



**Прохоров Вадим Константинович,**  
*учитель физики ГБОУ «Школа № 1526 на Покровской»,  
 г. Москва.*

## Конденсаторы в цепях постоянного тока. Часть 1

Опыт показывает, что задачи, связанные с поведением конденсаторов, особенно в электрических цепях, вызывают трудности у учащихся из-за непонимания процессов, которые при этом происходят. В статье разбираются различные ситуации, связанные с этой темой.

Статья адресована преподавателям физики и учащимся, углублённо изучающим физику, может быть полезна при проведении факультативных или кружковых занятий по физике, при подготовке к экзаменам и олимпиадам.

### Введение

Два изолированных проводника, заряженные равными по модулю, но противоположными по знаку зарядами, представляют собой конденсатор. Силовые линии электрического поля в таком случае начинаются на одном проводнике и заканчиваются на другом.

Основное предназначение конденсатора – накапливать, сохранять и в нужный момент отдавать электрическую энергию в электрическую цепь. Когда конденсатор подключают к источнику тока, начинается зарядка конденсатора – т. е. процесс пере-

распределения зарядов – перетекание положительного заряда с одной пластины на другую (см. задачу 1). Напряжение на конденсаторе по окончании этого процесса определяется напряжением источника, а величина заряда, который перетёк с одной пластины на другую, пропорциональна напряжению, коэффициентом пропорциональности является ёмкость конденсатора:

$$q = CU.$$

Энергия, накопленная конденсатором, – это потенциальная энергия

взаимодействия зарядов одной пластины с зарядами на другой, она равна:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Если конденсатор плоский, то его ёмкость определяется формулой

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

Здесь  $S$  – площадь пластин конденсатора,  $d$  – расстояние между ними. Причём плоским конденсатор считается при условии, что расстояние между пластинами мало по сравнению с размерами пластин:  $d \ll \sqrt{S}$ . При выполнении этого условия электрическое поле в конденсаторе будет однородным, и его напряжённость равна

$$E = \frac{U}{d}.$$

Мы здесь будем рассматривать ситуации, где конденсатор является частью электрической цепи, содержащей источники тока, резисторы, лампочки и др.

Можно выделить следующие типы задач, в которых рассматриваются электрические цепи с конденсаторами:

- Задачи, где идёт процесс зарядки или разрядки конденсаторов. При этом заряд и напряжение на них изменяются, в цепи текут токи, также изменяющиеся со временем. Такой процесс является процессом установления равновесия, или *переходным процессом*.

- Задачи, в которых *равновесное состояние* уже наступило, заряды и напряжения конденсаторов постоянны и требуется определить какие-либо параметры цепи.

- Задачи, в которых каким-либо образом у конденсатора, включённого в цепь, *изменяется ёмкость* и,

как следствие, изменяется его заряд, возникают токи и т. д.

Для решения задач нам потребуется использование фундаментальных законов физики. Это закон сохранения энергии, закон сохранения заряда, закон Ома и другие.

В самом общем случае закон сохранения энергии – это первый закон термодинамики, который мы запишем в следующем виде:

$$\Delta U = A_{ext} + Q \quad (1)$$

где  $\Delta U$  – изменение энергии системы,  $A_{ext}$  – работа, совершаемая над системой внешними силами,  $Q$  – тепло, сообщаемое или отнимаемое от системы. Если тепло сообщается системе, то  $Q > 0$ , если выделяется, то  $Q < 0$ . В случае механических явлений теплота выделяется за счёт диссипативных сил трения (работа которых отрицательна), а  $\Delta U$  – изменение полной механической энергии, которое обозначим  $\Delta W$ . Закон сохранения для механических явлений имеет вид

$$\Delta W = A_{ext} + A_{дис},$$

или

$$\Delta W = A_{ext} + Q, \quad (2)$$

где  $A_{дис}$  – работа внутренних диссипативных сил (равная выделившемуся теплу).

В электрических цепях внешними являются силы, действующие внутри источника, т. е. так называемые сторонние силы – силы не электростатического происхождения, переносящие заряды внутри источника против действия электростатического поля. Работа этих сил (которую мы будем называть работой источника  $A_{ист}$ ) равна

$$A_{ext} = A_{ист} = \varepsilon \Delta q, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  – ЭДС источника,  $\Delta q$  – величина заряда, перемещённого сторонними силами внутри источника.

Тепло в электрических цепях выделяется в проводниках за счёт взаимодействия переносчиков зарядов с кристаллической решёткой. Часть энергии движущихся зарядов передаётся кристаллической решётке, вследствие чего она нагревается.

