Кузьмичев Сергей Дмитриевич
*Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей физики Московского
физико-технического института (МФТИ),
преподаватель лицея №11 «Физтех», г. Долгопрудный.*

Статья посвящена применению «координатного метода» для решения задач кинематики прямолинейного равномерного движения. Этот универсальный метод чаще всего используется при решении сложных задач кинематики. Лучший способ овладеть «координатным методом» — начать с решения самых простых задач, к каковым можно отнести задачи кинематики прямолинейного равномерного движения. На примерах решения задач такого типа продемонстрированы важные особенности данного метода: выбор системы координат, определение начальных условий, определение проекций скоростей.

«Координатный метод» в задачах кинематики прямолинейного равномерного

I. О решении задач кинематики

При движении тела его координаты изменяются со временем. Если ограничиться рассмотрением движения материальной точки на плоскости, то для описания этого движения достаточно знать зависимости координат x и y от времени t: $x(t)$ и $y(t)$.

Знание этих зависимостей позволяет получить довольно много важной информации о движении точки: положение точки относительно других тел, траекторию ее движения, проекции скорости и ускорения точки на координатные оси.

Метод решения задач кинематики, основанный на таком подходе к описанию движения, называют «координатным методом».

Кинематика прямолинейного равномерного движения — не самый сложный раздел кинематики, и многие задачи из этого раздела могут быть решены методами, которые использовались на уроках математики или физики в 7-8 классах. А вот уже при решении задач кинематики равноускоренного криволинейного движения без этого метода не обойтись.

Практическое применение координатного метода в таких задачах подчас требует довольно объемных математических выкладок, что, при начальном знакомстве с этим методом, отодвигает на «второй план» физическую часть задачи.

Вместе с тем, в задачах кинематики прямолинейного равномерного движения часто удается избежать громоздких математических расчетов при использовании координатного метода. Поэтому вполне естественно начать знакомство с этим методом на примере решения задач кинематики прямолинейного равномерного движения.

II. Немного теории

В примерах решения задач, которые мы разберем ниже, рассматриваются случаи движения тела (материальной точки) вдоль прямой (в этом случае достаточно одной координаты для описания движения тела) или на плоскости (в этом случае для описания движения тела необходимо задавать две координаты).

Допустим, что система координат выбрана, т.е. указаны расположение начала системы координат и положительные направления координатных осей. Пусть в некоторый момент времени (примем его за момент начала отсчета времени $t = 0$, или начальный момент времени) известны начальные координаты тела x_o, y_o, а также $v_{o,x}$, $v_{o,y}$ — проекции скорости тела $\vec{v_o}$ на координатные оси OX и OY. Тогда координаты тела (x, y) на координатные оси OX и OY к любому моменту времени t, прошедшему с начала отсчета, определяются уравнениями $x = x_o + v_{o,x}t$, $y = y_o + v_{o,y}t$.

III. Примеры решения задач

Задача 1. Со станции отправился товарный поезд, скорость которого $v_1 = 54$ км/ч. Спустя время $\tau = 30$ мин с той же станции по тому же направлению вышел экспресс со скоростью $v_2 = 72$ км/ч. Через какое время после выхода товарного поезда и на каком расстоянии от станции экспресс догонит товарный поезд? Движение поездов считать равномерным и прямолинейным.

Рис.1

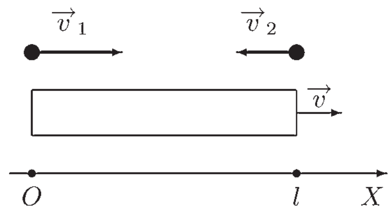

Рис.2

Решение. Примем за начальный момент времени ($t = 0$) момент отправления со станции экспресса. К этому моменту товарный поезд находился в пути τ минут и отъехал от станции на расстояние $l = v_1 \cdot \tau$. На схематическом рисунке к данной задаче (рис.1) точками показаны положения поездов в начальный момент времени. На рисунке также указаны направления векторов их скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

Систему отсчета свяжем с землей, начало координат совместим с точкой, где находится станция отправления (рис.1). За положительное направление оси OX выберем направление движения поездов.

