

Ефимов Василий Васильевич

*Учитель физики Муниципального автономного
общеобразовательного учреждения
«Средней общеобразовательной школы с углубленным
изучением отдельных предметов № 3»
г. Березники Пермского края.
Заслуженный учитель РФ,
почетный работник общего образования РФ.*



Конденсаторы и резисторы в цепи источника постоянного тока

В статье дан подробный разбор нескольких задач с конденсаторами и резисторами в цепи источника постоянного тока и предложены задачи с ответами для самостоятельного решения. Материал может быть полезным для учащихся 10–11 классов и учителей физики при подготовке к олимпиадам и ЕГЭ.

Решение задач на расчёт смешанных электрических цепей, содержащих и конденсаторы, и резисторы, подключённые к источнику постоянного тока, часто у учащихся, а иногда и учителей, вызывает затруднение. Причин здесь несколько. Во-первых, в задачах конденсаторы и резисторы вместе встречаются редко, так как они изучаются в разных разделах физики: конденсаторы в теме «Электростатика», а резисторы в теме «Постоянный ток». Во-вторых, они требуют глубокого понимания физических законов и происходящих в цепи процессов во время зарядки и разрядки конденсатора. Но такие задачи нередко встречаются на физических олимпиадах, а в последние годы стали появляться и на ЕГЭ по физике.

При решении таких задач надо помнить, что конденсатор состоит из двух проводящих обкладок, разделённых диэлектриком. Диэлектрик электрический ток не проводит, но по проводникам и резисторам, соединёнными с обкладками конденсатора во время зарядки конденсатора электроны будут двигаться к одной его обкладке и заряжать ее отрицательно, а с другой обкладки они будут уходить, заряжая ее положительно. При разрядке конденсатора электроны уходят с отрицательной обкладки и приходят на положительную. Таким образом под током в цепи конденсатора будем понимать ток (движение электронов), протекающий по проводникам и резисторам, соединёнными с обкладками конденсатора.

В момент подключения электрической цепи, содержащей незаряженный конденсатор, к источнику постоянного тока, напряжение на нём равно нулю. Это следует из формулы

$$U_C = \frac{q}{C}$$

Если по участку цепи идет ток, а напряжение на этом участке равно нулю, то этот участок цепи ведет себя как проводник с нулевым сопротивлением, поэтому при вычислении начальной силы тока в цепи незаряженного конденсатора его можно заменить проводником с нулевым сопротивлением.

В стационарном режиме, когда заряд конденсатора и напряжение на нём не изменяются, сила тока в участке цепи, соединенном последовательно с конденсатором, равна нулю. В это время конденсатор эквивалентен разрыву цепи. Цепь можно переписать, удалив из нее все конденсаторы, чтобы понять, по каким резисторам пойдет постоянный ток, а в каких резисторах сила тока и напряжение будут равны нулю, и проводить дальнейший расчет цепи по законам постоянного тока.

Сразу после отключения источника тока заряд конденсатора и напряжение на нём равны их значениям до отключения. Если после отключения источника электрическая цепь, содержащая конденсатор, остаётся замкнутой, то конденсатор будет разряжаться, и по этому участку цепи пойдёт ток. Заряд конденсатора, напряжение на нем и сила тока в цепи со временем будут уменьшаться. Причём через равные промежутки времени они будут

уменьшаться в одно и то же число раз, а их значения через равные промежутки времени образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Чем больше ёмкость конденсатора и сопротивление электрической цепи, через которую он разряжается, тем медленнее уменьшаются заряд конденсатора, его напряжение и сила тока. Через время $\tau_e = RC$ эти величины уменьшаются в e раз, где $e \approx 2,72$ — основание натурального логарифма. График зависимости этих величин от времени изображен на рис. 1.

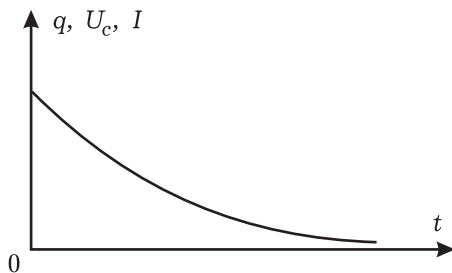


Рис. 1

Задача 1. Сделать расчёт электрической цепи, изображённой на рис. 2:

1. Вычислить силу тока, напряжение на резисторе и на конденсаторе сразу после замыкания ключа ($t \ll RC$).

