Колесникова София Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ, специалист ЗФТШ при МФТИ. Окончила МГУ, имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».

Задачи с параметром

Часть 2

В этой части статьи мы продолжим исследовать уравнения с параметром. Мы не ставим себе цель охватить все типы задач с параметрами – это просто невозможно – и лишь приведём примеры наиболее часто встречающихся из них, например, показательных уравнений.

Хотим обратить внимание на то, что часто одна и та же задача может быть решена несколькими совершенно разными способами. Причём выбор способа зависит не только от знаний учащихся, но и от эрудиции решающего, а также от желания решить задачу проще, красивее или быстрее.

§ 4. Уравнения с параметром, сводящиеся к исследованию квадратного трёхчлена

Иногда для решения уравнения или неравенства приходится делать замену переменных. Например, очень часто на вступительных экзаменах в самые разные вузы встречаются уравнения с параметром для показательных уравнений. Сделав замену переменных $c^x = t$ (или какую-нибудь другую), обычно получают квадратное уравнение. Затем школьники решают для этого уравнения задачу, поставленную для показательного уравнения, забывая о том, что произведённая замена переменных задаёт ограничения на его решения – получается задача, в которой встаёт вопрос об исследовании не просто решений, а только положительных решений нового уравнения. Поэтому после замены переменных надо обязательно переформулировать задачу для нового уравнения или неравенства.

Приведём два очень похожих примера, которые могут быть решены как одним и тем же способом, так и разными.

Пример 7. (Московский государственный университет сервиса) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(\frac{1}{25}\right)^x - (20+a)5^{-x} + 5^2 a - 5^3 = 0$$

имеет единственный корень.

♦Сделаем сначала замену переменных: $5^{-x} = t, t > 0$, тогда уравнение примет вид $t^2 - (20+a)t + 5^2 a - 5^3 = 0$.

Первый способ

Школьники быстро «решают» задачу, считая, что единственный корень существует только в случае, если дискриминант равен 0, т. е. если

$$D = (20+a)^2 - 100a + 500 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-30)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 30.$$

Но они, во-первых, часто забывают проверить, что единственный корень квадратного уравнения является корнем показательного уравнения, т. е. является положительным числом (проверьте это, например, для уравнения $2^{2x} + 2^x(1-a) - a = 0$). Во-вторых, забывают, что теперь задача состоит в том, чтобы найти все значения параметра a, при которых уравнение $t^2-(20+a)t+5^2a-5^3=0$ имеет единственный положительный корень. А это возможно не только тогда, когда дискриминант равен 0, но и тогда, когда дискриминант положителен, но а) или корни имеют разные знаки, т. е. $t_1t_2<0$, б) или один корень равен 0, а другой положителен, т. е. $\begin{cases} t_1t_2=0, \\ t_1=0, \\ t_2>0. \end{cases}$

В нашем случае это будет тогда, когда или $\begin{cases} a\neq 30, \\ 25a-125<0 \end{cases} \Leftrightarrow a<5$, или выполнены условия $\begin{cases} t_1=0, \\ t_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5, \\ t_2=25. \end{cases}$

Собрав а) и б), получим, что $a\leq 5$.

Отсюда следует, что $a\in(-\infty;5]\cup\{30\}$.

Замечание. Чтобы не забывать, что речь пойдёт о положительных решениях, лучше сразу записывать новое уравнение в виде системы: $\begin{cases} t^2-(20+a)t+25a-125=0, \\ t>0. \end{cases}$

Второй способ

Можно сразу решить уравнение:

$$\begin{cases} t^2-(20+a)t+25a-125=0, \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t-25)(t-(a-5))=0, \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>0, \\ \left[\begin{array}{l} t=25, \\ t=a-5. \end{array}\right. \end{cases}$$

Как видно, один корень существует при любом a, поэтому решение единственно, если или второй корень совпадает с первым, или не является корнем показательного уравнения (не является положительным числом), т. е. выполнены условия:

$$\left[\begin{array}{l} a-5=25, \\ a-5\leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=30, \\ a\leq 5. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;5]\cup\{30\}$. ♦

Пример 8. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение

$$49^x-b\cdot 7^x+2b+5=0$$

имеет единственный корень.

