

Корнеев Валерий Трофимович

Декан факультета довузовской подготовки
Белгородского государственного технологического
университета им. В.Г. Шухова (БГТУ), доцент
кафедры физики. Из последних публикаций учебные
пособия в соавторстве «Тесты по физике»,
«Политехническая олимпиада», а также статьи
по вопросам образования в различных сборниках.

Центр масс

В данной статье показаны примеры применения понятия центра масс для решения различных задач – от простых до олимпиадных.

1. Что такое центр масс

Понятие центра масс (центра инерции) ввёл в науку Л. Эйлер (1707–1783).

Возьмём две материальные точки с массами m_1 и m_2 . Пусть в выбранной системе координат их координаты x_1 и x_2 (рис. 1). Точку С, которая делит расстояние между материальными точками m_1 и m_2 на отрезки, обратно пропорциональные их массам, назовём центром масс (центром инерции).

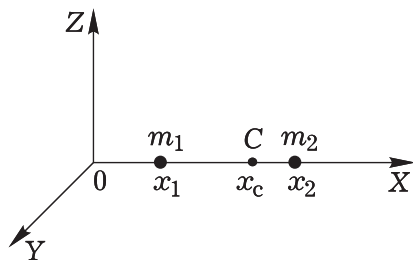


Рис. 1

Найдём координату x_c центра масс:

$$\frac{x_c - x_1}{x_2 - x_c} = \frac{m_2}{m_1}, \quad (1)$$

отсюда:

$$m_1(x_c - x_1) = m_2(x_2 - x_c),$$

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (2)$$

Для множества точек легко обобщить:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m}. \quad (3)$$

Аналогично находятся координаты y_c и z_c центра масс:

$$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{m}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \quad (4)$$

В векторном виде радиус-вектор, указывающий положение центра масс,

$$\vec{r} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}. \quad (5)$$

В последних формулах m – суммарная масса системы точек.

2. Центр масс и центр тяжести

Существует ли различие между понятиями «центр масс» и «центр

тяжести»? Центром тяжести, по определению, называется точка, через

которую проходит равнодействующая всех сил тяжести, действующих на систему. Понятие центра тяжести имеет смысл только для системы, находящейся в однородном поле сил

тяжести. Понятие же центра масс не связано с силовым полем и может применяться для любой механической системы.

3. Центр масс, импульс системы, второй закон Ньютона

Записав выражение (5) для двух разных моментов времени

$$\vec{r}_H = \frac{m_1 \vec{r}_{1H} + m_2 \vec{r}_{2H} + \dots + m_n \vec{r}_{nH}}{m},$$

$$\vec{r}_K = \frac{m_1 \vec{r}_{1K} + m_2 \vec{r}_{2K} + \dots + m_n \vec{r}_{nK}}{m}$$

и вычитая одно из другого, получим

$$\Delta \vec{r} = \frac{m_1 \Delta \vec{r}_1 + m_2 \Delta \vec{r}_2 + \dots + m_n \Delta \vec{r}_n}{m}. \quad (8)$$

Разделив это выражение на промежуток времени, в течение которого произошло перемещение, получим выражение для скорости центра масс:

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m} = \frac{\vec{p}}{m}. \quad (9)$$

Здесь $\vec{p}$ – суммарный импульс системы. Итак, импульс системы равен произведению её массы на скорость центра масс:

$$\vec{p} = m \vec{v}_c. \quad (10)$$

Более подготовленные читатели, вероятно, заметили, что скорость центра масс можно найти, взяв производную от радиус-вектора центра масс.

Если система замкнута, то её суммарный импульс, а следовательно, и скорость центра масс – постоянная величина. Таким образом, в инерциальной системе отсчёта центр масс замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно или покоится, независимо от того, как движутся отдельные тела, составляющие данную систему. Под действием внутренних сил центр масс не изменяет своего движения.