Рассмотрим движение положительного электрического заряда в цепи, где течёт постоянный ток от точки с потенциалом  $\varphi_1$  к точке с потенциалом  $\varphi_2$  под действием электрического поля (см. рис. 1).

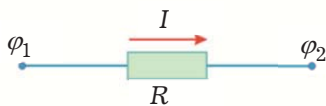


Рис. 1

Потенциальная энергия заряда  $\Delta q$  в точках 1 и 2 равна соответственно

$$W_{\text{пот}1} = \Delta q\varphi_1, W_{\text{пот}2} = \Delta q\varphi_2.$$

Внешние силы на данном участке отсутствуют, а т.к. ток постоянный, то кинетическая энергия в точках 1 и 2 одинаковая. Формула (2) запишется следующим образом:

$$\Delta q(\varphi_2 - \varphi_1) = Q.$$

Часть энергии заряда переходит в тепло. Здесь  $Q$  получится отрицательным, так как оно выделяется. Величину тепла можно записать также в виде:

$$Q = IU \Delta t.$$

Здесь учтено, что  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ , а  $\Delta q = I\Delta t$ . Учитывая, что согласно закону Ома для участка цепи

$$I = \frac{U}{R},$$

получаем

$$Q = \frac{U^2}{R} \Delta t = I^2 R \Delta t.$$

Последняя формула выражает закон Джоуля-Ленца.

Рассмотрим теперь участок цепи, содержащий источник ЭДС (см. рис. 2).

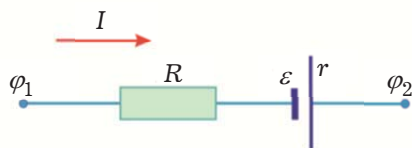


Рис. 2

Для положительного заряда  $\Delta q$ , который движется от точки с потенциалом 1 к точке с потенциалом 2, изменение энергии равно

$$\Delta W = \Delta q(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Количество выделившейся на этом участке теплоты определяется законом Джоуля-Ленца:

$$Q = -I^2(R+r)\Delta t = -I\Delta q(R+r).$$

Здесь  $R+r$  – полное сопротивление участка, состоящее из сопротивления резистора и внутреннего сопротивления источника; знак «минус» соответствует тому, что теплота выделяется. Работа внешних сил – это работа источника, которая в данном случае положительна, т.к. внутри источника положительный заряд движется по направлению действия сторонних сил:

$$A_{\text{ист}} = \Delta q\varepsilon.$$

Подставляя  $\Delta W$ ,  $Q$  и  $A_{\text{ист}}$  в (2), после небольшого преобразования получаем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon = I(R+r).$$

Мы получили закон Ома для неоднородного участка цепи, т.е. для участка, содержащего ЭДС. Если источник включён так, что ток внутри него течёт от положительной клеммы к отрицательной, то сторонние силы совершают отрицательную работу и ЭДС в последнем выражении берётся со знаком «минус».

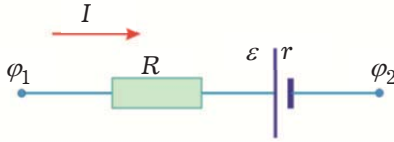


Рис. 3

Таким образом, в общем случае закон Ома для неоднородного участка цепи имеет вид:

$$\varphi_1 - \varphi_2 \pm \varepsilon = I(R + r). \quad (4)$$

При этом выполняется следующее *правило знаков*: знак «плюс» ставится для случая, изображённого на рисунке 2, знак «минус» – для случая на рисунке 3.

Заметим, что из закона Ома для неоднородного участка цепи следует и закон Ома для полной цепи. Если соединить точки 1 и 2, то получится замкнутая цепь (рис. 4).

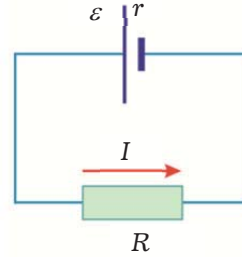


Рис. 4

В этом случае  $\varphi_1 = \varphi_2$  и из уравнения (4) следует:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \quad (5)$$

Далее рассмотрим решение конкретных задач. Приводятся авторские задачи, а также задачи из вступительных экзаменов в МФТИ, МИФИ, МГУ, Единого государственного экзамена, а также предлагавшиеся на Всероссийской олимпиаде по физике и олимпиаде «Физтех».

