

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



Колесникова София Ильинична

Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист Заочной физико-технической школы (ЗФТШ) при МФТИ. Окончила Московский государственный университет (МГУ), имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».

Задачи с параметром

Часть 3

Неравенства с параметрами.

Можно придумать много неравенств с параметрами, но решить их удастся не всегда. Чаще всего приходится исследовать квадратный трехчлен, основные свойства которого изучаются школьниками в основном в 9 классе и забываются к 11-му классу.

Задачи с параметрами иногда сформулированы непосредственно для квадратного неравенства, но чаще приходится делать замену переменных, после которой возникает задача для квадратного трехчлена. В этих случаях обязательно надо **переформулировать** заданную задачу в задачу для получившегося квадратного неравенства.

Иногда для решения неравенства с несколькими переменными удобно одну из переменных принять за параметр. Иногда задано неравенство без параметров, но в процессе решения возникает задача с параметром.

Мы по-прежнему будем иногда предлагать несколько разных способов решения, но и ими количество способов не исчерпывается.

Пример 1. (МФТИ, 1996) Найдите все значения a , при которых неравенство

$$\frac{3x^2 - 4x + 8}{9x^2 - 12x + 16} \geq a$$

является верным при всех значениях x .

♦ Первый способ.

Так как дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, отрицателен,



$$\begin{aligned} \text{то } \frac{3x^2 - 4x + 8}{9x^2 - 12x + 16} &\geq a \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{3(1-3a)x^2 - 4(1-3a)x + 8(1-2a)}{9x^2 - 12x + 16} &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3(1-3a)x^2 - 4(1-3a)x - 8(2a-1) &\geq 0. \end{aligned}$$

Коэффициент при старшей степени зависит от параметра, поэтому сначала рассмотрим случай, когда он обращается в 0.

Если $1-3a=0$, то

$$3(1-3a)x^2 - 4(1-3a)x - 8(2a-1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} \geq 0, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \text{ Неравенство выполнено для}$$

всех x , значит, $a = \frac{1}{3}$ удовлетворяет условию задачи.

По условию, неравенство выполнено для всех x , в частности, для достаточно больших, поэтому $1 - 3a > 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{3}$.

Теперь неравенство квадратное с положительным коэффициентом при старшей степени. Поэтому ясно, что условия задачи выполнены, если дискриминант квадратного трехчлена $3(1-3a)x^2 - 4(1-3a)x - 8(2a-1)$ неположителен, т. е.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a < \frac{1}{3}, \\ \frac{D}{4} = 4(1-3a)^2 + 24(1-3a)(2a-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3a > 0, \\ 4(1-3a)(9a-5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a < 1, \\ (9a-5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow a < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } a \leq \frac{1}{3}.$$

Второй способ.

Задача может быть легко решена и без всяких дискриминантов, потому что части квадратных трехчленов числителя и знаменателя, содержащие x , пропорциональны (потому второе слагаемое после выделения целой части не содержит в числителе x), знаменатель никогда не обращается в 0 и легко оценивается снизу. Выделим целую часть дроби

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 4x + 8}{9x^2 - 12x + 16} &= \frac{(9x^2 - 12x + 16 + 8)}{3(9x^2 - 12x + 16)} = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{8}{3(3x-2)^2 + 36}. \end{aligned}$$

$$\frac{3x^2 - 4x + 8}{9x^2 - 12x + 16} > \frac{1}{3} \text{ при всех } x. \text{ Поэтому ус-}$$

$$\text{ловие задачи: } \frac{3x^2 - 4x + 8}{9x^2 - 12x + 16} \geq a \text{ для}$$

всех x , будет выполнено тогда и только тогда, когда $a \leq \frac{1}{3}$.

$$\text{Ответ. } \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]. \blacklozenge$$

Пример 2. (МГУ, 1973, биофак) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых неравенство

$$4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \leq 0$$

имеет хотя бы одно решение.

♦ Пусть $2^x = t$, $t > 0$, тогда неравенство примет вид **системы** неравенств

$$\begin{cases} t^2 - at - a + 3 \leq 0, \\ t > 0. \end{cases}$$

Теперь задача состоит в том, чтобы найти все a , при которых квадратное неравенство $t^2 - at - a + 3 \leq 0$ имеет хотя бы одно **положительное** решение.

Первый способ («в лоб»).

Ясно, что для существования решения неравенства необходимо, чтобы дискриминант был неотрицателен:

$$D = a^2 + 4a - 12 = (a+6)(a-2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in (-\infty; -6] \cup [2; +\infty). \text{ Тогда}$$

$$t^2 - at - a + 3 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \in \left[\frac{a - \sqrt{D}}{2} = t_1; \frac{a + \sqrt{D}}{2} = t_2 \right]$$

Для того, чтобы неравенство было верно хотя бы при одном положительном значении t , необходимо и достаточно, чтобы больший корень был положительным, т. е.

$$t_2 = \frac{a + \sqrt{D}}{2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ a \leq 0, \\ (\sqrt{D} + a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2 \\ a \leq 0, \\ (\sqrt{D} + a)(\sqrt{D} - a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2; \\ a \leq 0, \\ 4a - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \geq 2.$$

Второй способ (с исследованием квадратного трехчлена).

Перепишем систему неравенств по-другому:

$$\begin{cases} t(t-a) \leq a-3, \\ t > 0. \end{cases}$$

Теперь построим эскиз параболы $y = t(t - a)$, учитывая, что a может быть разных знаков. (рис.1 а - г)

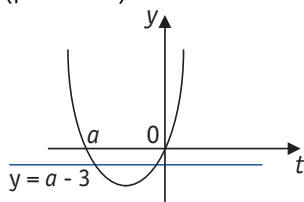


Рис. 1 а) $a < 0$

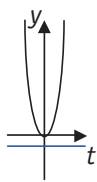


Рис. 1 б) $a = 0$

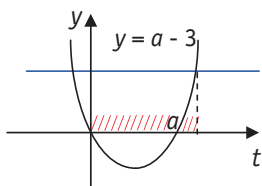


Рис. 1 в) $a > 0$

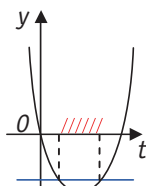


Рис. 1 г) $a > 0$

Теперь задача состоит в том, чтобы найти все a , при которых под прямой $y = a - 3$ находится хотя бы одна точка параболы с положительной абсциссой.

Если $a \leq 0$, то видно (рис.1а, б)), что $a - 3 < 0$, и задача не имеет решения.

Если $a > 0$, то видно, что задача имеет решение, если прямая расположена не ниже вершины параболы (рис.1в, г), т. е.

$$a - 3 \geq -\frac{a^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a - 12 \geq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -6] \cup [2; +\infty).$$

Так как $a > 0$, то $a \in [2; +\infty)$.