2. Как они будут меняться со временем по мере зарядки конденсатора ($t \sim RC$)?

3. Какие значения они примут в стационарном режиме, когда перестанут меняться ($t \gg RC$)?

4. Какую работу совершат сторонние силы в источнике за время зарядки конденсатора и сколько тепла выделится за это время в резисторе?

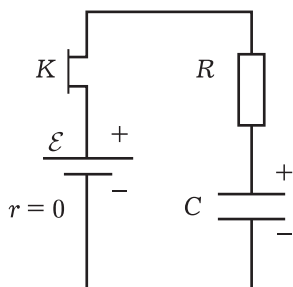


Рис. 2

Решение. 1. Сразу после замыкания ключа заряд конденсатора и напряжение на нём равны нулю:

$$q(0) = 0, \quad U_C(0) = 0.$$

Соединённые последовательно резистор и конденсатор подключены к идеальному источнику тока. Сумма напряжений на них в любой момент времени равна ЭДС источника

$$U_R + U_C = \mathcal{E}.$$

Так как в момент замыкания ключа напряжение на конденсаторе равно нулю, то напряжение на резисторе в этот момент равно ЭДС источника: $U_R(0) = \mathcal{E}$.

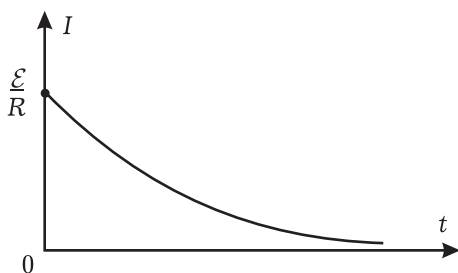


Рис. 3

4. Во время зарядки конденсатора по цепи пройдет заряд $q = C\mathcal{E}$, сторонние силы в источнике тока совершат работу

$$A_{сн} = \mathcal{E}q = C\mathcal{E}^2,$$

конденсатор получит энергию

Сила тока во всей цепи одинаковая, она равна току в резисторе. Её можно найти из закона Ома для участка цепи

$$I(0) = \frac{U_R(0)}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

2. Со временем заряд конденсатора и напряжение на нём будут увеличиваться, а сила тока в цепи уменьшаться:

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{\mathcal{E} - U_C}{R}.$$

3. Через некоторое время $t \gg RC$ сила тока в цепи и напряжение на резисторе будут стремиться к нулю, а напряжение на конденсаторе к ЭДС источника. Эти величины перестанут изменяться, наступит стационарный режим: $I_C \approx 0$, $U_R \approx 0$, $U_C \approx \mathcal{E}$, $q_c \approx C\mathcal{E}$.

На рис. 3 изображён график зависимости силы тока при зарядке конденсатора от времени, а на рис. 4 — зависимости заряда конденсатора и напряжения на нём от времени.

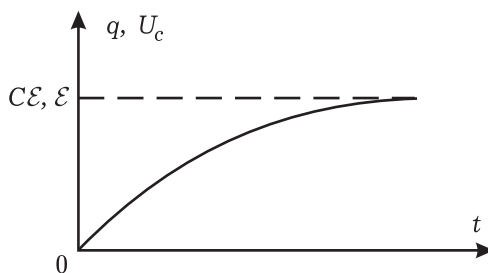


Рис. 4

$$W_C = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

Из закона сохранения энергии работа сторонних сил равна сумме энергии, полученной конденсатором, и количества теплоты выделившегося в резисторе:

$$A_{cn} = W_C + Q_R; \quad Q_R = A_{CT} - W_C;$$

$$Q_R = C\varepsilon^2 - \frac{C\varepsilon^2}{2} = \frac{C\varepsilon^2}{2}.$$

Считая полезной энергию, полученную конденсатором, получаем, что КПД такой цепи при зарядке конденсатора равен 50%. Ни одна из величин, определенных к концу зарядки (q , U_C , A_{cn} , W_C , Q_R , η) не зависит от сопротивления резистора, включённого последовательно с конденсатором. От этого сопротивления зависит лишь скорость зарядки конденсатора. Чем меньше сопротивление резистора и ёмкость конденсатора, тем зарядка идёт быстрее.

Задача 2. Сделать расчёт электрической цепи, изображенной на рис. 5:

1. При зарядке конденсатора.
2. В стационарном режиме.
3. При разрядке конденсатора.