## Примеры решения задач

**Задача 1.** В схеме, изображённой на рис. 5, все элементы идеальные (внутреннее сопротивление источника равно нулю, сопротивление конденсатора бесконечно). В момент времени  $t=0$  ключ замыкают. Определить:

1. Напряжение, до которого зарядится конденсатор.

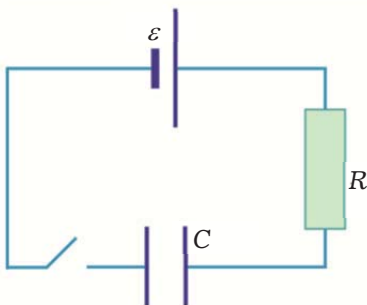


Рис. 5

2. Максимальное значение силы тока в процессе зарядки.

3. Работу, совершённую источником в процессе зарядки конденсатора.

4. Величину количества теплоты, выделившейся в цепи к моменту полной зарядки конденсатора.

**Решение.** Сразу после замыкания ключа в цепи начинается движение зарядов так, как показано на рис. 6. Источник тока не создаёт заряды, а перекачивает положительные заряды с левой пластины конденсатора на правую (рис. 6). Таким образом, ток течёт от левой пластины конденсатора через источник к правой пластине.

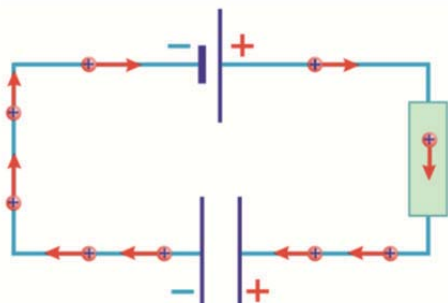


Рис. 6

Применим к этой неоднородной цепи закон Ома:

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon = I. \quad (1)$$

Здесь использовано правило знаков: ток проходит через источник от отрицательной клеммы к положительной, следовательно, ЭДС берётся со знаком «плюс». Ток течёт от левой пластины через источник к правой (внутри конденсатора ток течь не может), поэтому потенциал левой пластины равен  $\varphi_1$ , а потенциал правой пластины  $\varphi_2$ , причем,  $\varphi_1 < \varphi_2$ . Обозначим  $\varphi_1 - \varphi_2 = -U$  (напряжение на обкладках конденсатора должно быть положительной величиной). Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$-U(t) + \varepsilon = I(t)R, \quad (2)$$

или

$$I(t) = \frac{\varepsilon - U(t)}{R}. \quad (3)$$

Уравнение (3) выполняется в любой момент времени, начиная с момента замыкания ключа. В начальный момент  $t = 0$ , конденсатор ещё не заряжен и напряжение равно нулю:  $U(t) = 0$ , поэтому в этот момент в цепи течёт максимальный ток:

$$I_{\max} = \frac{\varepsilon}{R}. \quad (4)$$

То есть в начальный момент времени ток в цепи течёт такой, какой был бы в цепи в отсутствие конденсатора.

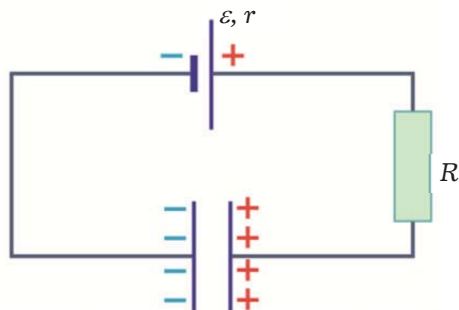


Рис. 7

Надо понимать, что внутри конденсатора, то есть между пластинами, движения зарядов нет, заряды перемещаются в проводах, соединяющих конденсатор с источником.

Сразу после замыкания ключа конденсатор не успевает зарядиться, напряжение на нём равно нулю, и, таким образом, в момент времени сразу после замыкания ключа наша схема эквивалентна схеме, на которой источник замкнут на резистор, а конденсатор отсутствует. Далее конденсатор заряжается, ток в цепи уменьшается и прекращается в момент, когда напряжение на конденсаторе равно ЭДС источника (рис. 7):

$$U_{\max} = \varepsilon.$$

Это максимальное напряжение, до которого зарядится конденсатор от этого источника тока.

Заметим, что точные зависимости силы тока и напряжения от времени могут быть получены только средствами высшей математики и имеют вид

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}},$$

$$U(t) = \varepsilon \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

На рис. 8 и 9 представлены графики зависимости силы тока и напряжения от времени.