Ответ. $[2; +\infty)$. ♦

Пример 3. (МГУ, 1973, биофак) Найдите все a , при которых неравенство

$$a2^{2x} + 4(a - 1)2^x + a > 1$$

справедливо при всех x .



♦ Пусть $2^x = t, t > 0$, тогда неравенство примет вид **системы** неравенств

$$\begin{cases} t > 0, \\ at^2 + 4(a - 1)t + a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ t(at + 4(a - 1)) > 1 - a. \end{cases}$$

Теперь задача состоит в том, чтобы найти все a , при которых квадратное неравенство $at^2 + 4(a - 1)t + a > 1$ справедливо для всех положительных t .

Так как неравенство выполнено для всех положительных t , то выполнено и для достаточно больших – значит, $a > 0$. Построим параболу $y(t) = t(at + 4(a - 1)) = at\left(t - \frac{4(1 - a)}{a}\right)$

$$\text{болу } y(t) = t(at + 4(a - 1)) = at\left(t - \frac{4(1 - a)}{a}\right)$$

при различных a (рис 2 а-в).

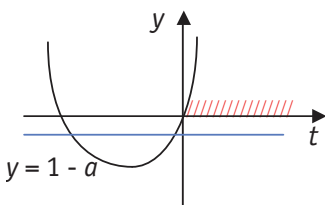


Рис.2 а) $1 - a < 0$

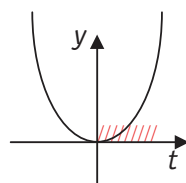


Рис.2 б) $a = 1$

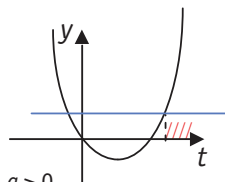


Рис.2 в) $1 - a > 0$

Видно, что неравенство может быть выполнено для всех положительных t только на рис.2а,б. Отсюда следует, что это имеет место, если $1 - a \leq 0 \Leftrightarrow a \geq 1$.

Ответ. $[1; +\infty)$. ♦

Пример 4. Решите неравенство

$$\frac{4x^2 + 4y^2 + x^2y^2}{x^4 + y^4 + 16} \geq 1.$$

♦ В неравенстве с двумя переменными нет никакого параметра. Перепишем неравенство по – другому. Так как знаменатель положителен при всех x, y , то

$$\frac{4x^2 + 4y^2 + x^2y^2}{x^4 + y^4 + 16} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 - 4x^2 - 4y^2 - x^2y^2 + 16 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^2(4 + y^2) + y^4 - 4y^2 + 16 \leq 0.$$

Первый способ (этим способом может решить любой старшеклассник).

Рассмотрим это неравенство как квадратное относительно x^2 (можно рассмотреть как квадратное относительно y^2), при этом y будет играть роль параметра, вернее, **псевдопараметра**, т. к. в данном примере x и y совершенно равноправны.



Неравенство имеет хотя бы одно решение (не обязательно неотрицательное) тогда и только тогда, когда дискриминант неотрицательный, т. е. если

$$D = 16 + 8y^2 + y^4 - 4y^4 + 16y^2 - 64 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3y^4 + 24y^2 - 48 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$y^4 - 8y^2 + 16 \leq 0 \Leftrightarrow (y^2 - 4)^2 \leq 0 \Leftrightarrow y^2 = 4.$$

Тогда неравенство принимает вид

$$x^4 - 8x^2 + 16 \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 = 4.$$

Оказалось, что неравенство относительно x^2 и y^2 имеет единственное решение:

$$x^2 = 4, y^2 = 4.$$

Второй способ



Этим способом решают школьники, имеющие некоторый олимпиадный опыт, или те, кто имеет опыт по проведению всевозможных преобразований. Прежде всего попробуем избавиться от произведения x^2y^2 :

$$x^4 + y^4 - 4x^2 - 4y^2 - x^2y^2 + 16 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 + 2y^4 - 8x^2 - 8y^2 - 2x^2y^2 + 16 + 16 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 + (x^2 - 4)^2 + (y^2 - 4)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2, \\ x^2 = 4, \\ y^2 = 4. \end{cases} \text{ Отсюда следует}$$

Ответ. $(2; 2), (2; -2), (-2; 2), (-2; -2)$ ♦

Пример 5. (МГУ, 2003, ф-т почв.) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых отрезок $[-3; -1]$ целиком содержится среди решений неравенства

$$\frac{x - 3a}{a - 2x} < 0.$$

♦ **Первый способ** (стандартный).

Преобразовав неравенство

$$\frac{x - 3a}{a - 2x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x - 3a}{x - \frac{a}{2}} > 0, \text{ видим, что решение}$$

при применении стандартного метода интервалов зависит от взаимного расположения

отрезка $[-3; -1]$ и точек $\frac{a}{2}$, $3a$.

Рассмотрим различные случаи.

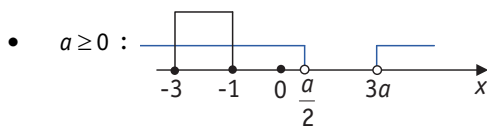


Рис. 3

В этом случае отрезок всегда целиком принадлежит решению неравенства.

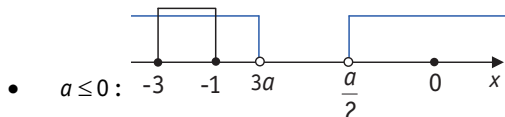


Рис. 4 а)

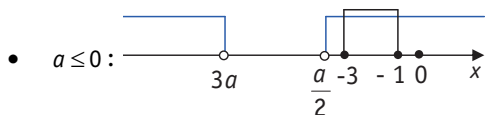


Рис. 4 б)

В этом случае отрезок может содержаться или в левом (рис. 4а), или в правом (рис.4б) промежутках: или

$$[-3; -1] \subset (-\infty; 3a) \Leftrightarrow -1 < 3a \Leftrightarrow a > -\frac{1}{3}, \text{ или}$$

$$[-3; -1] \subset \left(\frac{a}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow \frac{a}{2} < -3 \Leftrightarrow a < -6.$$

Учитывая оба случая, получаем, что

$$a \in (-\infty; -6) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Можно избежать такого перебора, если рассмотреть неравенство в плоскости $(x; a)$.