Пусть x_1 и x_2 — координаты товарного поезда и экспресса. Их начальные координаты равны

$$x_{0,1} = l = v_1 \cdot \tau, \quad x_{0,2} = 0,$$

а для проекций скоростей на ось OX имеем

$$v_{0,1,x} = v_1, \quad v_{0,2,x} = v_2.$$

Запишем уравнения для координат поездов x_1 и x_2 в некоторый момент времени t:

$$x_1 = x_{o,1} + v_{o,1,x}t = v_1 \cdot \tau + v_1 t,$$

$$x_2 = x_{o,2} + v_{o,2,x}t = v_2 t.$$

В момент времени $t = t_o$, когда экспресс догонит товарный поезд, будет иметь место равенство $x_1 = x_2$, т.е.

$$v_1 \cdot \tau + v_1 t_o = v_2 t_o,$$

откуда для t_o получаем

$$t_o = \frac{v_1 \cdot \tau}{v_2 - v_1} = 1{,}5 \text{ ч}.$$

Для координаты x^* места , где экспресс догонит товарный поезд, находим

$$x^* = v_2 \cdot t_o = 108 \text{ км}.$$

Задача 2. Колонна мотоциклистов движется по прямому участку шоссе со скоростью $v = 10$ м/с, растянувшись на расстояние $l = 5$ км. Из хвоста и головы колонны одновременно выезжают навстречу друг другу два мотоциклиста со скоростями $v_1 = 20$ м/с и $v_2 = 15$ м/с соответственно. За какое время первый мотоциклист достигнет головы, а второй хвоста колонны?

Решение. На схематическом рисунке к данной задаче (рис.2) колонна изображена прямоугольником, указаны ее длина и направление вектора скорости колонны $\vec{v}$. Расположение мотоциклистов в начальный момент показано точками. Указаны также направления векторов их скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

Систему отсчета свяжем с землей, начало координат совместим с точкой, где находился хвост колонны в момент выезда мотоциклистов (см. рис.2). За положительное направление оси OX выберем направление движения колонны.

Пусть x_1 и x_2 — координаты первого и второго мотоциклистов, а x_3 и x_4 — координаты головы и хвоста колонны. Их начальные координаты равны

$$x_{0,1} = 0, \ \ x_{0,2} = l, \ x_{0,3} = l, \ \ x_{0,4} = 0,$$

а для проекций скоростей на ось OX имеем

$$v_{0,1,x} = v_1, \ \ v_{0,2,x} = -v_2,$$
$$v_{0,3,x} = v, \ \ v_{0,4,x} = v.$$

Обратите внимание на то, что проекция скорости второго мотоциклиста имеет отрицательное значение, так как направление вектора скорости $\vec{v}_2$ противоположно положительному направлению оси OX.

Запишем уравнения для координат мотоциклистов (x_1 и x_2), головы (x_3) и хвоста (x_4) колонны:

$$x_1 = x_{o,1} + v_{o,1,x} t = v_1 t,$$
$$x_2 = x_{o,2} + v_{o,2,x} t = l - v_2 t,$$
$$x_3 = x_{o,3} + v_{o,3,x} t = l + vt,$$
$$x_4 = x_{o,4} + v_{o,4,x} t = vt.$$

В момент времени $t = t_1$, когда второй мотоциклист достигает хвоста колонны, будет иметь место равенство $x_2 = x_4$, т.е.

$$l - v_2 t_1 = v t_1,$$

откуда для t_1 получаем

$$t_1 = \frac{l}{v_2 + v} = 2 \cdot 10^2 \ c.$$

В момент времени $t = t_2$, когда первый мотоциклист достигает головы колонны, будет иметь место равенство $x_1 = x_3$, т.е.

$$v_1 t_2 = l + v t_2,$$

откуда для t_2 получаем

$$t_2 = \frac{l}{v_1 - v} = 5 \cdot 10^2 \ c.$$

Задача 3. Из пунктов А и В одновременно навстречу друг другу начали двигаться два велосипедиста. После того как они повстречались, первый велосипедист через $\tau_1 = 16$ с прибыл в пункт В, а второй, проехав $s = 320$ м за $\tau_2 = 40$ с, прибыл в пункт А. Определите скорости велосипедистов, если их движения были равномерными и прямолинейными.