К центру масс системы тел можно применять второй закон Ньютона: в инерциальной системе отсчёта центр масс механической системы движется так же, как двигалась бы материальная точка массой, равной массе системы, под действием суммы всех внешних сил, действующих на эту систему. При решении задач часто бывает полезно рассматривать движение в системе отсчёта, связанной с центром масс системы тел.

4. Задачи на нахождение центра масс

Задача 1. На рис. 2 изображён тонкий однородный стержень длиной $l = 0,6$ м, на концах которого прикреплены маленькие шарики. Стержень невесомый, а массы шариков равны m и $2m$. Определить положение их общего центра масс.

Решение. Найдём положение центра масс относительно середины стержня.

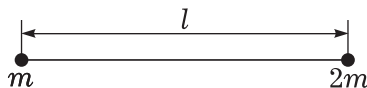


Рис. 2

Координатную ось X проведём вдоль стержня, начало отсчёта совместим с его серединой (рис. 3).

Координаты центров шариков бу-

дуг равны

$$x_1 = -\frac{l}{2}, \quad x_2 = \frac{l}{2}.$$

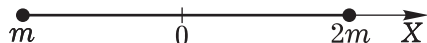


Рис. 3

Координату центра масс найдём по формуле (3):

$$x_c = \frac{-m \frac{l}{2} + 2m \frac{l}{2}}{m + 2m} = \frac{m \frac{l}{2}}{3m} = \frac{l}{6},$$

$$x_c = 0,1 \text{ м.}$$

Ответ: центр масс находится на расстоянии 0,1 м вправо от середины стержня.

Задача 2. В предыдущей задаче заменим маленькие шарики на однородные шары из разных материалов массами $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ и радиусами $R_1 = 0,2 \text{ м}$, $R_2 = 0,3 \text{ м}$, а невесомый стержень — обычным, имеющим массу $2m$ и длину $l = 0,6 \text{ м}$. Найти положение центра масс.

Решение. Определим положение центра масс относительно середины стержня (рис. 4). Так как шары однородные, центры масс находятся в их геометрических центрах. Координатную ось X проведём вдоль стержня, за начало отсчёта выберем его середину. Координата центра масс стержня в этом случае равна нулю, координаты центров шаров будут

$$x_1 = -\left(\frac{l}{2} + R_1\right), \quad x_2 = \frac{l}{2} + R_2.$$

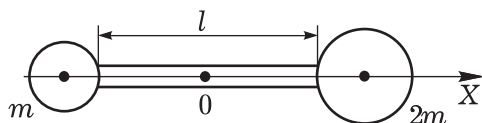


Рис. 4

Координату центра масс системы этих тел определим по формуле (3):

$$x_c = \frac{-m\left(\frac{l}{2} + R_1\right) + 2m \cdot 0 + 2m\left(\frac{l}{2} + R_2\right)}{m + 2m + 2m},$$

$$x_c = \frac{-\left(\frac{l}{2} + R_1\right) + 2\left(\frac{l}{2} + R_2\right)}{5},$$

$$x_c = \frac{-0,5 + 1,2}{5} = 0,14 \text{ м.}$$

Ответ: центр масс находится правее середины стержня на расстоянии 0,14 м.

Задача 3. Два шара одинакового объёма, титановый и алюминиевый, скреплены в точке касания (рис. 5). Где расположен центр масс шаров? Плотность титана 4500 кг/м^3 , алюминия 2700 кг/м^3 . Радиусы шаров равны 1 см.

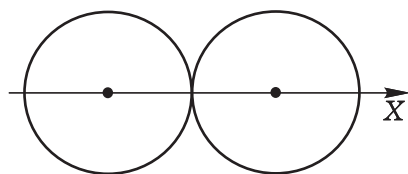


Рис. 5

Решение. Пусть титановый шар находится слева. Ось координат X направим через центры шаров вправо. Начало координат выберем в точке их соединения. Координаты центров масс шаров равны $-R$ и R . Координата центра масс их системы:

$$x_c = \frac{-R\rho_{\text{тит.}}V + R\rho_{\text{ал.}}V}{\rho_{\text{тит.}}V + \rho_{\text{ал.}}V} =$$

$$= R \frac{-\rho_{\text{тит.}} + \rho_{\text{ал.}}}{\rho_{\text{тит.}} + \rho_{\text{ал.}}},$$

$$x_c = 1 \text{ см} \frac{-4500 + 2700}{4500 + 2700} = -0,25 \text{ см.}$$

Ответ: центр масс находится на оси, проходящей через центры шаров, и смещён от точки их соединения на 0,25 см в сторону центра титанового шара.