Второй способ (решение в плоскости $(x; a)$). Перепишем неравенство по – другому:

$$\frac{x-3a}{a-2x} < 0 \Leftrightarrow (x-3a)(a-2x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3a-x)(a-2x) > 0. \text{ Решим задачу для этого квадратного неравенства графически.}$$

Начертим прямые $3a-x=0$ и $a-2x=0$ в плоскости $(x; a)$ (рис. 5). Плоскость разделилась на четыре угла, в каждом из которых произведение $(3a-x)(a-2x)$ сохраняет знак. Определим знак произведения в какой –нибудь «хорошей» точке, не лежащей на прямых, например, в точке $(0;1)$: $(3)(1) > 0$. Отсюда следует, что весь угол, содержащий

эту точку, удовлетворяет неравенству $(3a-x)(a-2x) > 0$. Теперь переместимся в любой соседний угол. Там уже не надо выбирать точку – внутри него произведение имеет противоположный знак, т. к. мы решаем рациональное неравенство $(3a-x)(a-2x) > 0$, а в нем при переходе через «ноль» неравенство меняет знак. В результате неравенство $(3a-x)(a-2x) > 0$ выполнено внутри отмеченных углов. Теперь проведем вертикальные прямые $x=-3$ и $x=-1$.

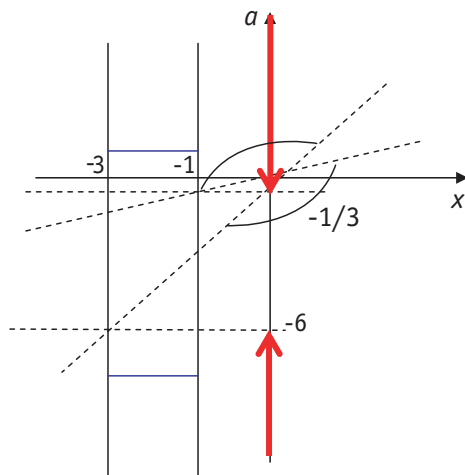


Рис. 5

Отметим отрезок $[-3; -1]$ на числовой оси и посмотрим, при каких a он целиком находится внутри отмеченных углов (синие линии). Видно, что для ответа (красные стрелки) надо найти ординаты точек пересече-

$$\begin{aligned} \text{ния: } \begin{cases} x = -3, \\ x = \frac{a}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ a = -6 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = -1, \\ 3a = x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ a = -\frac{1}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ. $(-\infty; -6) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right).$ ♦

Третий способ.

Отрезок $[-3; -1]$ целиком содержится

среди решений неравенства $\frac{x-3a}{a-2x} < 0$ – это значит, что квадратный трехчлен

$$(x-3a)\left(x-\frac{a}{2}\right) > 0 \text{ на всем отрезке } [-3; -1].$$

Прикинем возможные положения квадратного трехчлена $y(x) = (x-3a)\left(x-\frac{a}{2}\right)$, удовлетворяющего условию – рис. 5а

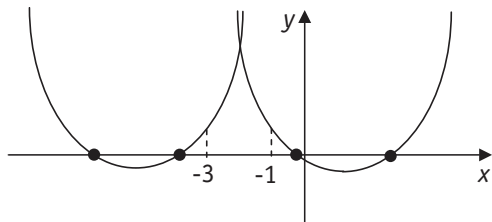


Рис. 5а

Тогда становится ясно, решение имеет место тогда и только тогда, когда или оба корня находятся левее точки $x=-3$ или правее точки $x=-1$,

$$\text{т. е. } \begin{cases} 3a < -3, \\ \frac{a}{2} < -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -6, \\ a > -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Пример 6. (МГУ, 1992, мехмат) Найдите все значения x , при которых неравенство $(a+2)x^3 - (1+2a)x^2 - 6x + (a^2 + 4a - 5) > 0$ выполняется хотя бы при одном значении a , принадлежащем отрезку $[-2; 1]$.

♦ Здесь мы сталкиваемся прежде всего с логическими трудностями: мы привыкли к формулировке, где нужно найти все значения параметра a , при которых выполнено некоторое неравенство по отношению к x . Здесь слово «параметр» отсутствует.

Если тем не менее начать стандартно решать неравенство относительно x , то ничего не получится, т. к. неравенство кубическое и найти какое-нибудь частное решение невозможно. Поэтому прочитаем условие задачи внимательней и заметим, что неравенство

$$(a+2)x^3 - (1+2a)x^2 - 6x + (a^2 + 4a - 5) > 0$$

выполняется хотя бы при одном значении a , принадлежащем отрезку $[-2; 1]$, т. е. это неравенство относительно a , причем квадра-

тичное, а роль параметра играет x . Перепишем поэтому его по-другому.

$$a^2 + a(x^3 - 2x^2 + 4) + (2x^3 - x^2 - 6x - 5) > 0.$$

Теперь задача стала знакомой: найти все значения «параметра» x , при каждом из которых квадратное неравенство выполнено хотя бы при одном значении «переменной» a , принадлежащей отрезку $[-2; 1]$. В «лоб» решить нельзя, т. к. коэффициенты очень громоздкие.



Поэтому воспользуемся характером поведения графика квадратичной функции.

Коэффициент при старшей степени квадратного трехчлена

$$y(a) = a^2 + a(x^3 - 2x^2 + 4) + (2x^3 - x^2 - 6x - 5)$$

положителен, поэтому условия задачи выполнены тогда и только тогда, когда значение квадратного трехчлена положительно хотя бы на одном из концов отрезка (рис. 6а, б, в),

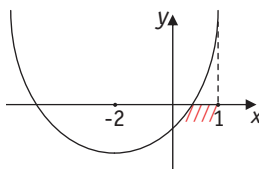


Рис. 6 а)

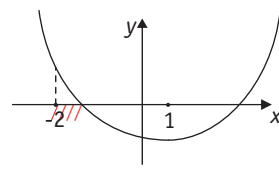


Рис. 6 б)

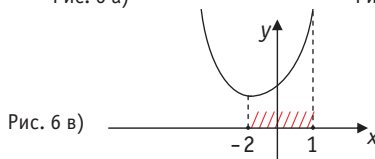


Рис. 6 в)

т.е.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y(-2) > 0, \\ y(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1) > 0, \\ x(x-2)(x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; +\infty). \end{aligned}$$

Ответ. $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; +\infty)$. ♦

Пример 7. (МГУ, 1994, биофак) Найти все значения x , при которых неравенство $(2a-6)x^2 + (32-10a)x - (8+a) < 0$ выполнено для всех a , удовлетворяющих условию $2 < a < 4$.



♦ Условие этой задачи тоже провокационно, т.к. неравенство относительно x квадратично, и некоторые будут пытаться решить его относительно x . Запишем все условия задачи математическим языком, откуда будет видно, что неравенство надо рассматривать относительно a , а параметром опять является x :

$$\begin{cases} (2a-6)x^2 + (32-10a)x - (8+a) < 0, \\ 2 < a < 4. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(2x^2 - 10x - 1) - 6x^2 + 32x - 8 < 0, \\ 2 < a < 4. \end{cases}$$

Оказывается, что исследовать надо линейное неравенство! Рассмотрим всевозможные прямые $y = ka + b$ в плоскости $(a; y)$ на промежутке $(2; 4)$ (рис.7).