♦ Сделаем сначала, как всегда, замену переменных: $7^x=t, t>0$, тогда уравнение примет вид $\begin{cases} t^2-bt+2b+5=0, \\ t>0. \end{cases}$

Второй, наиболее простой способ решения предыдущего примера, здесь не удобен, т. к. дискриминант не является полным квадратом и корни уравнения выражаются через радикалы.

Первый способ (в «лоб»)

Задача свелась к нахождению таких значений параметра b, при которых квадратное уравнение имеет одно положительное решение.

Это имеет место, во-первых, если квадратное уравнение имеет единственное решение и оно положительно, т. е.

$$\begin{cases} D=b^2-8b-20=0, \\ t=\dfrac{b}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=10, \\ b=-2 \end{array}\right. \\ t=\dfrac{b}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=10, \\ t=5. \end{cases}$$

Во-вторых, одно положительное решение будет и тогда, когда дискриминант положителен, но решения разных знаков, или одно нулевое, а другое положительное. Это имеет место, если

$\begin{cases} D>0, \\ t_1t_2 = 2b+5<0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b\in(-\infty;-2)\cup(10;+\infty), \\ 2b+5<0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b\in\left(-\infty;-\dfrac{5}{2}\right)$, или $\begin{cases} D>0, \\ t>0, \\ \left[\begin{array}{l} t=0, \\ t=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$

Отсюда следует, что $b\in\left(-\infty;-\dfrac{5}{2}\right)\cup\{10\}$.

Второй способ

В отличие от предыдущего примера здесь дискриминант, как мы видели, не является полным квадратом. Решим задачу с помощью графика. Перепишем уравнение по-другому: $t(t-b)=-2b-5$.

Теперь построим параболу $y=t(t-b)$ при разных b (рис. 10а, б, в) и будем пересекать её прямыми $y=-2b-5$. Построение графика параболы без свободного члена оказывается довольно эффективным при решении многих задач на исследование квадратного трёхчлена, т. к. при этом не рассматривается дискриминант. Поэтому проще решаются, например, те задачи, решения которых в конечном счете не зависят от знака дискриминанта.

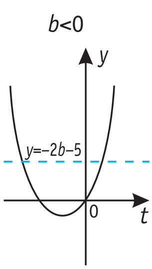

Рис. 10а

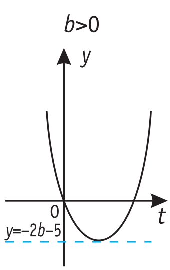

Рис. 10б

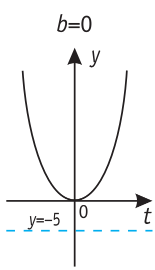

Рис. 10в

Видно (рис. 10а), что при $b<0$ положительное решение единственно, если

$-2b-5>0 \Leftrightarrow b<-\dfrac{5}{2}.$

Если (рис. 10б, в) $b\ge 0$, то $-2b-5<0$, и прямая $y=-2b-5$ может иметь единственное пересечение с параболой лишь в вершине, т. е. если

$-2b-5=y\left(t_{верш}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2b-5=-\dfrac{b^2}{4}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=10, \\ b=-2. \end{array}\right.$

Условию $b\ge 0$ удовлетворяет $b=10$.

Итак, решение единственно, если $a\in\left(-\infty;-\dfrac{5}{2}\right)\cup\{10\}$.

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{5}{2}\right)\cup\{10\}$. ♦

Пример 9. (МГУ, 1993, мехмат) Найти все значения b, при которых уравнение $9^x+\left(b^2+6\right)3^x-b^2+16=0$ не имеет решения.