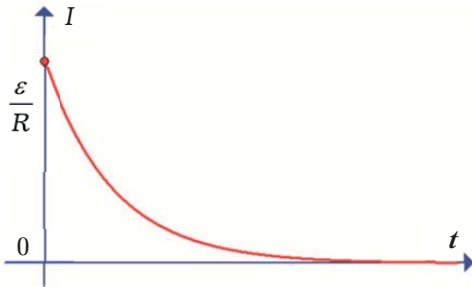


Рис. 8. Зависимость от времени силы тока, текущего в цепи в процессе зарядки конденсатора

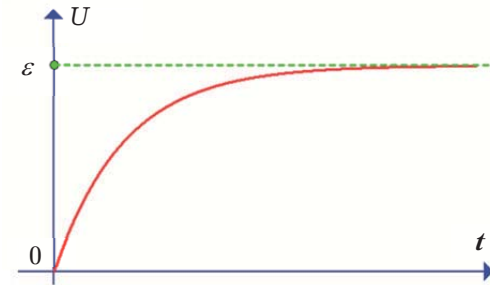


Рис. 9. Зависимость от времени напряжения на конденсаторе

За всё время зарядки конденсатора по цепи прошёл заряд  $q_{\max}$ . Этот заряд был «прокачен» по цепи источником тока, который совершил работу:

$$A_{\text{ист}} = q_{\max} \varepsilon = C\varepsilon^2.$$

По закону сохранения энергии:

$$\Delta W_{\text{эл}} = A_{\text{ист}} + Q,$$

где  $\Delta W_{\text{эл}}$  – изменение энергии электрического поля конденсатора, равное

$$\Delta W_{\text{эл}} = \frac{C\varepsilon^2}{2}.$$

Находим количество тепла:

$$Q = \Delta W_{\text{эл}} - A_{\text{ист}} = \frac{C\varepsilon^2}{2} - C\varepsilon^2 = -\frac{C\varepsilon^2}{2}.$$

Теплота выделилась, поэтому при расчёте получается со знаком «минус»; в ответ записываем величину количества теплоты.

Таким образом, независимо от сопротивления цепи, работа источника делится ровно пополам между приращением энергии конденсатора и количеством выделившегося тепла.

**Ответ.**

$$U_{\max} = \varepsilon, \quad I_{\max} = \frac{\varepsilon}{R}, \quad A_{\text{ист}} = C\varepsilon^2,$$

$$Q = \frac{C\varepsilon^2}{2}.$$

**Задача 2.** В схеме, изображённой на рис. 10, все элементы идеальные.

В момент времени  $t = 0$  ключ замыкают. Сопротивление резистора  $R = 100$  Ом. Показания вольтметра в различные моменты времени представлены в таблице:

$t, \text{с}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$U, \text{В}$	0	7,59	10,38	11,4	11,8	11,92	11,97	11,99	12	12

Определить:

- 1) ток через резистор в момент времени  $t = 0$ ;
- 2) ток через резистор в момент времени  $t = 0,4$  с;
- 3) ЭДС источника.

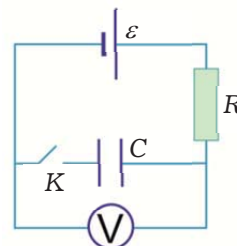


Рис. 10

**Решение.** Из таблицы видно, что значение напряжения на конденсаторе растёт и с момента времени  $t = 0,8$  с становится постоянным. Это соответствует графику  $U=U(t)$  на рисунке 9. Следовательно, ЭДС источника равна 12 В.

Ток в момент  $t=0$  (когда конденсатор не заряжен) определяется формулой (4) из задачи 1:

$$I_{\max} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{12 \text{ В}}{100 \text{ Ом}} = 0,12 \text{ А.}$$

Ток в любой последующий момент определяется формулой (3) из задачи 1:

$$I(t) = \frac{\varepsilon - U(t)}{R}.$$

В момент  $t=0,4$  с сила тока равна

$$I = \frac{12 - 11,8}{100} = 0,002 \text{ А.}$$

**Ответ.**

1) 0,12 А. 2) 0,002 А. 3) 12 В.

**Задача 3.** В электрической схеме, изображённой на рисунке 11, в начальный момент времени ключ разомкнут, конденсатор не заряжен. Параметры схемы указаны на рисунке.

Определить токи через резисторы  $R_1$  и  $R_2$  сразу после замыкания ключа.