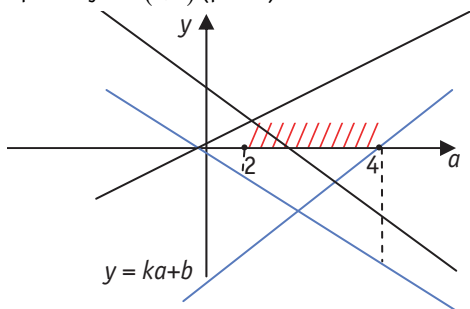


Рис. 7

Видно (синие прямые), что необходимым и достаточным условием отрицательности линейной функции на открытом промежутке является неположительность линейной функции на обоих концах промежутка (но одновременное обращение в 0 на концах невозможно), т. е. выполнение системы условий:

$$\begin{cases} y(2) \leq 0, \\ y(4) \leq 0, \\ y(2)^2 + y(4)^2 \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geq 0, \\ x^2 - 4x - 6 \leq 0, \\ y(2)^2 + y(4)^2 \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [2 - \sqrt{10}; 1] \cup [5; 2 + \sqrt{10}]$$

Ответ. $[2 - \sqrt{10}; 1] \cup [5; 2 + \sqrt{10}]$. ♦

Пример 8. (МГУ, 2001, мехмат) Найти все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

♦ Так как при старшей степени коэффициенты зависят от параметра, то сначала рассмотрим случаи, когда один из них обращается в 0 (одновременно в 0 они не обращаются):

$$\begin{cases} a = 1, \\ 2x + 5 \leq 0, \\ x^2 + 4x + 2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ x \leq -2 - \sqrt{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0, \\ -x^2 + 4 \leq 0, \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Из совокупности видно, что при $a = 1$ и $a = 0$ решений бесконечно много, и эти значения параметра не являются решением задачи.

Теперь

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty), \\ (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0, D_1 = \frac{D}{4} = 4 - 3a, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geq 0, D_2 = \frac{D}{4} = a + 1. \end{cases}$$

Рассмотрим оставшиеся промежутки отдельно.

- Если $a \in (-\infty; 0)$, то $a - 1 < 0$ и $D_1 > 0$. Поэтому первое неравенство выполнено на неограниченных интервалах вне корневой промежутка – рис.8.

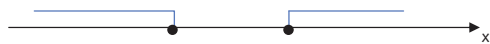


Рис. 8

Если при этом $D_2 < 0 \Leftrightarrow a + 1 < 0 \Leftrightarrow a < -1$, то второе неравенство не имеет решений.

Если $D_2 = 0 \Leftrightarrow a = -1$, то второе неравенство имеет единственное решение $x = 0$, которое,



как показывает проверка, при этом не является решением первого.

Если $D_2 > 0 \Leftrightarrow a > -1$, то решением второго неравенства является корневой промежуток – рис.9.

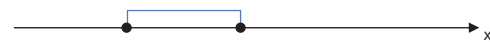


Рис. 9

При этом, пересечением **может** быть единственная точка, если одна из границ этого промежутка совпадет с одной из границ промежутка, являющегося решением первого неравенства, т. е. если система уравнений

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 = 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 = 0 \end{cases} \text{ имеет решение.}$$

Решим систему:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 = 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 = 0, \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 = 0, \\ x = \begin{bmatrix} 1, \\ -3. \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ a + 2(a+1) + a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ a \cdot 9 - 2(a+1)3 + a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{4} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ a = -\frac{3}{4}; \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ a = \frac{5}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, общими точками являются:

$$x = 1 \text{ при } a = -\frac{3}{4}, x = -3 \text{ при } a = \frac{5}{4}.$$

Проверим теперь, сколько решений имеет система неравенств при таких a .

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a = -\frac{3}{4}, \\ -7x^2 - 6x + 13 \leq 0, \\ -3x^2 + 2x + 1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} a = \frac{5}{4}, \\ x^2 + 10x + 21 \leq 0, \\ 5x^2 + 18x + 9 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4}, \\ (x-1)\left(x + \frac{13}{7}\right) \geq 0, \\ (x-1)\left(x + \frac{1}{3}\right) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4}, \\ x = 1; \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{4}, \\ (x+3)(x+7) \leq 0, \\ (x+3)\left(x + \frac{3}{5}\right) \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{4}, \\ x \in [-7; -3]. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, при $a = -\frac{3}{4}$ общей является **единственная** точка.

- Если $a \in (0;1)$, то $a-1 < 0, a > 0, D_2 = a+1 > 0, D_1 = 4-3a > 0$. Решением и первого, и второго неравенств являются лучи вне соответствующих корневых промежутков, а они всегда имеют более одной общей точки.
- Если $a \in (1;+\infty)$, то $a-1 > 0, D_2 > 0$. Решением второго неравенства являются опять два луча, решение первого зависит от знака D_1 .

Если $D_1 < 0 \Leftrightarrow 4-3a < 0 \Leftrightarrow a > \frac{4}{3}$, то первое неравенство не имеет решений.

Если $D_1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$, то решением первого неравенства является **единственная** точка $x = -4$, которая, как показывает проверка, удовлетворяет и второму неравенству.

Если $D_1 > 0 \Leftrightarrow a < \frac{4}{3}$, то решением первого неравенства является корневой промежуток, который либо не пересекается с лучами, либо имеет с ними более одной точки, т. к. при этих a корни не совпадают (рис.10).

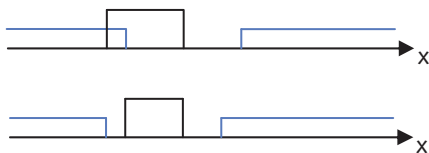


Рис. 10

Ответ. $-\frac{3}{4}, \frac{4}{3}$. ♦

Пример 9. (МГУ, 1992, экономфак) Найдите все a , при которых число целочисленных решений неравенства

$$x^2 - 3x + 3|x + a| + a \leq 0$$

максимально.

♦ Запишем решение неравенства:

$$x^2 - 3x + 3|x + a| + a \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3|x + a| \leq 3x - x^2 - a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3a \leq 3x - x^2 - a, \\ 3x + 3a \geq -3x + x^2 + a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4a \leq 0, \\ x^2 - 6x - 2a \leq 0. \end{cases}$$

Изобразим множество решений в плоскости $(x; a)$.