♦ **Первый способ**

Пусть $3^x=t$, $t>0$, тогда уравнение примет вид $t^2+\left(b^2+6\right)t-b^2+16=0$.

Чаще всего школьники считают, что задача не имеет решений, если дискриминант уравнения $t^2+\left(b^2+6\right)t-b^2+16=0$ отрицательный, т. е.

$D=b^4+12b^2+36+4b^2-64=$

$=b^4+16b^2-28<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b\in\left(-\sqrt{2\sqrt{23}-8};\sqrt{2\sqrt{23}-8}\right)$ (рис.11).

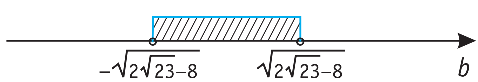

Рис. 11

Это верно для квадратного уравнения, но школьники забывают, что нас интересует отсутствие не любого решения квадратного уравнения, а лишь положительного. Поэтому задача не имеет решения и тогда, когда дискриминант неотрицательный, но уравнение не имеет положительных корней. Это имеет место, если или оба корня отрицательны, или оба равны нулю, или один равен 0, а другой отрицательный, т. е.

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t_1 t_2 = 16 - b^2 > 0, \\ t_1 + t_2 = -\left(b^2 + 6\right) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t_1 = 0 \Leftrightarrow 16 - b^2 = 0, \\ t_2 = -\left(b^2 + 6\right) < 0 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D \ge 0, \\ 16 - b^2 \ge 0 \end{cases}$$

(рис.12).

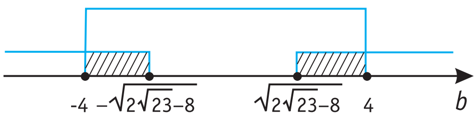

Рис. 12

Объединив все решения, получаем отрезок $[-4;4]$.

Второй способ

Запишем новое уравнение в виде системы

$$\begin{cases} t > 0, \\ t^2 + \left(b^2 + 6\right)t - b^2 + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ t\left(t + \left(b^2 + 6\right)\right) = b^2 - 16. \end{cases}$$

Теперь уже трудно забыть о том, что надо исследовать существование не произвольных, а положительных решений. Задача заключается в нахождении всех значений b, при которых квадратное уравнение не имеет положительного решения.

Воспользуемся эскизом графика квадратного трёхчлена $y(t) = t\left(t + \left(b^2 + 6\right)\right)$ (без свободного члена!) (рис. 13). Заметим, что $t_{верш.} = -\dfrac{b^2 + 6}{2}$.

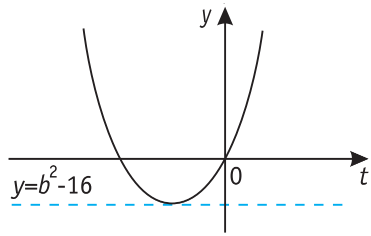

Рис. 13

Видно, что прямая $y = b^2 - 16$ не пересекает параболу при положительном t (т. е. квадратный трёхчлен не имеет положительного корня), если $b^2 - 16 \le 0 \Leftrightarrow b \in [-4;4]$.

Ответ: $[-4;4]$. ♦

Пример 10. (МГУ, 1998, химфак) При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6}\right)^x +$$

$$+\left(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} - \sqrt{x^2 - 3ax + 6}\right)^x = 2\left(\sqrt{2}\right)^x$$

имеет единственное решение?

♦ Сначала упростим левую часть уравнения. Замечаем, что

$$\left(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} - \sqrt{x^2 - 3ax + 6}\right)^x =$$

$$= \frac{2^x}{\left(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6}\right)^x}.$$

Пусть

$$t = \left(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6}\right)^x, t > 0,$$

тогда уравнение примет вид

$$t + \frac{2^x}{t} = 2 \cdot 2^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2 \cdot 2^{\frac{x}{2}} \cdot t + 2^x = \left(t - 2^{\frac{x}{2}}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 2^{\frac{x}{2}}.$$

Возвращаемся к старым переменным:

$$\left(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6}\right)^x = 2^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\lg\left(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6}\right) = x\lg\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ \sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}=\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Мы видим, что $x=0$ является решением при любом значении параметра a. Поэтому для единственности решения уравнения необходимо и достаточно, чтобы второе уравнение совокупности не имело решений.