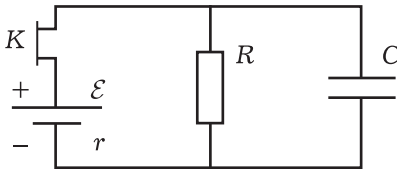


Рис. 5

Решение. 1. Сразу после замыкания ключа заряд конденсатора и напряжение на нём равны нулю. Так как конденсатор, резистор и источник тока соединены параллельно, то напряжение на резисторе и на источнике тока также равны нулю, то есть на источнике тока возникает короткое замыкание. При наличии тока в цепи конденсатора напряжение на нем равно нулю. Конденсатор ведет себя как проводник с нулевым сопротивлением.

$$U_C(0) = U_R(0) = U_{um}(0) = 0.$$

Из закона Ома для участка цепи следует что, сила тока в резисторе в момент замыкания ключа тоже равна нулю:

$$I_R(0) = \frac{U_R(0)}{R} = 0.$$

ЭДС источника равна сумме падений напряжения внутри источника и на внешней цепи

$$\varepsilon = Ir + U_{R,C}, \quad I = \frac{\varepsilon - U_{R,C}}{r}.$$

В момент замыкания ключа $U_{R,C} = 0$, поэтому сила тока в цепи источника – конденсатор $I(0) = \frac{\varepsilon}{r}$. По мере

зарядки конденсатора напряжение на нём и на резисторе станет увеличиваться, будет увеличиваться и сила тока в резисторе, а сила тока в цепи конденсатора будет уменьшаться.

2. Когда конденсатор полностью зарядится, сила тока в проводниках, соединяющих его с резистором, станет равна нулю, и постоянный ток пойдет только по участку цепи, показанному на рис. 6. Согласно закону Ома для замкнутой цепи его величина равна отношению ЭДС к полному сопротивлению цепи: $I = \frac{\varepsilon}{r + R}$.

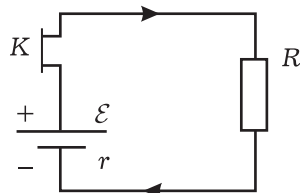


Рис. 6

Напряжения на резисторе и на конденсаторе будут по-прежнему равны друг другу:

$$U_R = U_C = IR = \frac{\varepsilon R}{r + R}.$$

Заряд конденсатора

$$q = CU_C = \frac{CE\mathcal{E}R}{r + R}.$$

Энергия конденсатора

$$W_C = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{CE^2R^2}{2(r + R)^2}.$$



3. После размыкания ключа конденсатор начнёт разряжаться через резистор R (рис. 7). Его заряд, напряжение и сила тока будут со временем уменьшаться, как показано на графике, изображённом на рис. 1. Когда конденсатор полностью разрядится, вся его энергия пойдёт на увеличение внутренней энергии резистора. Поэтому количество теплоты, которая выделится в этом резисторе при полной разрядке конденсатора $Q_R = W_C = \frac{CE^2R^2}{2(r + R)^2}.$

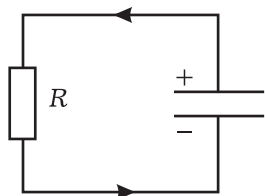


Рис. 7

Когда конденсатор разряжается через 2 резистора, соединённых последовательно (рис. 8), то количество теплоты, выделившейся за любой малый промежуток времени, можно вычислить по закону Джоуля – Ленца. Так как $I_1 = I_2 = I$, то формулу закона

запишем в виде

$$\Delta Q_1 = I^2 R_1 \Delta t; \quad \Delta Q_2 = I^2 R_2 \Delta t; \quad \frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

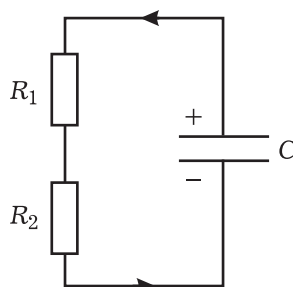


Рис. 8

Оно прямо пропорционально сопротивлению резисторов. Поэтому количество теплоты, выделившейся в каждом резисторе при полной разрядке конденсатора, будет тоже прямо пропорционально его сопротивлению, а их сумма равна энергии конденсатора:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2},$$

$$Q_1 + Q_2 = W_C \Rightarrow Q_1 = \frac{R_1 W_C}{R_1 + R_2},$$

$$Q_2 = \frac{R_2 W_C}{R_1 + R_2}.$$

Если конденсатор разряжается через 2 резистора, соединённых параллельно (рис. 9), то количество теплоты, выделившейся в них, будет обратно пропорционально сопротивлению этих резисторов. Так как при параллельном соединении $U_1 = U_2 = U$,