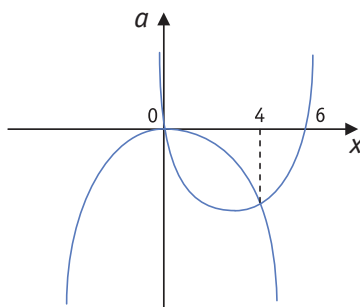


Рис. 11

Найдем точки пересечения парабол:

$$\begin{cases} x^2 + 4a = 0, \\ x^2 - 6x - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -4a, \\ 2x^2 - 12x + x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -4a, \\ x = 0, \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, a = 0; \\ x = 4, a = -4. \end{cases}$$

Ясно, что среди целых решений могут быть только 0,1,2,3,4. Выясним, при каких значениях параметра они являются решениями – рис.11:

$$x = 1: \begin{cases} 1 + 4a \leq 0, \\ -5 - 2a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq a \leq -\frac{1}{4}$$

$$x = 2: \begin{cases} 4 + 4a \leq 0, \\ -8 - 2a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq a \leq -1$$

$$x = 3: \begin{cases} 9 + 4a \leq 0, \\ -9 - 2a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{2} \leq a \leq -\frac{9}{4}$$

$$x = 4: \begin{cases} 16 + 4a \leq 0, \\ -8 - 2a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq a \leq -4 \Leftrightarrow a = -4$$

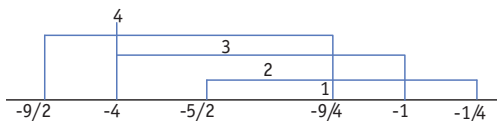


Рис. 12

Видно (рис.12), что 3 решения при $a = -4$ и

$$\text{при } a \in \left[-\frac{5}{2}; -\frac{9}{4}\right].$$

$$\text{Ответ. } \left[-\frac{5}{2}; -\frac{9}{4}\right] \cup \{-4\}. \blacklozenge$$

Пример 10. (типа C5 - ЕГЭ) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых решением неравенства $2 > |5^t + a| + 5^{2t}$ является хотя бы одна бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

♦ Прежде всего сделаем замену переменных $5^t = x$, $x > 0$, тогда неравенство примет вид:

$$|x + a| < 2 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x + a < 2 - x^2, \Leftrightarrow \\ x + a > x^2 - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x - 2 + a < 0, \Leftrightarrow \\ x^2 - x - 2 - a < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + a < 0, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - a < 0. \end{cases}$$

Будем решать неравенства в плоскости (x, a) . Для этого построим сначала графики соответствующих уравнений. Это будут параболы: $a = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$ и $a = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ и прямая $x = 0$. Первое неравенство выполнено внутри параболы $a = -x^2 - x + 2$, а второе выполнено внутри параболы $a = x^2 - x + 2$. Первая парабола пересекает ось a в точке $a = 2$; вершина второй параболы находится справа от оси a в точке $x = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{9}{4}$.

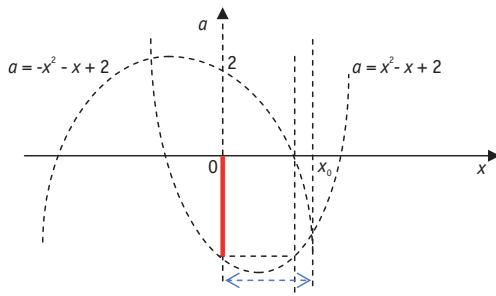


Рис. 13

Решением системы является область между параболой и прямой $x = 0$ и $x = x_0$, где x_0 - точка пересечения парабол при $x > 0$.

Чтобы решением была хотя бы одна бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $\{t_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы точка $t = 0$ была внутренней или граничной точкой промежутка, являющегося решением заданного неравенства. В новых переменных этой точкой является точка $x = 1$. Найдём a , при которых параболы пересекаются с прямой $x = 1$: это $a = -2$ и $a = 0$. Из рис.13 следует, что условию задачи удовлетворяют $a \in [-2; 0]$.

$$\text{Ответ. } a \in [-2; 0]. \blacklozenge$$

Пример 11. (МГУ, 1988, экономфак) Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$|3\sin^2 x + 2a\sin x \cos x + \cos^2 x + a| \leq 3$$

справедливо при всех x .

♦ **Первый способ.**

Преобразуем выражение, стоящее под знаком модуля:

$$|3\sin^2 x + 2a\sin x \cos x + \cos^2 x + a| \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{3}{2}(1 - \cos 2x) + a\sin 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + a \right| \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2 - \cos 2x + a\sin 2x + a| \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| 2 - \frac{\sqrt{1+a^2}(\cos 2x - a\sin 2x)}{\sqrt{1+a^2}} + a \right| \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{1+a^2} \sin(2x - \alpha) - a - 2| \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \sin(2x - \alpha) - \frac{(a+2)}{\sqrt{1+a^2}} \right| \leq \frac{3}{\sqrt{1+a^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2x - \alpha) \leq \frac{5+a}{\sqrt{1+a^2}}, \\ \sin(2x - \alpha) \geq \frac{a-1}{\sqrt{1+a^2}}. \end{cases}$$

Так как $-1 \leq \sin(2x - \alpha) \leq 1$, то система неравенств выполнена при всех x тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$\begin{cases} \frac{5+a}{\sqrt{1+a^2}} \geq 1, \\ \frac{a-1}{\sqrt{1+a^2}} \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+a^2} \leq 5+a, \\ \sqrt{1+a^2} \leq 1-a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5+a \geq 0, \\ 1 \leq 25+10a, \\ 1-a \geq 0, \\ 0 \leq -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{12}{5}, \\ a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \left[-\frac{12}{5}; 0\right].$$

Второй способ.

Преобразуем заданное неравенство в однородное, заменив единицу суммой $\sin^2 x + \cos^2 x$.

$$\text{Тогда } |3\sin^2 x + 2a\sin x \cos x + \cos^2 x + a| \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin^2 x + 2a\sin x \cos x + \cos^2 x + (a-3)(\sin^2 x + \cos^2 x) \leq 0, \\ 3\sin^2 x + 2a\sin x \cos x + \cos^2 x + (a+3)(\cos^2 x + \sin^2 x) \geq 0. \end{cases}$$

Прежде чем переходить к тангенсам, посмотрим, при каких a решением неравенства являются те x , для которых

$$\cos x = 0 : \begin{cases} 3+(a-3) \leq 0, \\ 3+(a+3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq a \leq 0. \text{ Значит,}$$

надо исследовать только эти a .