Заметим, что

$$\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6} \equiv$$

$$\equiv \sqrt{\left(x^2-3ax+6\right)+2}+\sqrt{\left(x^2-3ax+6\right)}.$$

Поэтому,

- если $x^2-3ax+6>0$, то $\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}>\sqrt{2}$,
- если $x^2-3ax+6=0$, то $\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}=\sqrt{2}$.

Отсюда следует, что заданное уравнение имеет единственное решение ($x=0$ является решением данного уравнения при любом a!), если уравнение $x^2-3ax+6=0$ не имеет решений, что имеет место тогда и только тогда, когда

$$9a^2-24<0 \Leftrightarrow a\in\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3};\frac{2\sqrt{6}}{3}\right).$$

Следовательно, заданное уравнение при таких a имеет единственное решение.

Ответ: $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3};\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. ♦

Пример 11. (Московская государственная академия тонкой химической технологии им. М. В. Ломоносова.) Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение

$$log_5\left(x^2+7x+a\right)-1=log_5\left(2x+3\right)$$

не имеет решений.

♦Преобразуем уравнение:

$$log_5\left(x^2+7x+a\right)-1=log_5\left(2x+3\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow log_5\left(x^2+7x+a\right)=log_5 5\left(2x+3\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(x^2+7x+a\right)=5\left(2x+3\right), \\ 2x+3>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-3x-15+a=0, \\ x>-\frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Первый способ (решение «в лоб»)

Система легко исследуется:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-3x-15+a=0, \\ x>-\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{3\pm\sqrt{69-4a}}{2}, \\ x>-\frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Из формул для корней видно, что если $69-4a\geq 0 \Leftrightarrow a\leq\frac{69}{4} \Leftrightarrow a\leq 17\frac{1}{4}$, то уравнение всегда имеет, по крайней мере, один корень $x=\frac{3+\sqrt{69-4a}}{2}$. Поэтому решений задачи нет тогда и только тогда, когда квадратное уравнение не имеет корней, т. е. если $a>17\frac{1}{4}$. Наименьшим целым решением является число 18.

Второй способ

Решим задачу графически. Для этого перепишем уравнение в системе по-другому:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-3x-15+a=0, \\ x>-\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-3x=15-a, \\ x>-\frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Теперь построим эскиз графика параболы $y = x^2 - 3x \equiv x(x-3)$ и рассмотрим её часть при $x > -\frac{3}{2}$, при этом $y\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4}$ (рис.14).

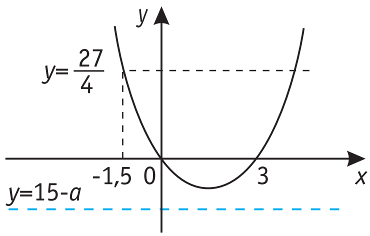

Рис. 14

Видно, что система, а значит, и заданное уравнение, не имеет решений, если $(15-a)$ меньше значения функции в вершине параболы, т. е. $15 - a < \frac{9}{4} - \frac{9}{2} \Leftrightarrow a > 17\frac{1}{4}$.

Как видим, выкладки те же самые, но из графика немедленно следуют решения ещё нескольких не поставленных в данном примере задач: система, а значит, и заданное уравнение, имеет единственное решение при

$$\left[\begin{array}{l} 15 - a = -\frac{9}{4}, \\ 15 - a \geq \frac{27}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in \left\{17\frac{1}{4}\right\} \cup \left(-\infty; \frac{33}{4}\right],$$

два различных решения при

$\frac{9}{4} < 15 - a < \frac{27}{4} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{33}{4}; \frac{69}{4}\right)$, т. е. таким образом можно решить и другие задачи для заданного уравнения.

