Юдин Иван Сергеевич
Кандидат физико-математических наук, преподаватель Олимпиадной школы МФТИ.

Конус трения

В статье обсуждается нестандартный подход к решению задач на статику, в которых присутствует сила трения, основанный на использовании понятия конуса трения. Конус трения позволяет рассматривать силу трения и силу нормальной реакции опоры, как составляющие силы полной реакции опоры, уменьшая количество сил в задаче и делая решение более наглядными.

В задачах, где фигурирует сила трения, оказывается, очень полезным является понятие конуса трения. Конус трения часто встречается в учебниках для инженеров и хорошо описан в статье А. Варламова[1], он позволяет многие задачи с трением представить наглядным образом. Для разъяснения конуса трения обратимся к простенькому мысленному эксперименту.

Пусть на шероховатой поверхности лежит брусочек массой m, и мы начинаем потихоньку его сдвигать, сначала малой F_1 (синяя стрелочка). Когда мы говорим, малая сила, то понимаем, что этой силы не хватает, чтобы сдвинуть тело, т.е. развивается сила трения $F_{тр.1}$, равная по модулю тянущей силе, которая не позволяет сдвинуть тело.

Если мы увеличим тянущую силу, например до предельного значения силы трения покоя F_2 (зелёная стрелочка), то будет развиваться сила трения $F_{тр.2}$ противоположно направленная, которая будет уравновешивать тянущую силу. В случае дальнейшего увеличения силы F_3 (красная стрелочка) сила трения расти не будет, и тогда сила трения $F_{тр.3}$ будет такой же, как и во втором случае. Нормальная сила реак-

[1] *А. Варламова (Конус трения Варламов А., Школа в «Кванте»: Физика 9-11, Выпуск. – М.: Бюро Квантум, 1995. – 128 с.*

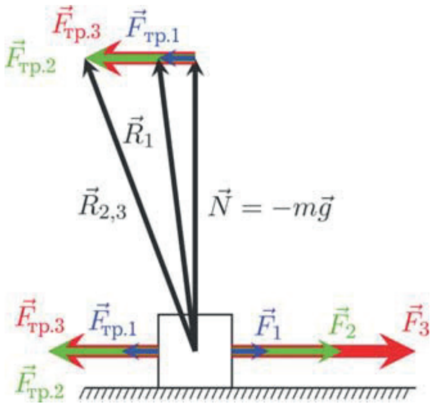

Рис. 1. Экспериментр

ции опоры $\vec{N}$ будет уравновешивать силу тяжести $m\vec{g}$. Далее, рассмотрим вектор равный сумме нормальной силы реакции опоры и который назовем *полная сила реакции опоры* или просто *сила реакции*. Построим полную силу реакции опоры во всех трех случаях. Для этого построим векторы силы трения от конца вектора нормальной силы реакции опоры $\vec{N}$. Очевидно, что конец вектора $\vec{R}$ может лежать на отрезке от конца вектора $\vec{N}$, до конца вектора $\vec{R}_{2,3}$. Причем по закону Кулона-Амонтона $F_{тр.3}=\mu N$, где μ коэффициент трения, который не зависит от нормальной силы реакции опоры, а является характеристикой взаимодействия трущихся поверхностей.

Далее можно тянуть тело в противоположном направлении, тогда силы трения тоже развернуться на противоположное направление. Если потянем на нас, то силы трения будут направлены в рисунок, т.е. если мы будет варьировать направление тянущей силы и ее величину, то конец вектора $\vec{R}_m$ опишет круг в горизонтальной плоскости. Причем, если конец вектора лежит внутри круга, то это соответствует силе трения покоя, а если на границе, то это соответствует предельной силе трения покоя или силе трения скольжения.

В случае изменения массы m' брусочка, изменится нормальная сила реакции опоры, тогда изменится высота круга и его диаметр, в которой может находиться конец вектора реакции опоры $\vec{R}_{m'}$. Причем, окажется, что всевозможные границы таких кругов будут составлять конус, с углом при вершине $\operatorname{tg}\varphi=\mu$ к нормали поверхности соприкосновения. Этот конус и называется *«конусом трения»*.