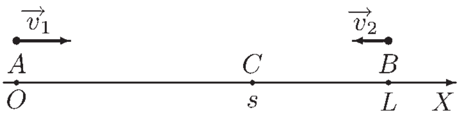

Рис.3

Решение. На схематическом рисунке к данной задаче (рис.3) показано расположение пунктов А и В, указано неизвестное расстояние L между ними. Отмечено место встречи велосипедистов (точка С). Указано также расположение велосипедистов в начальный момент и направления векторов их скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

Систему отсчета свяжем с землей, начало координат совместим с точкой, где находится пункт А. За положительное направление оси OX выберем направление от А к В. Координаты пунктов А и В равны $x_A = 0$ и $x_B = L$. Координата x_c места встречи велосипедистов равна s.

Пусть x_1 и x_2 — координаты первого и второго велосипедистов. Их начальные координаты равны

$$x_{0,1} = 0, \quad x_{0,2} = L,$$

а для проекций скоростей на ось OX имеем

$$v_{0,1,x} = v_1, \quad v_{0,2,x} = -v_2.$$

Запишем уравнения для координат велосипедистов x_1 и x_2:

$$x_1 = x_{o,1} + v_{o,1,x}t = v_1 t,$$

$$x_2 = x_{o,2} + v_{o,2,x}t = L - v_2 t.$$

Пусть встреча велосипедистов произошла в момент времени $t = t_c$. Тогда в этот момент времени имеют место равенства $x_1 = s$ и $x_2 = s$, т.е.

$$v_1 t_c = s, \qquad (1)$$

$$L - v_2 t_c = s. \qquad (2)$$

В момент времени $t = t_1 = t_c + \tau_1$, когда первый велосипедист достигает пункта В, справедливо $x_1 = x_{\text{B}}$, т.е.

$$x_1 = v_1 t_1 = v_1(t_c + \tau_1) = x_B = L. \qquad (3)$$

В момент времени $t = t_2 = t_c + \tau_2$, когда второй велосипедист достигает пункта А, $x_2 = x_{\text{A}}$, т.е.

$$x_2 = L - v_2 t_2 = L - v_2(t_c + \tau_2) = x_A = 0. \qquad (4)$$

Таким образом, мы получили систему из четырех уравнений для четырех неизвестных величин v_1, v_2, L, t_c. Решив систему, находим для скоростей первого и второго велосипедистов

$$v_1 = \frac{s}{\sqrt{\tau_1 \cdot \tau_2}} = \sqrt{\frac{v_2 \cdot s}{\tau_1}} \approx 13 \text{ м/с},$$

$$v_2 = \frac{s}{\tau_2} = 8 \text{ м/с}.$$

Задача 4. Самолет взлетает с аэродрома под углом $\alpha = 30^o$ к горизонту с постоянной скоростью $v = 60$ м/с. На расстоянии $L = 500$ м от места взлета стоит наблюдатель. Траектория полета и наблюдатель находятся в одной вертикальной плоскости. Через какое время самолет будет пролетать точно над наблюдателем? Какой высоты достигнет самолет через $\tau = 20$ c?

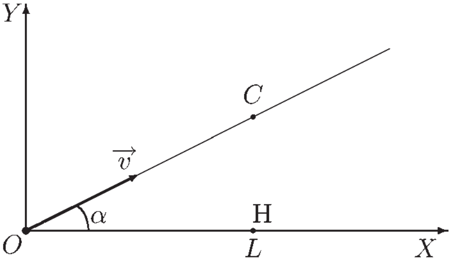

Рис.4

Решение. На схематическом рисунке к данной задаче (рис.4) показаны место взлета (точка О), положение наблюдателя (точка Н), расположение самолета в момент его пролета над наблюдателем (точка С), а также направление вектора скорости самолета $\vec{v}$.

Систему координат свяжем с землей, поместив начало координат в точку взлета. Направим ось OX горизонтально вправо, а ось OY вертикально вверх. Координаты наблюдателя равны $x_н = L$ и $y_н = 0$.