(Обратите внимание: построение графика параболы $y = x^2 - 3x \equiv x(x-3)$ без свободного члена гораздо проще!)

Ответ: 18. ♦

Приведём пример задачи, при формулировке которой нет и намёка на параметр – задача с «псевдопараметром».

Пример 12. (Московский государственный технологический университет «Станкин») Найдите область значений функции $y = \frac{\sqrt{x-1} + 2x - 2}{x-2}$.

♦Так как x входит линейно под корнем и вне его, удобно сделать сначала замену переменных: $t = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = t^2, \\ t \geq 0. \end{cases}$

Теперь формула примет вид $y = \frac{2t^2 + t}{t^2 - 1}$, и задача сводится к отысканию множества значений функции $y = \frac{2t^2 + t}{t^2 - 1}$ на $[0;1) \cup (1;+\infty)$.

Задачу можно исследовать двумя принципиально различными методами – без дифференцирования (тогда задача окажется под силу девятикласснику) или с дифференцированием (это под силу, как выяснится, не всякому выпускнику). Каждый из этих методов, в свою очередь, можно реализовать несколькими способами.

Решим сначала без дифференцирования. В условии нет ни слова о параметрах. Как её решать? Можно построить эскиз графика, но тогда придётся дифференцировать. Перепишем условие задачи иначе:

$$\begin{cases} y = \frac{t + 2t^2}{t^2 - 1}, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2(y-2) - t - y = 0, \\ t \geq 0, \\ t \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2(y-2) - t - y = 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2(y-2) - t = y, \\ t \geq 0. \end{cases}$$

Получилась задача об отыскании всех значений y, которые он принимает при изменении t в области определения функции, т. е. всех значений параметра y, при которых уравнение $t^2(y-2) - t - y = 0$ имеет, по крайней мере, одно неотрицательное решение. Решать будем именно эту задачу.

Так как при старшей степени коэффициент зависит от параметра, то сначала рассмотрим случай, когда он обращается в 0: $y = 2 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow \varnothing$, т. к. $t \geq 0$. Итак, $y \neq 2$.

Первый способ (так сможет решить девятиклассник)

Прикинем эскиз параболы

$$z=(y-2)t^2-t=t\left(t-\frac{1}{y-2}\right)(y-2)$$

(обратите внимание на то, что мы строим параболу $z=(y-2)t^2-t$, а не $z=(y-2)t^2-t-y$, чтобы не исследовать дискриминант) (рис. 15). Теперь надо найти значения параметра y, при которых прямая $z=y$ пересекает параболу при неотрицательных t. Видно, что если $y-2>0$ (рис. 15а), то при положительных t всегда существует пересечение. Если же $y-2<0$ (рис. 15б), то пересечение при неотрицательных t существует при $y\le 0$.

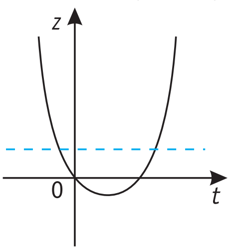

Рис. 15а

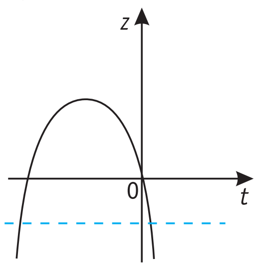

Рис. 15б

Ответ: $(-\infty;0]\cup(2;+\infty)$.

