Якушевич Валерий Иванович
Заведующий лабораторией ИМФИ Красноярского государственного педагогического ниверситета.

Патрушев Глеб Олегович
Кандидат физико-математических наук, доцент, учитель физики средней школы № 145 г. Красноярска.

Маятник Жуковского

В этой статье рассказывается о возникновении гармонического колебательного движения под действием сил сухого трения. Приведён теоретический расчёт периода движения маятника, описаны детали и тонкости демонстрации этого явления. Особый акцент сделан на энергетическом анализе возникающих колебаний. Показано, что маятник Жуковского относится к классу систем, в которых отсутствует переход кинетической энергии в потенциальную и обратно. Статья адресована школьникам, а также их учителям и может послужить основой для проведения факультативной работы по физике.

Постановка проблемы и описание движения

В конце XIX века профессор Н.Е. Жуковский (тот самый «отец русской авиации»), преподававший тогда в МГУ, предложил интересную лекционную демонстрацию.

На два быстро вращающихся во встречных направлениях катка он положил стержень (оси катков закреплены). На рис.1 приведена современная версия установки для демонстрации этого явления.

Если стержень положить симметрично, то он будет находиться в равновесии. Если его сместить вбок от положения равновесия, то он будет совершать горизонтальные колебания, да не простые, а гармонические. Период этих колебаний за-

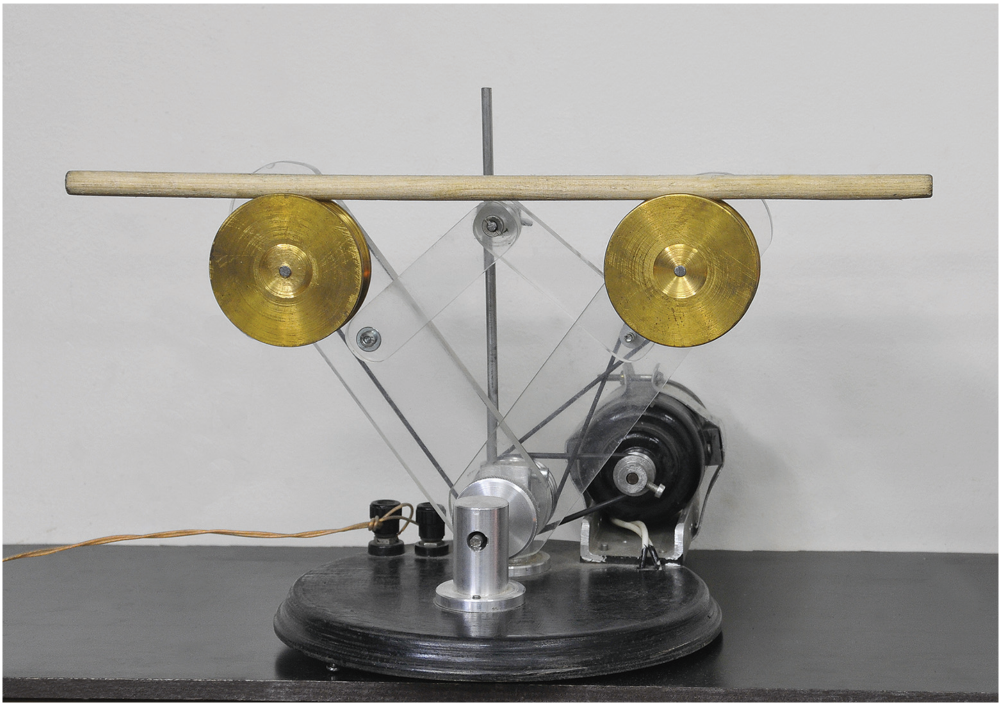


Рис. 1. Внешний вид установки «маятник Жуковского»

висит от расстояния между катками – при маленьком расстоянии период невелик, с увеличением расстояния он возрастает.

Для успешной демонстрации этого явления немалое значение имеет подбор материала катков и самого стержня [1]. При произвольном выборе материала колебания будут быстро затухать, и больше одного-двух периодов пронаблюдать не удастся. В установке, показанной на рис. 1, стержень сделан из дерева, а катки из латуни. В этом случае 7-8 полных колебаний наблюдаются гарантированно.

Проведём силовой анализ движения стержня (рис. 2).