Из рисунка для начальных координат самолета получаем

$$x_0 = 0, \;\; y_0 = 0.$$

а для проекций скорости $\overrightarrow{v}$ самолета на оси OX и OY имеем

$$v_{0,x} = v \cdot cos\alpha, \;\; v_{0,y} = v \cdot sin\alpha.$$

Выразим зависимость координат x и y самолета от времени t:

$$x = x_o + v_{o,x}t = vt \cdot cos\alpha,$$

$$y = y_o + v_{o,y}t = vt \cdot sin\alpha.$$

Пусть в момент $t = t_1$ самолет оказался точно над наблюдателем. Это означает, что их x-координаты равны: $x_c = x_н$, т.е.

$$vt_1 \cdot cos\alpha = L.$$

Из этого уравнения для искомого времени t_1 находим

$$t_1 = \frac{L}{v \cdot cos\alpha} \approx 9{,}6 \; c.$$

Для высоты h, на которой окажется самолет через $\tau = 20$ c, имеем

$$h = v\tau \cdot sin\alpha = 600 \text{ м}.$$

Задача 5. По дорогам, пересекающимся под прямым углом, к перекрестку приближаются две машины. Скорости машин постоянны и равны v_1 и v_2. В тот момент когда первая машина проезжает перекресток, вторая находится на расстоянии L от него. Определите минимальное расстояние между машинами и момент времени, когда оно достигается.

Решение. На рисунке к данной задаче (рис.5) показаны перекресток, расположение первой и второй машин в начальный момент времени, а также направления векторов их скоростей $\overrightarrow{v}_1$ и $\overrightarrow{v}_2$.

Систему отсчета свяжем с землей, начало координат совместим с точкой пересечения дорог. За положительное направление оси OX выберем направление движения первой машины.

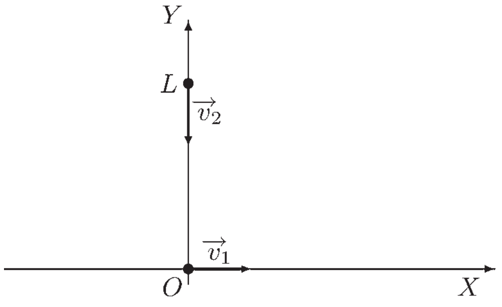

Рис.5

Из рисунка для начальных координат машин получаем

$$x_{0,1} = 0, \;\; x_{0,2} = 0,$$
$$y_{0,1} = 0, \;\; y_{0,2} = L,$$

а для проекций скоростей на оси OX и OY имеем

$$v_{0,1,x} = v_1, \;\; v_{0,2,x} = 0,$$
$$v_{0,1,y} = 0, \;\; v_{0,2,y} = -v_2.$$

Запишем уравнения для координат первой и второй машин

$$x_1 = x_{o,1} + v_{o,1,x}t = v_1 t,$$
$$y_1 = y_{o,1} + v_{o,1,y}t = 0$$
$$x_2 = x_{o,2} + v_{o,2,x}t = 0,$$
$$y_2 = y_{o,2} + v_{o,2,y}t = L - v_2 t.$$

Расстояние S между двумя точками на плоскости с координатами x_1,y_1 и x_2,y_2 определяется выражением

$$S = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

из которого для расстояния между автомобилями в момент времени t получаем

$$S = \sqrt{(v_1 t)^2 + (L - v_2 t)^2}.$$

Для определения минимального расстояния удобно рассмотреть величину S^2

$$S^2 = (v_1 t)^2 + (L - v_2 t)^2 =$$
$$= ({v_1}^2 + {v_2}^2)t^2 - 2Lv_2 t + L^2.$$

Последнее выражение для зависимости S^2 от t есть уравнение параболы, ветви которой направлены вверх ($({v_1}^2 + {v_2}^2) > 0$). Из курса математики известно, что в этом случае минимальное значение величины S^2 (а значит и S) достигается при значении $t = t_{min}$, определяемом выражением

$$t_{min} = \frac{Lv_2}{{v_1}^2 + {v_2}^2}.$$

Окончательно для минимального расстояния S_{min} между автомобилями получаем

$$S_{min} = \frac{Lv_1}{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}}.$$