Второй способ (так сможет решить девятиклассник)

Когда уравнение $(y-2)t^2-t-y=0$ имеет решения, но среди них нет ни одного неотрицательного решения? Тогда и только тогда, когда оно имеет решения, но они отрицательны. Это значит, что выполнены условия: дискриминант неотрицателен, произведение корней положительно (они имеют одинаковые знаки) и сумма корней отрицательна. Используя теорему Виета

$$\begin{cases} D\ge 0,\\ t_1t_2=\dfrac{-y}{y-2},\\ t_1+t_2=\dfrac{-1}{y-2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+4y^2-8y\ge 0,\\ \dfrac{-y}{y-2}>0,\\ \dfrac{-1}{y-2}<0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\in\left(-\infty;1-\dfrac{\sqrt3}{2}\right]\cup\left[1+\dfrac{\sqrt3}{2};+\infty\right),\\ y<2,\\ y>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y\in\left(0;1-\frac{\sqrt3}{2}\right]\cup\left[1+\frac{\sqrt3}{2};2\right).$$

Исключив из оставшегося промежутка, в котором решение существует, число 2, получаем, что уравнение $(y-2)t^2-t-y=0$ имеет, по крайней мере, одно неотрицательное решение, если $y\in(-\infty;0]\cup(2;+\infty)$.

Третий способ (так сможет решить девятиклассник) – решение «в лоб»

Выпишем корни уравнения

$$t=\frac{1\pm\sqrt{4y^2-8y+1}}{y-2},$$

$$y\in\left(-\infty;1-\frac{\sqrt3}{2}\right]\cup\left[1+\frac{\sqrt3}{2};\infty\right).$$

Запишем условие неотрицательности хотя бы одного из них:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-2>0,\\ 1+\sqrt{4y^2-8y+1}\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases} y-2>0,\\ 1-\sqrt{4y^2-8y+1}\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases} y-2<0,\\ 1-\sqrt{4y^2-8y+1}\le 0\end{cases} \Leftrightarrow y\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)\\ \begin{cases} y-2<0,\\ 1+\sqrt{4y^2-8y+1}\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.\end{array}\right.$$

Видно, что если $y>2$, то один неотрицательный корень заведомо существует; если $y<2$ то неотрицательный корень существует, если $y\le 0$.

Ответ: $(-\infty;0]\cup(2;+\infty)$. ♦

Четвёртый способ (решает одиннадцатиклассник)

Найдём множество значений функции $y=\dfrac{2t^2+t}{t^2-1}$ на $[0;1)\cup(1;+\infty)$ с помощью производной. Сначала найдём производную

$$y'=-\frac{t^2+4t+1}{\left(t^2-1\right)^2}=$$

$$=-\frac{\left(t-\left(-2-\sqrt{3}\right)\right)\left(t-\left(-2+\sqrt{3}\right)\right)}{(t-1)^2(t+1)^2},$$

затем точки, в которых производная равна нулю:

$$y'=0\Leftrightarrow-\frac{\left(t-\left(-2-\sqrt{3}\right)\right)\left(t-\left(-2+\sqrt{3}\right)\right)}{(t-1)^2(t+1)^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=-2\pm\sqrt{3},$$

производная y' не существует при $t=\pm 1$.

Итак, критических точек 4, но оба корня числителя и один корень знаменателя отрицательны – точки находятся вне области определения. Критическая точка в области определения одна: $t=1$, в ней производная не существует, а при переходе через точку разрыва производная не меняет знак (рис. 16), поэтому в области определения производная отрицательна (это не значит, что функция монотонно убывает в области определения, т. к. область определения не является связным множеством) и на каждом из промежутков $[0;1)$ и $(1;+\infty)$ функция убывает (рис.16).

Рис. 16

Осталось выяснить, в каких пределах изменяется функция на промежутках. Замечаем, что $y(0)=0$. В остальных «граничных» точках значений нет – надо вычислять пределы, а эта задача не всем под силу, т. к. в школьной программе нет понятия предела.