В произвольный момент времени на стержень действуют сила тяжести mg, приложенная в центре масс, силы нормальной реакции опоры со стороны катков N_1 и N_2, а также силы трения скольжения, направленные так, как показано на рисунке. Поскольку катки вращаются очень быстро, между ними и стержнем всегда есть проскальзывание и возникающие силы трения равны своему максимальному значению $\mu \cdot N$. Пусть x – смещение центра масс стержня относительно положения равновесия, а $2L$ – расстояние между осями катков.

Условием покоя стержня в вертикальном направлении является равенство сил тяжести и реакции опоры:

$$mg = N_1 + N_2. \quad (1)$$

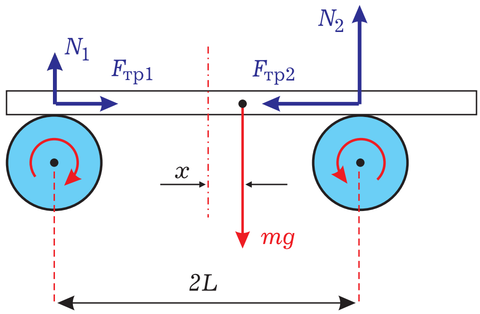


Рис. 2.

Кроме того, стержень находится в равновесии по отношению к вращению, то есть моменты сил, действующих на стержень относительно произвольной оси, взаимно компенсируются. Например, для оси, проходящей через центр масс стержня перпендикулярно плоскости рисунка:

$$N_1 \cdot (L + x) = N_2 \cdot (L - x) \qquad (2)$$

Из этих уравнений получаем, что

$$N_1 = mg\frac{L-x}{2L} \text{ и } N_2 = mg\frac{L+x}{2L}. \qquad (3)$$

Учитывая, что $F_{тр1} = \mu \cdot N_1$ и $F_{тр2} = \mu \cdot N_2$ (условие проскальзывания), запишем второй закон Ньютона для стержня в проекции на горизонтальную ось:

$$m \cdot a = F_{тр1} - F_{тр2} =$$

$$= \mu \cdot (N_1 - N_2) = -\frac{\mu\, mg}{L}x. \qquad (4)$$

В полученном уравнении возвращающая сила, стоящая в правой части уравнения, прямо пропорциональна смещению стержня, взятому с обратным знаком, а значит, движение стержня носит колебательный характер (причём колебания гармонические). Дробь, стоящая перед смещением, играет роль коэффициента квазиупругой силы $k = \frac{\mu\, mg}{L}$ (аналогично случаю пружинного маятника). Период колебаний таким образом равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\mu\, g}}.$$

Установка, показанная на рис. 1, выполнена так, что расстояние между осями катков легко менять. На фотографии виден ромбовидный «пантограф» из оргстекла, с помощью которого и производится раздвижка катков. При увеличении L в два раза период колебаний действительно увеличивается в $\sqrt{2}$ раз, что прекрасно согласуется с полученной формулой.

Энергетический анализ колебаний

В отличие от классических ситуаций (пружинный или математический маятники), где при колебаниях кинетическая энергия переходит в потенциальную и обратно, в данном случае потенциальная энергия (точнее ее изменение) у стержня отсутствует. Перед нами интересный пример автоколебательной системы [2].

В маятнике Жуковского механизм диссипативной силы сухого трения перераспределяет входной поток энергии, часть которого расходуется на кинетическую энергию движения центра масс, а часть превращается в тепло (из-за трения). Причём и кинетическая, и тепловая части изменяются со временем строго по гармоническим законам.

Найдём, как зависит от времени мощность, расходуемая на движение и выделение тепла в этой системе («мощность» силы трения).

Пусть стержень движется по гармоническому закону

$$x(t) = A\sin\omega t =$$

$$= A\sin\frac{2\pi}{T}t = A\sin\left(\sqrt{\frac{\mu g}{L}}\,t\right),$$

тогда его скорость меняется со временем как $v(t) = A\cdot\omega\cdot\cos\omega t$, так что кинетическая энергия стержня равна

$$W_{\text{кин}} = \frac{m\cdot v^2(t)}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2\omega t, \quad (5)$$

а скорость её изменения (производная от энергии по времени)

$$w(t) = \frac{dW_{\text{кин}}}{dt} = -\frac{mA^2\omega^3}{2}\sin 2\omega t. \quad (6)$$

Для расчета «мощности» силы трения, примем, что катки вращаются с постоянной угловой скоростью и их линейная скорость в точках касания со стержнем равна V_0. Тогда «мощность» силы трения

$$q(t) = F_{\text{тр}1}\left(V_0 - v(t)\right) + F_{\text{тр}2}\left(V_0 + v(t)\right) =$$

$$= \mu\cdot N_1\left(V_0 - v(t)\right) + \mu\cdot N_2\left(V_0 + v(t)\right). \quad (7)$$