то формулу закона Джоуля – Ленца удобно записать в виде

$$\Delta Q_1 = \frac{U^2}{R_1} \Delta t; \quad \Delta Q_2 = \frac{U^2}{R_2} \Delta t; \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1};$$

$$Q_1 + Q_2 = W_C \Rightarrow Q_1 = \frac{R_2 W_C}{R_1 + R_2}, Q_2 = \frac{R_1 W_C}{R_1 + R_2}.$$

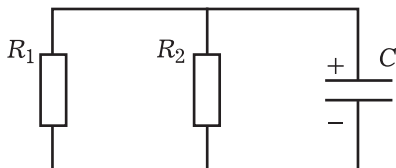


Рис. 9



Задача 3. Вычислить разность потенциалов (напряжение) между точками A и B в электрической цепи (рис. 10) при установившемся напряжении на конденсаторах. Сколько тепла выделится в каждом резисторе после размыкания ключа?

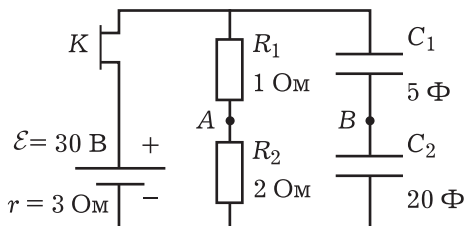


Рис. 10

Решение. Для определения потенциалов точек A и B надо выбрать нулевой уровень потенциала. Удобно считать равным нулю потенциал то-

чек проводников, соединённых с отрицательным полюсом источника, так как в этом случае потенциалы всех остальных точек цепи будут положительными. В этом случае потенциал точки A равен напряжению на резисторе R_2 , а потенциал точки B – напряжению на конденсаторе C_2 .

Так как по условию задачи напряжение на конденсаторах установилось постоянным, то тока в их цепи нет. Постоянный ток идёт только по резисторам. Из закона Ома следует

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1 + R_2} = 5 \text{ (А)}$$

Напряжение на резисторе R_2 :

$$U_{R_2} = IR_2 = 10 \text{ (В)} = \varphi_A$$

Напряжение на конденсаторах равно напряжению на резисторах:

$$U_C = U_R = I(R_1 + R_2) = 15 \text{ (В)}.$$

Общая ёмкость конденсаторов при последовательном соединении

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 4 \text{ (Ф)}.$$

Заряд каждого конденсатора

$$q_1 = q_2 = CU_C = 60 \text{ (Кл)}.$$

Напряжение на конденсаторе C_2 :

$$U_{C_2} = q_2 / C_2 = 3 \text{ В} = \varphi_B.$$

Разность потенциалов между точками A и B :

$$\varphi_A - \varphi_B = 10 \text{ В} - 3 \text{ В} = 7 \text{ (В)}.$$

Энергия конденсаторов C_1 и C_2 :

$$W_C = \frac{CU_C^2}{2} = 450 \text{ Дж}.$$

После размыкания ключа конденсаторы разрядятся через резисторы R_1 и R_2 , и вся их энергия будет равна сумме количеств тепла, выделившегося в этих резисторах. Так как резисторы соединены последовательно, то количество теплоты, выделившейся в каждом резисторе,

будет прямо пропорционально его сопротивлению:

$$Q_1 + Q_2 = 450 \text{ Дж и } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow Q_1 = 150 \text{ Дж, } Q_2 = 300 \text{ Дж}$$

Задача 4. Какое количество теплоты выделится в каждом резисторе после размыкания ключа в электрической цепи, изображённой на рис. 11. Ёмкость конденсатора 420 мкФ. До размыкания ключа напряжение на конденсаторе установилось постоянным.