Разделив неравенство на $\cos^2 x$ (теперь рассматриваем $\cos^2 x \neq 0$),



$$\text{получим: } \begin{cases} 3tg^2 x + 2atgx + 1 + (a-3)(tg^2 x + 1) \leq 0, \\ 3tg^2 x + 2atgx + 1 + (a+3)(1+tg^2 x) \geq 0. \end{cases}$$

Для удобства сделаем замену переменных $tg x = t$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} at^2 + 2at + (a-2) \leq 0, \\ (6+a)t^2 + 2at + (a+4) \geq 0. \end{cases}$$

Видно, что, если $a = 0$, оба неравенства верны при всех t ; если $a = -6$, то второе неравенство верно не для всех t . Поэтому рассмотрим систему при $-6 < a < 0$. Неравенства при таких a выполнены при всех t тогда и только тогда, когда их дискриминанты неположительны, т. е. если

$$\begin{cases} \frac{D_1}{4} = a^2 - a^2 + 2a \leq 0, \\ \frac{D_2}{4} = a^2 - (a+4)(a+6) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ 5a+12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \left[-\frac{12}{5}; 0\right].$$

Ответ. $\left[-\frac{12}{5}; 0\right]$. ♦

Пример 12. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых решением неравенства $\log_{3x-x^2}(3a-ax) < 1$ являются промежутки, ни одна из границ которых не зависит от a .

♦ Воспользуемся тем, что знак разности логарифмов $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ. Запишем полное условие равносильности:

$$\log_{(3x-x^2)}(3a-ax) < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{(3x-x^2)}(3a-ax) < \log_{(3x-x^2)}(3x-x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-x^2 > 0, \\ 3a-ax > 0, \\ (3x-x^2-1)(3a-ax-3x+x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0;3), \\ a(x-3) < 0, \\ (x^2-3x+1)(x-3)(x-a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0;3), \\ a > 0, \\ (x^2 - 3x + 1)(x - a) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0;3), \\ a > 0, \\ \left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) (x - a) < 0. \end{cases}$$

Систему будем решать в плоскости $(x; a)$

Если $x > a$, то последнее неравенство системы выполнено между прямыми $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ и

$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Так как неравенство рациональное и все биномы входят в нечетной (первой) степени, то при переходе через каждую граничную прямую левая часть неравенства меняет знак – рис.14. В результате неравенство выполнено в областях, где есть синие линии.

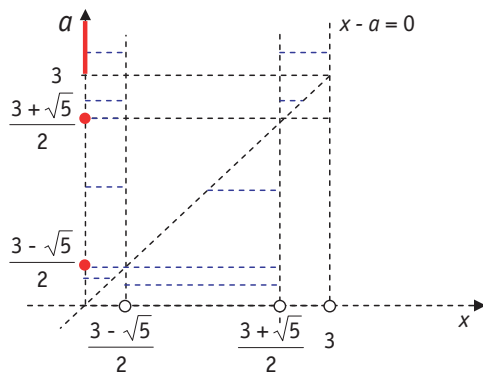


Рис. 14

Видно, что, границы промежутков, являющихся решениями, не зависят от a при $a \geq 3$,

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Если систему решать на оси Ox , то пришлось бы рассматривать 5 вариантов расположения точки $x = a$, а с рисунком сразу можно получить ответ на любой вопрос.



Условию нашей задачи удовлетворяют все a ,

$$\text{принадлежащие } \left\{ \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\} \cup [3; +\infty).$$

При остальных – границей одного из промежутков является a .

$$\text{Ответ. } \left\{ \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\} \cup [3; +\infty).$$

Пример 13. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых сумма длин всех промежутков, являющихся решением неравенства

$$\log_{(x-a)}((a+3)x^2 - 3ax - x^3) < 1 + \log_{(x-a)} 2,$$

равна 2.

♦ Воспользуемся полным условием равносильности для решения логарифмических неравенств:

$$\log_{(x-a)}((a+3)x^2 - 3ax - x^3) < 1 + \log_{(x-a)} 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{(x-a)}((a+3)x^2 - 3ax - x^3) < \log_{(x-a)} 2(x-a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - a > 0, \\ ((a+3)x^2 - 3ax - x^3) > 0, \\ (x-a-1)((a+3)x^2 - 3ax - x^3 - 2(x-a)) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - a > 0, \\ (x-a-1)(x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a) > 0, \\ x^3 - (a+3)x^2 + 3ax < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - a > 0, \\ (x-a-1)(x-a)(x-2)(x-1) > 0, \\ (x-a)x(x-3) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-a > 0, \\ (x-a-1)(x-2)(x-1) > 0, \\ x(x-3) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-a > 0, \\ (x-a-1)(x-2)(x-1) > 0, \\ x \in (0;3). \end{cases}$$

Изобразим множество решений неравенства в плоскости $(x; a)$ – рис.15.

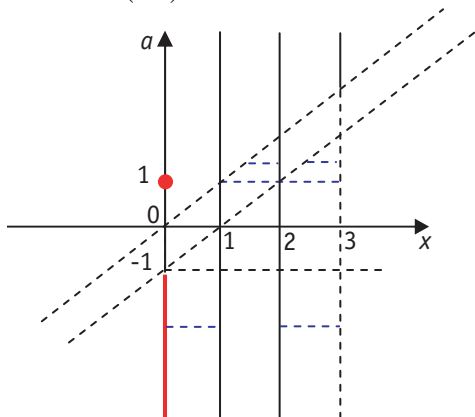


Рис. 15

Видно, что есть два промежутка, являющиеся решениями, длина каждого из которых равна 1, если $a \in (-\infty; -1] \cup \{1\}$.

Ответ. $(-\infty; -1] \cup \{1\}$.

Пример 14. Найдите все значения параметра a , при которых решением неравенства

$$\log_x (x-a) > 2$$

является один промежуток.

♦ Воспользуемся полным условием равносильности для решения логарифмических неравенств:

$$\log_x (x-a) > 2 \Leftrightarrow \log_x (x-a) > \log_x x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x-a > 0, \\ (x-1)(x-a-x^2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > a, \\ (x-1)(a-x+x^2) < 0. \end{cases}$$

Неравенства будем решать в плоскости (x, a) . Для этого сначала нарисуем кривые

$$x=0, x=a, x=1, a=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4},$$

а затем отметим ту часть плоскости, в которой выполнены все неравенства.

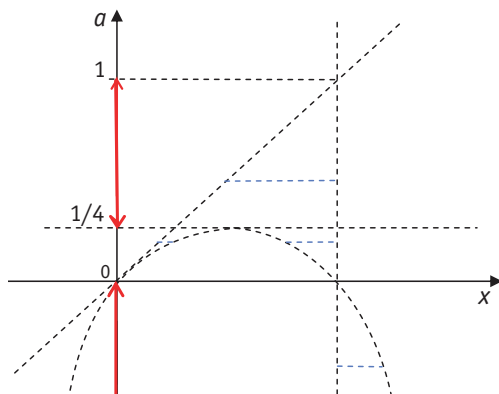


Рис. 16

На рис.16 видно, что решением является один

промежуток, если $\begin{cases} a \in (-\infty; 0), \\ a \in \left(\frac{1}{4}; 1\right) \end{cases}$

(если $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$, то решением является объединение двух промежутков).