Для этого преобразуем формулу к более удобному для исследования виду – выделим целую часть функции: $y=\dfrac{2t^2+t}{t^2-1}\equiv$

$$\equiv\frac{2t^2-2+2+t}{t^2-1}\equiv 2+\frac{t+2}{(t-1)(t+1)}.$$

Тогда $\lim\limits_{t\to 1-0}\left(2+\dfrac{t+2}{(t-1)(t+1)}\right)=-\infty$,

$$\lim_{t\to 1+0}\left(2+\frac{t+2}{(t-1)(t+1)}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{t\to +\infty}\left(2+\frac{t+2}{(t-1)(t+1)}\right)=2.$$

Отсюда следует (т. к. функция на промежутках непрерывна, есть ли соответствующая теорема о промежуточных значениях непрерывной функции в школьной программе?), что на $[0;1)$ функция принимает все значения из промежутка $(-\infty;0]$, а на $(1;+\infty)$ функция принимает все значения из промежутка $(2;+\infty)$. Как видим, решение не самое простое. Это ещё раз говорит о том, что очень важно уметь работать с квадратным трёхчленом.

Ответ: $(-\infty;0]\cup(2;+\infty)$.

Пример 13. (Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $3(x+a)^3-(3x-a)^3-4=0$ имеет ровно два решения.

♦Преобразуем сначала левую часть уравнения:

$$3(x+a)^3-(3x-a)^3-4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x^3-9x^2a-a^3+1=0.$$

Решений не видно.

Первый способ (так может решить и девятиклассник)

Если школьник представляет себе возможное поведение кубической параболы, то он сразу поймёт, что два решения кубическое уравнение имеет тогда и только тогда, когда один из корней имеет кратность два. Тогда левую часть уравнения можно представить в виде

$$6x^3-9x^2a-a^3+1=6(x-b)(x-c)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x^3-9x^2a-a^3+1\equiv$$

$$\equiv 6x^3-6bx^2-12x^2c+12bcx+6c^2x-6bc^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9x^2a-a^3+1\equiv$$

$$\equiv -(6b+12c)x^2+\left(12bc+6c^2\right)x-6bc^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a=6b+12c, \\ 12bc+6c^2=0, \\ 1-a^3=-6bc^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c=0, \\ a=1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-\dfrac{c}{2}, \\ 9a=6\cdot\dfrac{-c}{2}+12c\equiv 9c, \\ 1-a^3=6\dfrac{a}{2}a^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c=0, \\ a=1, \\ b=\dfrac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} b=-\dfrac{a}{2}, \\ c=a, \\ 4a^3=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1, \\ a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}. \end{array}\right.$$

Итак, уравнение имеет два решения при $a\in\left\{1;\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right\}$.

Замечание. При таком способе решения мы не только решили задачу, но нашли и решения:

$$\left[\begin{array}{l} a=1: x=0, x=\dfrac{3}{2}; \\ a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}: x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}, x=-\dfrac{1}{2\sqrt[3]{4}}. \end{array}\right.$$

На самом деле мы решили задачу: «решите уравнение $3(x+a)^3-(3x-a)^3-4=0$, если известно, что оно имеет два различных решения».

Второй способ (так может решать одиннадцатиклассник)

Будем решать поставленную задачу (не находя самих решений) графически. Для этого уравнение перепишем в виде $6x^3-9x^2a=a^3-1$.

Теперь построим эскиз графика левой части уравнения – функции

$y(x)=6x^3-9x^2a\equiv 6x^2\left(x-\dfrac{3}{2}a\right)$ (рис.17а, б).

Видно, что у функции есть два экстремума, и ровно два решения уравнение имеет тогда и только тогда, когда a^3-1 или равно 0, или значению функции в точке второго экстремума (где $x\neq 0$). Найдём точки экстремумов. Сначала находим производную $y'=18x(x-a)$, критические точки:

$y'=0 \Leftrightarrow x(x-a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=a \end{array}\right.$, затем значение функции в точке $x=a$: $y(a)=-3a^3$.