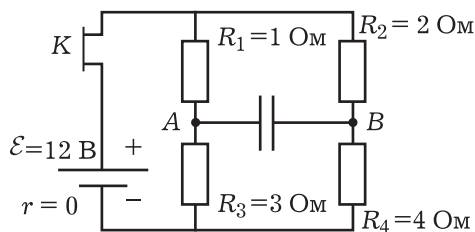


Рис. 11

Решение. Для вычисления энергии конденсатора найдем потенциалы точек А и В. За нулевой уровень потенциала выберем потенциал проводника, соединенного с отрицательным полюсом источника тока. В этом случае потенциал точки А равен напряжению на резисторе R_3 , а потенциал точки В равен напряжению на резисторе R_4

$$\varphi_A = U_{R_3} = \frac{\varepsilon R_3}{R_1 + R_3} = 9 \text{ В;}$$

$$\varphi_B = U_{R_4} = \frac{\varepsilon R_4}{R_2 + R_4} = 8 \text{ В.}$$

Напряжение на конденсаторе равно разности потенциалов этих точек:

$$U_C = \varphi_A - \varphi_B = 1 \text{ В.}$$

Энергия электрического поля конденсатора

$$W_C = \frac{CU_C^2}{2} = 210 \text{ мкДж.}$$

Так как потенциал точки А больше потенциала точки В, то левая обкладка конденсатора будет заряжена положительно, а правая — отрицательно.

После размыкания ключа конденсатор разрядится через резисторы R_{1-4} , его энергия будет равна сумме количеств тепла, выделившегося в каждом из 4-х резисторов:

$$W_C = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4.$$

При разрядке конденсатора резисторы R_1 и R_2 соединены последовательно, как и резисторы R_3 и R_4 , а между собой участки $R_{1,2}$ и $R_{3,4}$ соединены параллельно. Таким образом

$$Q_{1,2} + Q_{3,4} = 210 \text{ мкДж; } \frac{Q_{1,2}}{Q_{3,4}} = \frac{R_{3,4}}{R_{1,2}} = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow Q_{1,2} = 147 \text{ мкДж, } Q_{3,4} = 63 \text{ мкДж.}$$

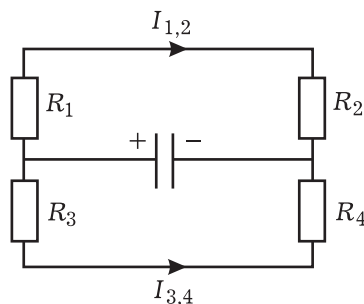


Рис. 12

Находим количества теплоты, выделившейся в последовательно соединённых резисторах R_1 и R_2 :

$$Q_1 + Q_2 = 147 \text{ мкДж; } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow Q_1 = 49 \text{ мкДж, } Q_2 = 98 \text{ мкДж.}$$

Для последовательно соединённых резисторов R_3 и R_4 получаем:

$$Q_3 + Q_4 = 63 \text{ мкДж}, \quad \frac{Q_3}{Q_4} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$Q_3 = 27 \text{ мкДж}, \quad Q_4 = 36 \text{ мкДж}$$

Задача 5. Какое количество теплоты выделилось в электрической цепи (рис. 13) после замыкания ключа? Сколько теплоты выделится в этой цепи, если ключ разомкнуть?

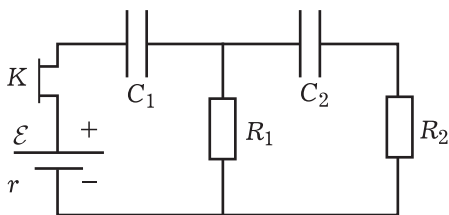


Рис. 13

Решение. После замыкания ключа, когда конденсаторы полностью зарядятся, ток в их цепи станет равен нулю. Поэтому, при расчёте цепи постоянного тока конденсаторы из схемы можно удалить.

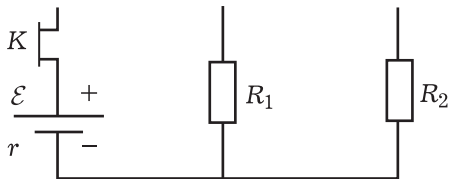


Рис. 14

Схема оставшейся части цепи показана на рис. 14. Из нее видно, что ни по одному из резисторов постоянный ток не пойдет, так как цепь оказалась разомкнутой: $I_{R_1} = I_{R_2} = 0$.

Будут равны нулю и напряжения на этих резисторах $U_{R_1} = U_{R_2} = 0$.