Ответ. $a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{4}; 1\right)$. ♦



Пример 15. (МГУ, 2003, ф-т фундаментальной медицины) Найти все действительные значения параметра c , при каждом из которых не найдется ни одной такой пары чисел (p, q) , чтобы функция

$$f(x) = qx^6 + c^2(p+c)x^3 - 2px - 2$$

удовлетворяла одновременно двум условиям

$$f(1) \leq -2p - 2 \text{ и } f(-1) \geq 0.$$

♦ Условие задачи можно переформулировать так: найти все действительные значения параметра c , при каждом из которых для **любой** пары чисел (p, q) функция

$$f(x) = qx^6 + c^2(p+c)x^3 - 2px - 2$$

удовлетворяет совокупности неравенств

$$\begin{cases} f(1) > -2p - 2, \\ f(-1) < 0. \end{cases}$$

Для нашей функции совокупность неравенств

$$\begin{cases} f(1) > -2p - 2, \\ f(-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q + c^2(p+c) - 2p - 2 > -2p - 2, \\ q - c^2(p+c) + 2p - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q + c^2p + c^3 > 0, \\ q + p(2 - c^2) - 2 - c^3 < 0 \end{cases}$$

выполняется при любых p, q .

Рассмотрим всевозможные прямые $q = kp + b$ в плоскости $(p; q)$. Решением каждого из неравенств совокупности является полуплоскость, ограниченная прямой, уравнением которой является соответствующее равенство.

• Если прямые пересекаются, то объединением полуплоскостей является внешность одного из углов между прямыми (рис. 17) (при этом системе неравенств будет удовлетворять один из углов). Отсюда следует, что в этом случае не вся плоскость удовлетворяет условию задачи.

Если прямые совпадают, но сама прямая условию не удовлетворяет (т. к. неравенства строгие), то опять решением является не вся плоскость.

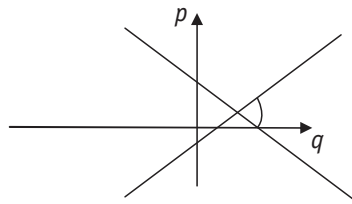


Рис. 17

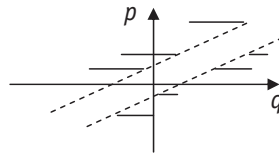


Рис. 18

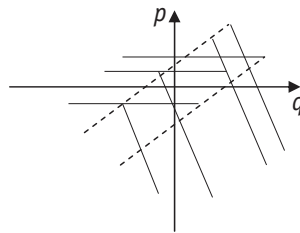


Рис. 19

• Если прямые параллельны, то объединением **может** быть вся плоскость (рис.19) (а может и не быть — рис.18). Прямые $q + c^2p + c^3 = 0$ и $q + p(2 - c^2) - 2 - c^3 = 0$

параллельны, но не совпадают, тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\begin{cases} c^2 = 2 - c^2 \Leftrightarrow c = \pm 1, \\ c^3 \neq -2 - c^3 \Leftrightarrow c \neq -1. \end{cases} \Leftrightarrow c = 1.$$

Проверяем, что при $c = 1$ решением совокупности неравенств

$$\begin{cases} q + p + 1 > 0, \\ q + p - 3 < 0 \end{cases}$$

действительно является вся плоскость — рис.20.



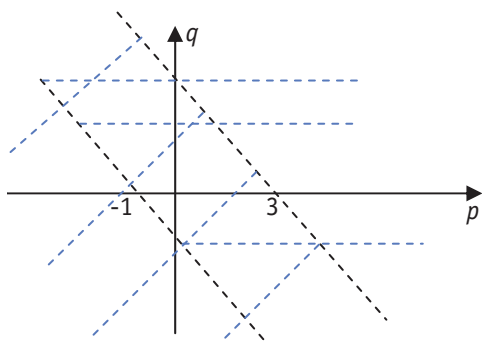


Рис. 20

Ответ. 1. ♦

Задачи, и это самые трудные задачи, в которых условия сформулированы так, что вообще не ясно, как их учесть при решении задачи.

Приведем пример задачи, в условии которой нет и намека на параметр. Однако решение сводится именно к задаче с параметром.

Пример 16. (МГУ, 1998, мехмат) Фигура задана на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - y^2)^2 - 6(x^2 - y^2) - (x - y)^2 - 7x + 5y + 1 < 0, \\ y > 1 + x. \end{cases}$$

Сколько интервалов на прямой $y = x - 3$ образует ортогональная проекция этой фигуры на указанную прямую?

♦ Нарисуем произвольную фигуру в плоскости $(x; y)$ и начертим две заданные в условии прямые $y - x = -3$ и $y - x = 1$. Теперь будем проектировать фигуру на прямую $y - x = -3$. Видим, что, если проектировать всю фигуру, то проекцией будет один промежуток (синий).



Но в условии надо проектировать лишь ту часть, которая расположена выше прямой $y - x = 1$. Теперь видно, что проекцией этой части фигуры является уже не один, а два промежутка (рис.21) (красные). Заметим, что проекция заданной фигуры на любую прямую, параллельную прямой $y - x = -3$ и расположенную ниже прямой $y - x = 1$, остается одной и той же. Мы будем проектировать на прямую $y - x = 0$.

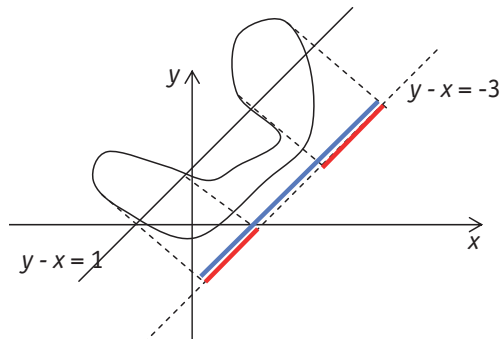


Рис. 21

Исходя из вида заданного основного неравенства, лучше ввести новую систему координат, в которой неравенство будет выглядеть проще, а прямая, на которую будем проектировать, будет одной из осей координат. Удобнее всего это сделать в новых переменных $\xi = y - x, \eta = y + x$,

тогда $x = \frac{\eta - \xi}{2}, y = \frac{\eta + \xi}{2}$ – рис.22.

