или циклической частотой.

Скорость колеблющейся материальной точки найдём дифференцированием выражения (7):

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0) = = A\omega_0\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right). \qquad (10)$$

Ускорение равно

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi_0) = = A\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi_0+\pi) = -A\omega_0^2 x. \qquad (11)$$

Как видно из (7), (10), (11), скорость опережает смещение по фазе на $\frac{\pi}{2}$, а ускорение и смещение находятся в противофазе: в момент, когда смещение достигает наибольшего положительного значения, ускорение достигает наибольшего по модулю отрицательного значения и наоборот.

Квазиупругая сила является консервативной. Поэтому механическая энергия гармонических колебаний должна оставаться постоянной. В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причём в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия механическая энергия состоит только из потенциальной энергии, которая достигает своего наибольшего значения $U_{\text{макс}}$:

$$E_{\text{мех}} = U_{\text{макс}} = \frac{kA^2}{2}. \qquad (12)$$

При прохождении системы через положение равновесия механическая энергия состоит лишь из кинетической энергии, которая в этот момент достигает своего наибольшего значения $E_{\text{к.макс}}$:

$$E_{\text{мех}} = E_{\text{к.макс}} = \frac{mv_{\text{макс}}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \qquad (13)$$

Выражения (12) и (13) равны друг другу, так как согласно (6) $m\omega_0^2 = k$.

Со временем кинетическая и потенциальная энергии изменяются согласно выражениям:

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0), \qquad (14)$$

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0). \qquad (15)$$

Сложив (14) и (15), с учётом (6) получим

$$E_{\text{мех}} = E_{\text{к}} + U = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2},$$

т. е. механическая энергия действительно остаётся постоянной, откуда

$$A = \sqrt{\frac{2E_{\text{мех}}}{m\omega_0^2}},$$

т. е. для данной системы (m и ω_0)

$$A \sim \sqrt{E_{\text{мех}}}.$$

[1] Состояние механической системы характеризуется значениями координат (x) и скоростей (dx/dt) тел, образующих систему.

Математический маятник

Математический маятник (ММ) – идеализированная система – материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити. Приближением к математическому маятнику служит небольшой шарик, подвешенный на длинной тонкой нити. Отклонение ММ от положения равновесия характеризуется углом φ (рис. 4). Колебания ММ происходят в среде, в которой нет сил сопротивления. Отклонения ММ от положения равновесия невелики: $\varphi \to 0$.

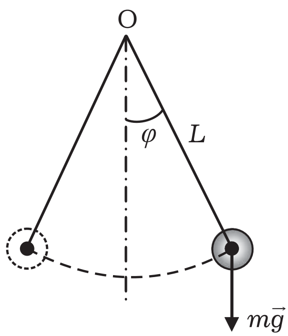

Рис. 4

При отклонении ММ от положения равновесия возникает момент силы $m\vec{g}$, модуль которого равен:

$$M = Lmg\sin\varphi. \qquad (16)$$

Этот момент направлен так, что стремится вернуть маятник в положение равновесия, и аналогичен в этом отношении квазиупругой силе.

Запишем уравнение динамики вращательного движения для ММ

$$-M = I\varepsilon, \qquad (17)$$

где I – момент инерции ММ

$$I = mL^2, \qquad (18)$$

ε – угловое ускорение ММ

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (19)$$

Подставляя (17), (18), (19) в (16), получим

$$mL^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgL\varphi,$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0, \qquad (20)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L},$$

а циклическая частота колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}. \qquad (21)$$

Уравнение (17) идентично уравнению (4). Его общее решение

$$\varphi = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Следовательно, при малых колебаниях угловое отклонение ММ изменяется от времени по гармоническому закону. Как следует из (21) и (9),

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Циклическая частота ω_0 и период T гармонических колебаний зависят от длины маятника L и ускорения силы тяжести g. От амплитуды A они не зависят. Последнее утверждение справедливо, если $\varphi \to 0$.

Физический маятник

Физический маятник – твёрдое тело, способное совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, не совпадающей с его центром масс. На рис. 5 обозначены: C – центр масс, l – расстояние от оси вращения до центра масс.