С учётом (3) получаем после приведения подобных слагаемых, что

$$q(t) = \frac{\mu\, mg}{L}\left(L\cdot V_0 + x\cdot v(t)\right) =$$

$$= \frac{\mu\, mg}{L}L\cdot V_0 + \frac{\mu\, mg}{2L}A^2\omega\cdot\sin 2\omega t =$$

$$= \mu\, mg\cdot V_0 + \frac{m A^2\omega^3}{2}\cdot\sin 2\omega t. \quad (8)$$

И диссипируемая в тепло мощность, и быстрота изменения кинетической энергии действительно изменяются по соответствующим гармоническим законам (в противофазе – когда одна максимальна, тогда другая минимальна) и, как следовало ожидать, их сумма (то есть полная поступающая в систему извне мощность) от времени не зависит:

$$q(t) + w(t) =$$

$$= \mu\, mg\cdot V_0 + \frac{m A^2\omega^3}{2}\cdot\sin 2\omega t -$$

$$-\frac{m A^2\omega^3}{2}\cdot\sin 2\omega t = \mu\, mg\cdot V_0. \quad (9)$$

Оказывается, что для всех автоколебательных систем является весьма характерной особая связь между системой и источником энергии. Сам по себе источник (в нашем случае – сила сухого трения) отдавал бы постоянную энергию, но вследствие того, что работа, которую совершает этот источник, зависит от состояния системы, действие источника энергии может стать периодическим, причём этот период определяется свойствами самой автоколебательной системы. Таким образом, автоколебательная система представляет собой устройство, которое из постоянного источника энергии периодически черпает известные порции энергии, то есть за счёт непериодического источника энергии создает периодический процесс [2].

Другими интересными примерами автоколебаний являются колебания скрипичной струны при движении смычка и воздуха в органной трубе, а также гейзеры, электрический звонок и им подобные объекты [3].

Литература

1. *Чиганов А.С., Якушевич В.И.* К проблеме формирования физико-технической компетентности студентов-физиков педагогических вузов и школьников.– Физическое образование в вузах. Т. 19, № 4. С. 132-146.

2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. 3-е изд.– М.: Наука, 1981. – 918 с.

3. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы.– М.: Наука, 1980. – 520 с.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

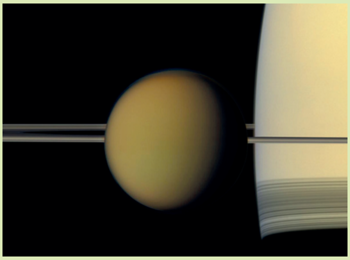
Экзотические проекты

Несмотря на трудности осуществления вполне реальных космических проектов, в научных и околонаучных кругах США часто обсуждаются фантастические в данное время проекты, «рождающиеся» в NASA – американском космическом агентстве. К их числу принадлежит, например, такой.

В исследовательском центре при NASA начато проектирование подводной лодки для запуска в «море Кракена» на Титане(!) – спутнике Сатурна. Цель – установить, могут ли какие либо организмы (хотя бы наипростейшие) обитать в углеводородной среде, которая заполняет «море Кракена» (по сути – озёра).

Предназначаемая для этого лодка должна будет, как считают авторы идея её запуска, за 90 дней пройти 3000-километровый путь в озере, атмосфера над которым состоит в основном из азота при температуре –180°С. Помимо главной цели её «путешествия» предусматривается и ряд других: например изучение особенностей отложений на дне озера, состояния углеводородной жидкости, исследование погоды на Титане и др.

Если только представить себе необходимый для этого чрезвычайно разнообразный комплекс сложнейших работ, то этот проект кажется утопией. Тем не менее, указывается конкретный срок выполнения его разработки: 40-е годы текущего века. Конечно, он – долгосрочный, но всё же «свет в конце туннеля» должен быть зажжён в обозримом будущем. Случится ли это? Посмотрим.



Титан – спутник Сатурна

Есть и краткосрочные, но тоже экзотические – выходящие за рамки современной науки и техники – американские проекты. Например, поиск внеземной жизни на Европе – спутнике Юпитера. Там планируется пробурить океанический лёд толщиной 30 км, тогда как даже на Земле столь глубокое бурение до сих пор не осуществлялось. Запуск космического аппарата к Европе с этой целью назначен на 2020-е годы. Состоится ли он? Скоро узнаем.