В отсутствии тока в цепи напряжение на источнике равно его ЭДС. Оно равно сумме напряжений на конденсаторе C_1 и резисторе R_1 :

$$U_{C_1} + U_{R_1} = \varepsilon.$$

А так как напряжение на резисторе R_1 равно нулю, то напряжение на конденсаторе C_1 равно ЭДС источника тока: $U_{C_1} = \varepsilon$. Последовательно соединённые конденсатор C_2 и резистор R_2 включены в цепь параллельно резистору R_1 . Значит, $U_{C_2} = U_{R_2} = U_{R_1} = 0$. Так как напряжение на резисторе R_2 равно нулю (в нем нет тока), то и напряжение на конденсаторе C_2 будет ноль. Таким образом, при замкнутом ключе заряженным будет только конденсатор C_1 . Его заряд $q = C_1 \varepsilon$, энергия электрического поля этого конденсатора:

$$W_{C_1} = \frac{C_1 \varepsilon^2}{2}.$$

После замыкания ключа работа источника пошла на увеличение энергии конденсатора C_1 и внутренней энергии всей цепи. Тогда количество теплоты, выделившейся во всей цепи равно разности работы источника и изменения энергии конденсатора C_1 :

$$Q_1 = A_{ист} - W_{C_1} = C\varepsilon^2 - \frac{C\varepsilon^2}{2} = \frac{C\varepsilon^2}{2}.$$

После размыкания ключа цепь остаётся разомкнутой, поэтому конденсатор не разряжается и тепло выделяться в цепи не будет: $Q_2 = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6. Вычислите после замыкания ключа силу тока в цепи, изображенной на рис. 2 в момент, когда энергия конденсатора равна 25 % его максимальной энергии. Сколько теплоты выделится к этому моменту времени.

Ответ. $I = \frac{\mathcal{E}}{2R}$; $Q = \frac{3C\mathcal{E}^2}{8}$

Задача 7. В схеме, изображенной на рис. 15 в начале замыкают ключ K_1 . После полной зарядки конденсаторов замыкают ключ K_2 . Какой заряд пройдет по источнику после замыкания ключа K_1 ? Какой заряд пройдет по резистору R после замыкания ключа K_2 ?

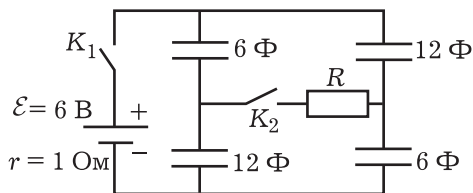


Рис. 15

Ответ. $q_1 = 48\text{ Кл}$; $q_2 = 18\text{ Кл}$

Задача 8. В схеме, изображенной на рис. 16, ключ K сначала замыкают, а после полной зарядки конденсаторов его размыкают. Какое напряжение будет на каждом конденсаторе и каждом резисторе в момент замыкания ключа? Сколько теплоты выделится во всей цепи, когда конденсаторы полностью зарядятся? Какое напряжение будет на ка-

ждом конденсаторе и каждом резисторе после размыкания ключа, когда токи и напряжение перестанут изменяться?

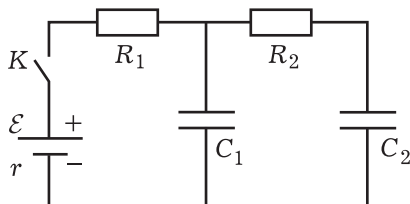


Рис. 16

Ответы.

1. $U_{C_1} = U_{C_2} = 0$; $U_{R_1} = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1}$;
 $U_{R_2} = 0$
2. $Q = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2(C_1 + C_2)$
3. $U_{C_1} = U_{C_2} = \mathcal{E}$; $U_{R_1} = U_{R_2} = 0$

Задача 9. (тренировочный экзамен по физике, март 2017). Напряженность электрического поля плоского конденсатора (рис. 17) равна 24 кВ/м. Внутреннее сопротивление источника $r = 10\text{ Ом}$, ЭДС = 30 В, сопротивление резисторов $R_1 = 20\text{ Ом}$, $R_2 = 40\text{ Ом}$. Найдите расстояние между пластинами конденсатора.

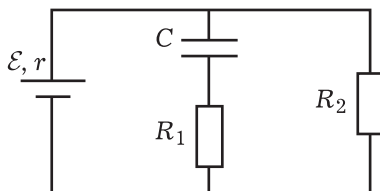


Рис. 17

Ответ. $d = 1\text{ мм}$.