Задача 4. Найти положение центра масс буквы Г, вырезанной из однородной металлической пластины (рис. 6). Размеры указанных на рисунке её частей таковы: $h = 14$ см, $a = c = 2$ см, $b = 6$ см.

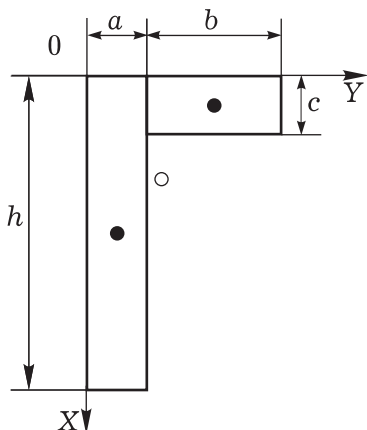


Рис. 6

На примере этой задачи увидим, что центр масс не обязательно находится внутри тела.

Решение. Обозначим массу, соответствующую единице площади пластины, через ρ . Оси координат направим так, как показано на рисунке. Пред-

ставим букву Г состоящей из двух прямоугольных пластин со сторонами, равными h , a и b , c . Эти пластины однородные, центр масс каждой из них совпадает с её геометрическим центром. Воспользуемся формулами (3) и (4) для определения искомого центра масс:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\rho \cdot ha \cdot \frac{h}{2} + \rho \cdot bc \cdot \frac{c}{2}}{\rho \cdot ha + \rho \cdot bc} = \\ &= \frac{ha \cdot \frac{h}{2} + bc \cdot \frac{c}{2}}{ha + bc} = 5,2 \text{ см.} \\ y_c &= \frac{\rho \cdot ha \cdot \frac{a}{2} + \rho \cdot bc \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right)}{\rho \cdot ha + \rho \cdot bc} = \\ &= \frac{ha \cdot \frac{a}{2} + bc \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right)}{ha + bc} = 2,2 \text{ см.} \end{aligned}$$

На рис. 6 чёрными точками показано положение центров масс отдельных прямоугольников, кружочком – положение центра масс всей конструкции.

Ответ: координаты центра масс (5,2 см; 2,2 см).

5. Задачи на применение понятия центра масс

Рассмотрим несколько задач, в которых применение понятия центра масс оказывается удобным.

Задача 5. На рельсах находится платформа длиной L и массой m_1 . На одном из её концов находится человек массой m_2 . Он переходит на другой конец платформы. Пренебрегая массой колёс и трением в их осях, определить, на какое расстояние сдвинется при этом платформа.

Решение. В горизонтальном направлении внешние силы на систему не действуют, поэтому её центр масс не изменит своего положения в этом

направлении. Выберем за начало координат на оси X , например, начальное положение человека (рис.7). Запишем выражения для координаты

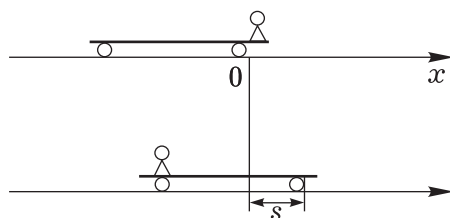


Рис. 7

центра масс системы до начала перемещения и после его окончания. Так

как этот центр масс не смещается вдоль оси X , можем приравнять их:

$$\frac{m_1 \left(-\frac{L}{2} \right) + m_2 \cdot 0}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \left(-\frac{L}{2} + s \right) + m_2 \cdot (-L + s)}{m_1 + m_2}.$$

Отсюда получим: $s = \frac{m_2}{m_1 + m_2} L$.