Фигура в новых переменных задается теперь системой неравенств:

$$\begin{cases} (\xi\eta)^2 + 6\xi\eta - \xi^2 - \eta + 6\xi + 1 < 0, \\ \xi > 1. \end{cases}$$

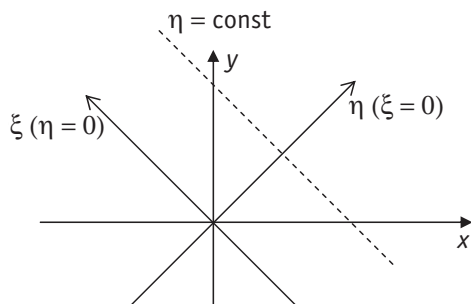


Рис. 22

Начертим теперь картинку в системе координат $(\xi; \eta)$ (рис.23).

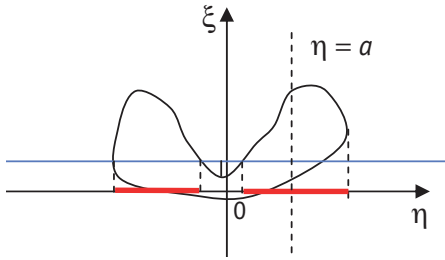


Рис. 23

Теперь ясно, что искомые промежутки можно получить как множество точек пересечения заданной фигуры и прямых $\eta = \text{const} = a$.

Задача свелась к нахождению числа промежутков «параметра» a , при которых система неравенств

$$\begin{cases} a^2 \xi^2 + 6\xi a - \xi^2 - a + 6\xi + 1 < 0, \\ \xi > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi^2(a^2 - 1) + 6\xi(a + 1) - (a - 1) < 0, \\ \xi > 1 \end{cases}$$

имеет решение.

Так как при старшей степени коэффициент зависит от параметра, придется рассматривать несколько случаев.

1. Если $a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$, то

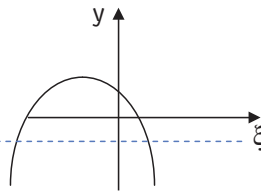
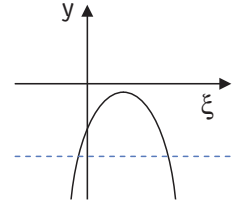
$$\begin{cases} \xi^2(a^2 - 1) + 6\xi(a + 1) - (a - 1) < 0, \\ \xi > 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ \xi < 0, \\ \xi > 1; \Leftrightarrow \emptyset. \end{cases} \text{ Как видно, решений нет.}$$

2. Если $a^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < a < 1$, то неравенство выполнено, по крайней мере, для достаточно больших по модулю ξ , т. к. ветви параболы

$$y(\xi) = \xi^2(a^2 - 1) + 6\xi(a + 1) - a + 1$$

направлены вниз (рис.24а,б).


Рис. 24 а) ($a^2 - 1 < 0$)

Рис. 24 б) ($a^2 - 1 < 0$)

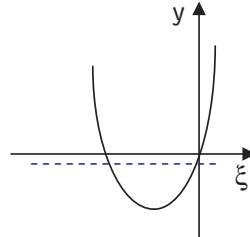
Это значит, что при любом значении a из промежутка $(-1;1)$ существует решение системы. Итак, появился первый промежуток на оси 0η (т. к. прямые $\eta = a$ имеют непустое пересечение с заданной фигурой), являющийся решением задачи.

Если $a^2 - 1 > 0$, то ветви параболы направлены вверх, и квадратный трехчлен принимает отрицательные значения, если дискриминант квадратного трехчлена положителен, т.е.

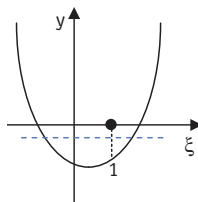
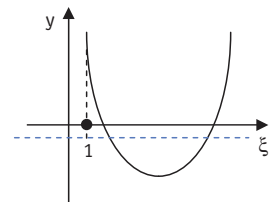
$$9(a+1)^2 + (a-1)(a^2-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a+5)(a+2) > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a \in (-5; -2) \cup (-1; +\infty)$. Но это происходит не обязательно при $\xi > 1$! (рис.25).


Рис. 25 ($a^2 - 1 > 0$)

Нас интересует существование отрицательных значений при $\xi > 1$. Это возможно в двух случаях (рис.26а,б): или точка $\xi = 1$ находится внутри корневого промежутка, или слева от него..


Рис. 26 а) ($a^2 - 1 > 0$)

Рис. 26 б) ($a^2 - 1 > 0$)

Если (рис.26а) точка $\xi = 1$ находится внутри корневого промежутка (где $y(\xi) < 0$), то

решение существует, если $y(1) < 0$ (дискриминант в этом случае автоматически положительный),



т. е. $a^2 + 5a + 6 < 0 \Leftrightarrow a \in (-3; -2)$.

Если (рис.26б) точка $\xi = 1$ находится вне промежутка, где $y(\xi) < 0$, то решение существует, если дискриминант положительный и вершина параболы находится правее точки $\xi = 1$, т. е. если

$$\begin{cases} \xi_{\text{верш}} > 1, \\ D > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3(a+1)}{a^2-1} > 1, \\ D > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < a < 1, \\ D > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-1; 1)$$

Но у нас $a^2 > 1$, поэтому пересечение существует, если $a \in (-3; -2)$, т. е. появился второй промежуток на оси 0η .

Итак, пересечение существует, если $a \in (-3; -2) \cup (-1; 1)$, т.е. два интервала на прямой $y = x - 3$.

Ответ. 2 ♦

Заключение

Мы закончили знакомство с самой «уязвимой» темой алгебры. Именно знакомство, потому что мы не хотели, да и не смогли бы, продемонстрировать все многообразие задач и методов решения задач с параметрами. Мы попробовали показать роль графиков в исследовании задач: в плоскости с параметром или в обычной координатной плоскости, и как важно уметь исследовать поведение квадратного трехчлена. Мы хотели только показать, что задачи с параметрами требуют к себе другого отношения, чем задачи без параметра: надо уметь найти что-то общее для всего множества решений данной задачи. Некоторые задачи решены несколькими способами: коротким или длинным, простым или сложным. При этом нельзя говорить, что один способ лучше или хуже другого. Это сделано для того, чтобы было ясно, что здравый смысл имеет большое значение, а он у людей разного возраста и образования разный. Учителя, хорошие школьники и олимпиадники думают по-разному: у них разный опыт, разный багаж знаний, разный уровень математической сообразительности и изобретательности. Все это не важно – каждый выбирает свой способ решения. Иногда решение в учебнике или пособии может оказаться совсем «чужим». Не надо этого пугаться – способов решений может быть несколько. Иногда они очень близки (выкладки почти одинаковы), но идеи, лежащие в основе, разные. Выбирайте более близкий вам по духу способ рассуждений. Удачи всем!