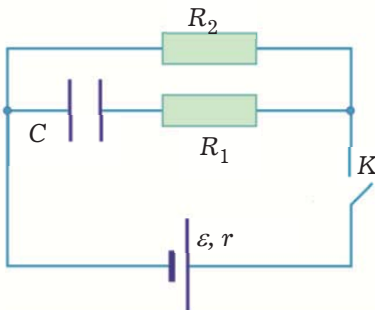


Рис. 11

**Решение.** Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе равно нулю, и для этого момента можно считать, что конденсатор в цепи отсутствует. На рисунке 12 представлена эквивалентная схема.

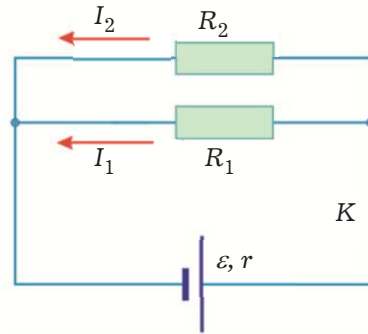


Рис. 12

Токи находим, решая следующую систему уравнений:

$$I_1 + I_2 = \frac{\varepsilon}{R_{\text{экв}} + r} = \frac{\varepsilon}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + r};$$

$$I_1 R_1 = I_2 R_2.$$

Первое уравнение – это закон Ома для полной цепи, второе – следствие того, что резисторы соединены параллельно и напряжение на них одинаково. Решая систему, получаем:

$$I_1 = \frac{\varepsilon R_2}{R_1 R_2 + r(R_1 + R_2)},$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon R_1}{R_1 R_2 + r(R_1 + R_2)}.$$

**Задача 4.** В цепи, изображённой на рис. 13, ЭДС батареи равна 100 В, сопротивления резистора  $R_1 = 10$  Ом и  $R_2 = 6$  Ом, а емкости конденсаторов  $C_1 = 100$  мкФ и  $C_2 = 60$  мкФ. В начальном состоянии ключ  $K$  замкнут, а конденсаторы не заряжены. Через некоторое время после замыкания ключа в системе установится

равновесие. Какую работу совершат сторонние силы к моменту установления равновесия?

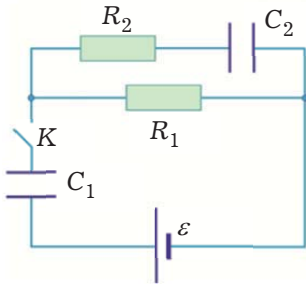


Рис. 13

**Решение.** Работа сторонних сил – работа источника – равна:

$$A_{\text{ист}} = \Delta q \varepsilon,$$

где  $\Delta q$  – заряд, протёкший через источник в процессе установления равновесия. Так как изначально конденсаторы не были заряжены, то через источник прошёл заряд, равный суммарному заряду конденсаторов в установившемся режиме:

$$A_{\text{ист}} = (q_1 + q_2)\varepsilon. \quad (1)$$

К моменту установления равновесия токов в цепи не будет (так как нет замкнутого контура), поэтому резисторы из схемы можно исключить (на них нет падения напряжения) и данную схему представить в эквивалентной форме (см. рисунок 14).

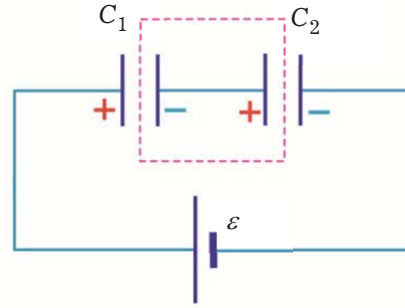


Рис. 14

Проводник, выделенный на рисунке красным прямоугольником, был и останется незаряженным, заряды после замыкания перераспределятся, но заряд его останется равным нулю. Это значит, что заряды конденсаторов равны:

$$q_1 = q_2. \quad (2)$$

Кроме того, сумма напряжений на конденсаторах в установившемся режиме равна ЭДС источника:

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = E. \quad (3)$$

Из уравнений (2), (3) получим:

$$q_1 = q_2 = \frac{\varepsilon C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1), получаем:

$$A_{\text{ист}} = \frac{2C_1 C_2 \varepsilon^2}{C_1 + C_2} = 0,75 \text{ Дж.}$$

**Ответ.** 0,75 Дж.

## Каледоскоп      Каледоскоп      Каледоскоп

### Оригинальная скульптура

На фасаде одного из магазинов спортивных товаров в Чикаго (США) можно увидеть интересную скульптуру, которая вызывает у смотрящих ощущение большой скорости её движения – из стены дома как бы вырывается человек, находящийся на быстро едущем велосипеде.