Ответ: $s = \frac{m_2}{m_1 + m_2} L$.

Замечание 1. Некоторым читателям покажется, что привычнее и проще решить эту задачу, используя закон сохранения импульса. Ниже приводится такое решение.

Вдоль горизонтального направления внешние силы на систему не действуют, поэтому проекция импульса на горизонтальное направление не изменяется (во время перемещения, как и до начала движения, остаётся равной нулю):

$$0 = -m_2(v_2 - v_1) + m_1 v_1,$$

где v_1 — скорость платформы относительно земли, а v_2 — скорость человека относительно платформы. Выразим отсюда скорость платформы относительно земли:

$$v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Время движения найдём, разделив длину платформы на скорость человека относительно неё: $t = \frac{L}{v_2}$. За

это время платформа переместится на расстояние

$$s = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{L}{v_2} = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}.$$

Здесь предполагалось, что человек движется с постоянной скоростью. Можно показать, что при движении с

переменной скоростью ответ не изменится. Но это надо ещё доказать!

Чтобы убедиться в том, что последний способ не всегда удобен, попробуйте решить подобную задачу, в которой две толпы людей, находящихся на противоположных концах платформы, обмениваются местами, причем каждый человек движется со своей произвольной скоростью.

Замечание 2. Вроде бы похожие задачи на 5-ю — с лодками, плотами, воздушными шарами — есть во множестве задачников и учебников. Например: *в озере находится лодка длиной L , массой m_1 . На одном из концов лодки находится человек массой m_2 . Он переходит с одного конца лодки на другой. Пренебрегая сопротивлением воды, определить, на какое расстояние сдвинется лодка.*



Нередко в решении таких задач, не учитывается перемещение массы воды или воздуха. Это неправильно. Не учитывать факта перемещения воды нельзя по той же причине, по какой нельзя не учитывать перемещения человека.

Каждую из нижеследующих задач можно решить, применяя законы Ньютона или закон сохранения импульса. Читатель может попробовать это сделать. Но более короткий, менее громоздкий способ решения – с применением понятия центра масс.

Задача 6. (МФТИ, 2004) Бруски массами m и $3m$ связаны легкой нитью, перекинутой через блок, укрепленный на вершине клина с углом наклона к горизонту α $\left(\cos \alpha = \frac{7}{9}\right)$ и массой $4m$ (рис. 8). Клин находится на гладкой горизонтальной поверхности стола. Брусок массой $3m$ удерживают неподвижно на расстоянии $L = 24$ см от края

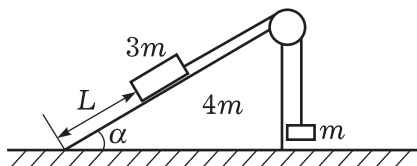


Рис. 8

клина, а затем отпускают. В результате бруски и клин движутся поступательно, их скорости лежат в одной и той же вертикальной плоскости. На какое расстояние сместится клин к моменту удара бруска массой $3m$ о стол? (К этому моменту другой брусок ещё не достигает блока.) Массой блока пренебречь.

Решение. Проводим оси координат, как показано на рис. 9. Поскольку поверхность стола гладкая, в горизонтальном направлении силы на эту систему не действуют, поэтому абсцисса x_c центра масс не изменится. Брусок массой $3m$ сползает к поверхности стола, брусок массой m подтягивается вверх, а клин при этом перемещается вправо. (На рисунке новые положения тел показаны красным цветом.)

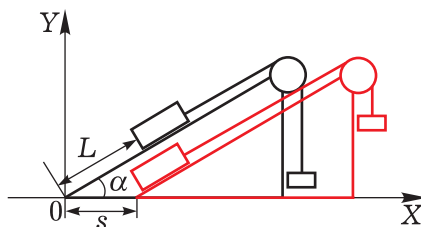


Рис. 9

Пусть координаты центров масс каждого из тел были: у бруска малой массы x_1 , у более массивного бруска x_2 , у клина x_0 . После перемещения новые координаты: у бруска малой массы $x_1 + s$, у бруска более массивного $x_2 + s - L \cos \alpha$, у клина $x_0 + s$.