При отклонении физического маятника от положения равновесия на угол φ возникает вращающий момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Выберем положительное направление отсчёта угла φ по часовой стрелке. Тогда модуль проекции момента силы тяжести запишется как $M = mgl\sin\varphi$, и уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела примет вид:

$$-mgl\sin\varphi = I\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

где I – момент инерции тела относительно оси O. Мы ограничиваемся рассмотрением *малых* колебаний, когда $\sin\varphi \approx \varphi$. При этом условии предыдущее уравнение примет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0.$$

Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение гармонических колебаний, его решение

$$\varphi = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где циклическая частота ω_0 и период колебаний T

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}},\ \ T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}.$$

Такую же частоту и период имеет математический маятник длиной

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ml},$$

которую называют *приведённой длиной* физического маятника.

Точку O' (рис. 5), которая находится на прямой, проходящей через точку подвеса O и центр масс C, и отстоит от точки O на расстоянии $l_{\text{пр}}$, называют *центром качания* физического маятника. Центр качания O' обладает замечательным свойством: если маятник перевернуть на 180° и заставить совершать малые колебания вокруг точки O', то период колебаний не изменится. На этом свойстве основано определение ускорения свободного падения с помощью *оборотного маятника*: экспериментально устанавливают положения двух «сопряжённых» точек (осей) O и O', малые колебания вокруг которых происходят с одинаковой частотой. Это значит, что расстояние $OO' = l_{\text{пр}}$. Определив ω_0 и $l_{\text{пр}}$, из формулы $\omega_0 = \sqrt{g/l_{\text{пр}}}$ находим g.

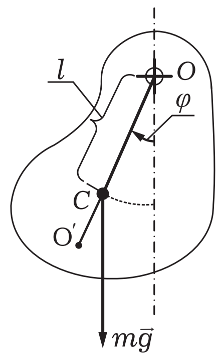

Рис. 5

Графическое изображение гармонических колебаний. Векторная диаграмма

Решение ряда задач значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически с помощью вектора амплитуды $\vec{A}$, вращающегося с угловой скоростью ω_0 против часовой стрелки. Возьмём ось $0x$, отложим вектор $\vec{A}$, образующий с осью угол φ_0. Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью ω_0, то через время t угол между вектором $\vec{A}$ и осью $0x$ будет равен $\varphi_0 + \omega_0 t$. Проекция конца вектора $\vec{A}$ на ось $0x$ будет перемещаться по оси $0x$ в пределах от $-A$ до $+A$, причём абсцисса вектора $\vec{A}$ будет изменяться по закону

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Следовательно, гармоническое колебание может быть задано с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью $0x$ угол, равный фазе колебаний $\omega_0 t + \varphi_0$.

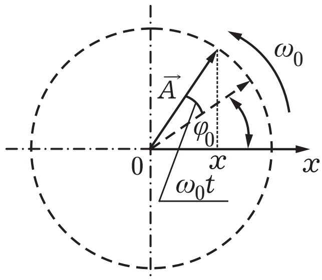

Рис. 6

Литература

1. *Иванов А.Е., Иванов С.А.* Механика, молекулярная физика, термодинамика: учебник – М.: Кнорус, 2012. 950 с.

2. *Иванов А.Е.* Задачник по физике (механика, молекулярная физика, термодинамика): учебное пособие для поступающих в вузы. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Запасайся, чем можешь!

В начале урока учитель успел сказать только то, что ребятам предстоит сейчас выполнить небольшую контрольную работу. Обеспокоенные ученики тут же обращаются к нему с вопросами:

– А можно пользоваться калькулятором?

– Можно.

– А таблицами справочника?

– Можно.

– А в свою тетрадь заглядывать можно?

– Можно, но вы послушайте и запишите тему контрольной работы. Итак, её тема – «Определить сопротивление проводника, пользуясь приборами, имеющимися на вашем столе».

Ребята догадались

Они прочли «Робинзона Крузо» и недоумевают:

– Ну что же он так долго мучился? Надо было позвонить по мобильному, и его бы спасли.

– Наверное, он боялся, что у него не хватит денег, – ведь звонки с островов очень дорогие.