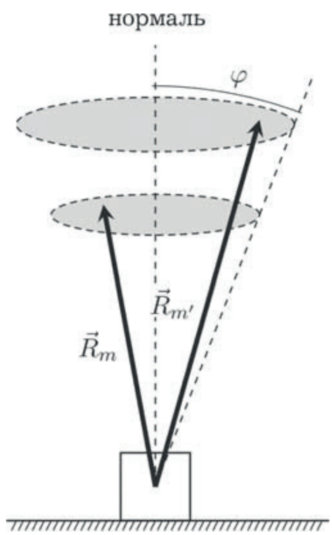

Рис. 2. Конус-трения

В общем случае, прижимная сила может зависеть не только от массы, но и от ускорений тела, от приложенных сил, поэтому обращаем внимание, что различные массы бруска мы использовали в нашем мысленном эксперименте, для удобства, и к рассматриваемому явлению они отношения не имеют.

Таким образом: две поверхности взаимодействуют так, что сила реакции опоры лежит внутри конуса трения, угол которого является характеристикой трущихся поверхностей, и тангенс этого угла равен коэффициенту трения. Если сила реакции лежит внутри конуса, то поверхности не скользят и можно говорить о силе реакции покоя, если на границе конуса, то реализуется либо предельный случай покоя, либо поверхности проскальзывают.

В выше представленном абзаце, перечислены основные свойства конуса трения, которые мы будет рассматривать в приложении решения задач.

В этой статье, мы рассмотрим решение задач на тему статика, содержащих в себе силу трения.

Конус трения в статике

При равновесии тела сумма сил и сумма моментов сил должны быть равны нулю, поэтому стандартный способ решения задач на статику – это выписать второй закон Ньютона в проекциях на оси, выписать правило моментов и связь между силами трения и силами реакции опоры. Обратим внимание, что если сумма сил равна нулю, то с одной стороны точку, относительно которой записывается правило моментов (ее называются *полюсом* или *началом*) можно выбирать произвольным образом, а с другой стороны записывание правила моментов относительно других полюсов не будет давать дополнительной информации. Поэтому в задачах на статику очень важно уметь выбирать подходящий полюс.

Напомним, что такое момент силы относительно полюса. Во-первых, прямая параллельная силе и проведенная через точку приложения силы называется *линией действия силы* (l). Во-вторых, длина перпендикуляра опущенного из полюса на линию действия силы называется *плечо силы* (h). В итоге, произведение плеча силы на модуль силы, будет равен модулю момента силы. Для записи правила моментов, надо положить одно из направлений вращения за положительное направление, и писать момент силы со знаком «+», если сила вращает в том же направлении, и со знаком «−» если в противоположном. К примеру, если на рисунке выбрать за положительное направление «по часовой стрелке», то момент силы F_1 запишется как $+F_1h_1$, момент силы F_2 будет равен $-F_2h_2$, а момент силы F_3 будет равен нулю, так как линия дей-

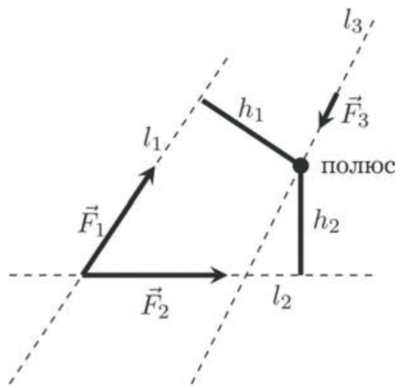

Рис. 3. К определению момента силы.

ствия третей силы l_3 проходит через полюс, значит плечо будет равно нулю. Третий случай самый важный в подходе выбора полюса: полюс надо выбирать так, чтобы наибольшее количество сил проходило через полюс. В этот момент и «выходит на сцену» конус трения. В случае отдельного рассмотрения нормальной силы реакции опоры и силы трения, у нас имеется две силы, линии действия которых пересекаются в точке приложения, а это значит, что если мы возьмем какую-нибудь другую точку за полюс, то полюс не обнулит момент одной из них. В случае рассмотрения реакции опоры у нас имеется одна сила, направление которой определяется только свойством поверхностей, т.е. в предельном случае лежит на поверхности конуса трения. Для примера рассмотрим решение знаменитой задачи на статику, лестница у стены:

Пример 1. У гладкой стены стоит однородная лестница под углом α к вертикали. При каком коэффициенте трения между лестницей и полом лестница будет стоять в равновесии?

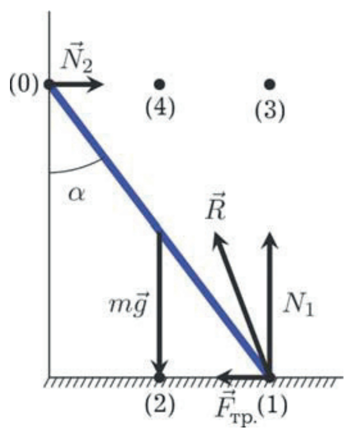

Рис. 4. К примеру 1.