Координата центра масс системы не изменяется, следовательно:

$$\begin{aligned} \frac{mx_1 + 3mx_2 + 4mx_0}{m + 3m + 4m} &= \\ &= \frac{m(x_1 + s) + 3m(x_2 + s - L \cos \alpha)}{m + 3m + 4m} + \\ &+ \frac{4m(x_0 + s)}{m + 3m + 4m}. \end{aligned}$$

Отсюда получим:

$$s = \frac{3mL \cos \alpha}{8m} = \frac{3}{8}L \cos \alpha = \frac{7}{24}L = 7 \text{ см.}$$

Ответ: 7 см.

Задача 7 (МВТУ им. Н.Э. Баумана) Маленький шарик, имеющий массу $2m$ и заряд q , находится на высоте h над горизонтальной поверхностью земли. На одной вертикали с ним на высоте $2h$ находится шарик такой же массы, имеющий заряд $3q$. Шарик одновременно бросили в одну сторону в горизонтальном направлении с одинаковыми скоростями v . Первый из них коснулся земли на расстоянии L от вертикали бросания. На какой высоте H в этот момент будет второй? Каким будет импульс системы шариков в момент, когда первый под-

летает к земле? Сопротивлением воздуха и влиянием индуцированных на земле зарядов пренебречь.



Решение. Силы электрического взаимодействия в системе являются внутренними и на движение центра масс не влияют. Направим ось Y вертикально вверх и определим начальную и конечную координаты центра масс:

$$y_1 = \frac{2mh + 2m \cdot 2h}{2m + 2m} = 1,5h;$$

$$y_2 = \frac{2m \cdot 0 + 2mH}{2m + 2m} = 0,5H.$$

Время движения найдём, зная горизонтальную составляющую скорости и дальность полета: $t = \frac{L}{v}$. За это время центр масс опускается по вертикали на Δy :

$$\Delta y = y_1 - y_2 = 1,5h - 0,5H = \frac{gt^2}{2}.$$

Отсюда найдём высоту второго шарика к моменту падения первого:

$$H = \frac{1,5h - \frac{gt^2}{2}}{0,5} = 3h - g \frac{L^2}{v^2}.$$

Горизонтальная составляющая скорости центра масс неизменна и равна v , а её вертикальная составляющая к моменту падения первого шарика направлена вниз и равна $v_y = gt = g \frac{L}{v}$. Скорость центра масс в этот момент времени

$$v_c = \sqrt{v^2 + \left(\frac{gL}{v}\right)^2}.$$

Ответ:

$$H = 3h - g \frac{L^2}{v^2}; \quad v_c = \sqrt{v^2 + \left(\frac{gL}{v}\right)^2}.$$

Новости Новости Новости Новости Новости

Самый близкий от Земли пролёт астероида

Согласно расчётам, такой пролёт произойдёт в 2029 г., когда астероид Апофиз-99942 окажется на расстоянии 30–40 тыс. км от Земли. Это будет максимальное за последние 200 лет приближение астероида к нашей планете – на подобном расстоянии от неё обращаются геостационарные спутники. Приближающийся астероид – довольно крупное небесное тело (его поперечник около 270 км), в случае столкновения с которым удар окажется эквивалентен взрыву более 100 тыс. атомных бомб, сброшенных на Хиросиму. Чтобы избежать неблагоприятного для землян развития событий из-за какого-либо случайного и опасного изменения движения астероида, в США был объявлен конкурс на лучший проект по его обезвреживанию. Конкурс выиграла студентка университета, предложившая изменить траекторию Апофиза, используя спутник и полиэфирную плёнку майлар, обладающую высокой отражающей способностью. Если запустить спутник, обращающийся вокруг астероида, чтобы намотать на него эту плёнку, то сильное отражение солнечного излучения создаст импульс, действующий на астероид и достаточный (по расчёту автора идеи) для его «увода» от Земли.