Решение. Решим сначала стандартным способом. Нарисуем рисунок и расставим силы. Сразу приступим к нахождению оптимального полюса. Для начала отметим точки попарного пересечения сил {1,..4}. Очевидно, какую точку бы мы не взяли обнуляется только момент двух сил, а моменты еще двух остаются ненулевыми, поэтому в таком подходе необходимо записать второй закон Ньютона по осям. Самая оптимальная точка, как покажет решение с конусом трения, это точка 4 – точка пересечения силы тяжести и силы реакции опоры со стеной, но как показывает опыт, школьники любят выбирать либо точку 1, либо точку 2. Для примера выберем точку 2. Тогда запишем второй закон Ньютона на горизонтальную и вертикальную оси:

$$Ox: N_2 - F_{\text{тр.}} = 0$$

$$Oy: -mg + N_1 = 0$$

Правило моментов, относительно полюса в точке 2, положительное направление выберем по часовой стрелке:

$$+N_2 l\cos\alpha - N_1 \frac{1}{2}\sin\alpha = 0$$

Связь между силой трения и нормальной силой реакции опоры:

$$F_{\text{тр.}} = \mu N_1$$

Подставив все в правило моментов, получаем ответ:

$$\mu = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$$

Теперь решим с помощью конуса трения. Для этого рассмотрим точку 4. Моменты сил реакции опоры стены и силы тяжести обнуляются, остается только сила реакции опоры пола, но она лежит в конусе трения или на его границе. Как соотносится точка 4 и конус трения? Если точка 4 лежит вне конуса, то линия действия силы R не может проходить через точку 4, а значит ее момент не будет равен нулю и правило моментов не будет выполняться. Если точка 4 лежит внутри конуса трения, то сила реакции опоры проходит через точку 4, но в этом случае, у нас реализуется не предельный случай силы реакции покоя, значит точка 4 должна лежать на границе конуса трения. Таким образом

$$\mu = \operatorname{tg}\varphi = \frac{l_{43}}{l_{13}} = \frac{l_{03}}{2l_{13}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$$

Как видно из решения метод конуса трения помог решить задачу с минимальным количеством математических выкладок. Важно отметить, что при решение задачи становится более наглядным, геометрически, что позволяет проводить анализ с точки зрения физики. Рассмотрим ту же задачу, усложнив условие.

Пример 2. У стены стоит однородная лестница под углом α к вертикали. Коэффициент трения между стеной и лестницей, между полом и лестницей, одинаков и равен μ. При каком коэффициенте трения μ лестница будет стоять в равновесии?

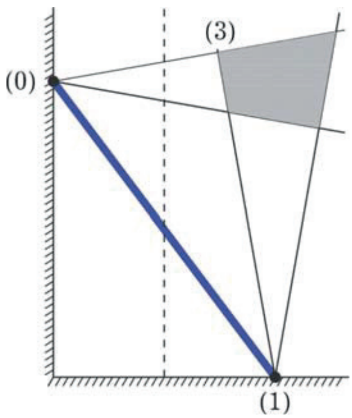

Рис. 5. К примеру 2.1

Для анализа задачи построим конусы трения для каждой из точек соприкосновения лестницы (0) и (1) заведомо с малыми коэффициентами трения. Найдем область пересечения конусов (на рисунке обозначено серой областью). Как уже говорилось выше сила реакции опоры лежит внутри конуса трения, это означает что линии действия сил реакции опоры лестницы будет лежать в области пересечения конусов. Таким образом в этой области существует такая точка, если в которой выбрать полюс, то он обнулит момент сил реакций.

При таком выборе полюса необходимо, чтобы линия действия оставшейся силы – силы тяжести (обозначена на рисунке пунктирной линией) пересекала эту область. Наилучший претендент на полюс точка (3).

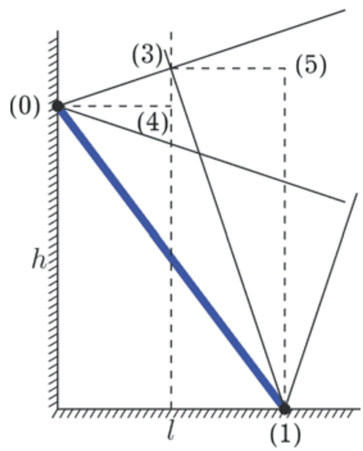

Рис. 6. К примеру 2.2

Если мы будем расширять область пересечения конусов, т.е. увеличивать угол, т.е. увеличивать угол, и таким образом увеличивать коэффициенты трения, то в какой-то момент линия действия силы тяжести будет пересекать область пересечения конусов (см второй рисунок к примеру). Для нахождения коэффициента трения обозначим высоту точки (0) за h, расстояние от угла до точки (1) l, то можно найти высоту точки (3) через высоту точки (0) и треугольник (034). Заметим, что угол (0) в этом треугольнике – угол конуса трения, тогда получаем:

$$h_3 = h + \mu \frac{1}{2}$$

Ту же самую высоту можно получить из треугольника (135),

$$h_3 = \frac{1}{2\mu}$$

Приравняв эти равенства, поделим на $l/2\,\mu$ получим

$$\frac{2h}{l}\mu + \mu^2 = 1 \rightarrow \mu^2 + \frac{2h}{l}\mu - 1 = 0$$

Приняв во внимание, что $\mathrm{tg}\alpha = l/h$, и выбрав положительный корень квадратного уравнения, находим предельный случай, когда достигается равновесие:

$$\mu_0 = -\mathrm{tg}\alpha + \sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha + 1}$$

Соответственно, ответ

$$\mu \geq \sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha + 1} - \mathrm{tg}\alpha.$$

Одним из преимуществ данного метода является наглядность, попробуем эту наглядность использовать для решения усложненного примера:

Пример 3. У стены стоит однородная лестница под углом α к вертикали. Коэффициент трения между стеной и лестницей, между полом и лестницей, одинаков и равен $\mu = \mathrm{tg}\alpha / 2$. Найдите минимальную и максимальную возможную силу трения лестницы о пол?

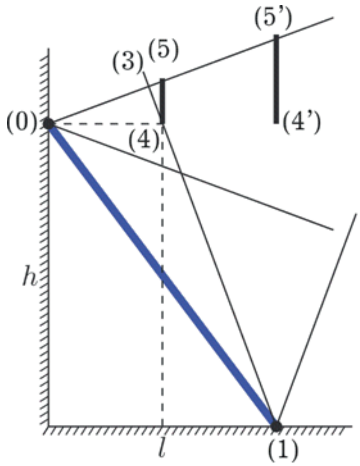

Рис. 7. К примеру 3

Если заметить, в третьем примере в качестве коэффициента трения дали ответ из первого примера, но сила трения дана как между стеной и лестницей, так и между полом и лестницей. Построим конус трения для этого случая, очевидно (из первого примера), что граница конуса трения точки (1) пройдет через точку (4) из предыдущих примеров. Но тогда получается, что линия действия силы тяжести пересекает область пересечения конусов терния не по точке, а по отрезку (45). Это означает, что полюсов, обнуляющих суммарный момент сил, много. Т.е. лестница в этом случае может стоять при различных комбинациях силы трения, так что линии сил реакции проходят через одну точку на отрезке (45). В данном случае реализуется статическая неопределенность, которую невозможно разрешить, не задав дополнительных условий. Аналогичный случай получится, если рассмотреть горизонтально висящую на 3х нитях палочку. Но, вернемся к нашему примеру. Теперь из всевозможных вариантов для силы реакции в точке (4) надо выбрать случай наименьшей силы трения и наибольшей. Для этого будем выбирать полюс таким образом, чтобы момент силы тяжести оставался одинаковым, а все остальные силы кроме силы трения в точке (4) обнулили свой момент. Для этого проведем отрезок (4'5'), который лежит на вертикали, проходящей через точку (1), а концы лежат на продолжении прямых (04) и (05) соответственно. Если реализуется случай, когда сила реакции в точке (0) смотрит в точку (4) и (4') соответственно, то берем точку (4') за полюс. В этом случае, момент силы тяжести будет равен $-mg\frac{1}{2}$ (положительное вращение по часовой стрелке), а силы трения $F_{\max}h$. Получаем:

$$-mg\frac{l}{2}+F_{\max}h=0\rightarrow$$

$$\rightarrow F_{\max}=\frac{l/h}{2}mg=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}mg=\mu mg$$

Это случай из первого примера. Если реализуется случай, когда сила реакции в точке (0) смотрит в точку (5) и (5') соответственно, то берем точку (5') за полюс. В этом случае, момент силы тяжести будет равен $-mg\frac{l}{2}$ (положительное вращение по часовой стрелке), а силы трения $F_{\min}(h+l\operatorname{tg}\varphi)$, где $\operatorname{tg}\varphi=\mu$. Получаем:

$$-mg\frac{l}{2}+F_{\min}(h+l\operatorname{tg}\varphi)=0$$

Делим на h, $\operatorname{tg}\varphi$ заменяем на коэффициент трения из условия, получаем

$$F_{\min}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2+\operatorname{tg}^2\alpha}mg$$

Рассмотрим еще одну интересную задачу.

Пример 4. У шероховатом полу стоит однородный холодильник массы m шириной l. Холодильник соприкасается с полом только задними ножками на колесиках без трения, и передними ножками, коэффициент трения о пол для которых равен μ. На высоте h от пола шкаф толкают сначала в сторону колесиков, а потом с противоположной стороны. Найдите силу необходимую, чтобы

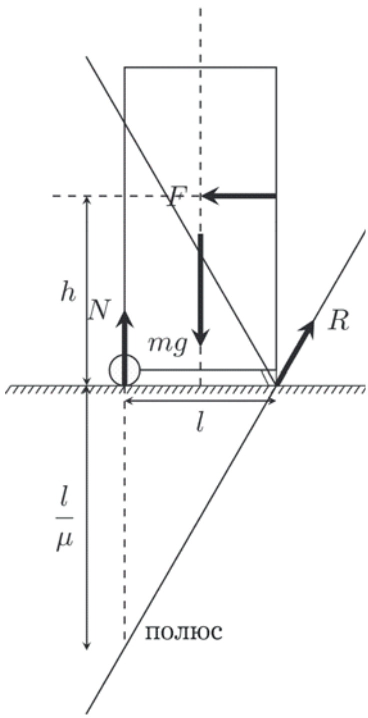

Рис. 8. К примеру 4.1

сдвинуть шкаф в первом и во втором случае. Найдите условие опрокидывания шкафа.

Рассмотрим, когда толкают на колесики. Расставим силы. Конус трения можно построить только у ножки. Очевидно, что если мы толкаем влево, то сила реакции направлена по правой границе конуса трения.

В нашей задаче дана сила тяжести, и надо найти силу, с которой необходимо толкать, поэтому необходимо выбрать полюс, обнуляющий все остальные силы, т.е. силу реакции в ножке и колесике. Нарисуем линии их действия и выберем полюс в точке пересечения. Тогда момент силы тяжести $mg\frac{l}{2}$ (положительное вращение по часовой стрелке), а силы толкания $-F\left(h+\frac{l}{\mu}\right)$, тогда из правила моментов получаем ответ:

$$F = \frac{\mu l}{2(\mu h + l)} mg$$

Перейдем к рассмотрению, когда толкают в направлении ножек, сила реакции действующая на ножку будет лежать на другой границе конуса трения. В этом случае, изменится полюс и плечо толкающей силы, а ее момент будет равен $-F\left(\frac{l}{\mu}-h\right)$, тогда правило моментов дает ответ:

$$F = \frac{\mu l}{2(l - \mu h)} mg$$

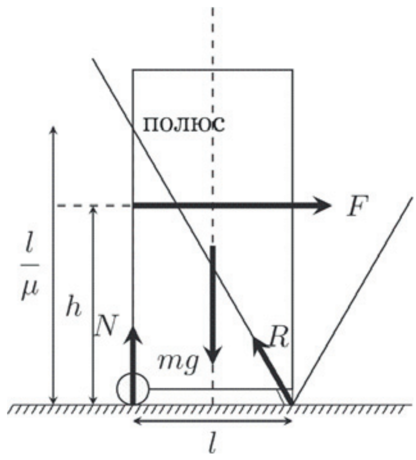

Рис. 9. К примеру 4.2

Ещё более интересным является вопрос, в каком случае перевернется холодильник. Для этого необходимо, чтобы обнулился N. Чтобы ответить на этот вопрос надо выбрать такой полюс, который обнулит момент сил F и R, т.е. на пересечении линии действия этих сил, так как мы предполагаем, что N – будет равен нулю, но в этом случае, полюс должен обнулить момент силы тяжести, т.е. линия действия силы тяжести должна проходить через этот полюс, т.е.

$$\frac{l}{2} = \mu h \to \mu = \frac{l}{2h}.$$

В рассматриваемых задачах, мы продемонстрировали, что понятие конуса трения делает задачи более геометрическими и наглядными. Основная сложность сводится к правильному выбору полюса, относительно которого необходимо записывать правила моментов.