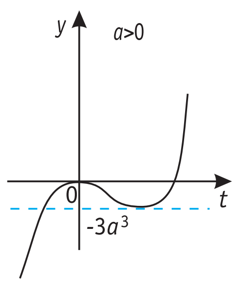

Рис. 17а

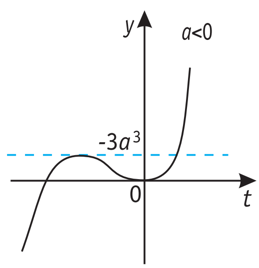

Рис. 17б

Теперь найдём

$$a:\left[\begin{array}{l} a^3-1=0, \\ a^3-1=-3a^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1, \\ a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}. \end{array}\right.$$

Ответ: $1;\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$. ♦

Предыдущие задачи решались как с дифференцированием, так и без него. Однако встречаются задачи, в которых нельзя обойтись без дифференцирования. Следующая задача без дифференцирования едва ли решится.

§5. Применение дифференцирования для решения задач с параметрами

Пример 14. (МФТИ, 2005) При каких значениях параметра a уравнение $\left|x^3\right|-x+a=0$ имеет единственное решение? Решить это уравнение для всех найденных значений a.

♦ **Первый способ**

Перепишем уравнение по-другому: $\left|x^3\right|-x+a=0 \Leftrightarrow \left|x^3\right|-x=-a$. Теперь построим эскиз графика функции

$$y(x)=\left|x^3\right|-x=\left[\begin{array}{l} x\left(x^2-1\right),\ x\geq 0; \\ -x\left(x^2+1\right),\ x<0. \end{array}\right. \quad \text{(рис.18)}$$

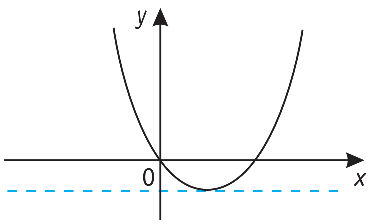

Рис. 18

Видно, что функция имеет минимум в области, где $x\geq 0$ и $y(x)=x^3-x$. Уравнение $\left|x^3\right|-x=-a$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $-a=y_{min}$. Найдём это значение. Для этого найдём производную $y'=3x^2-1$, затем критические точки: $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Но так как мы рассматриваем функцию при $x\geq 0$, то $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Отсюда

$$y_{min}=y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3\sqrt{3}}=-a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Второй способ

Перепишем уравнение по-другому: $\left|x^3\right|=x-a$. Теперь построим график функции $y(x)=\left|x^3\right|$ и прямую $y=x-a$. Видно, что пересечение единственно и происходит в области, где $x\geq 0$, если прямая является касательной к параболе (рис. 19).

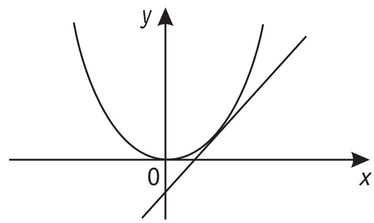

Рис. 19

Для этого найдём производную $y'=3x^2$. В точке касания

$$y'_{параб}(x_0)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0>0, \\ 3{x_0}^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x_0=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

и $y_{параб}(x_0)=y_{прям}(x_0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}-a \Leftrightarrow a=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Ответ: $a=\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.♦

Пример 15. (типа ЕГЭ - 2005, С5) Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $(2p-1)x^2+2(2p+1)x-1=0$ имеет хотя бы один корень, и число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения

$$\frac{3x-6}{p}=\frac{1}{\sqrt{x-\frac{1}{3}}-2}.$$

♦ Рассмотрим сначала первое уравнение.

1. При $p=\frac{1}{2}$ уравнение перестаёт быть квадратным и имеет единственное решение.

2. При $p\neq\frac{1}{2}$ решение существует, если дискриминант неотрицателен, т. е.

$$\frac{D}{4}\equiv D_1=4p^2+4p+1+2p-1=4p^2+6p\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p\left(p+\frac{3}{2}\right)\geq 0 \Leftrightarrow (\text{с учётом того, что } p\neq\frac{1}{2})$$

$p \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$

Итак, при $p = \left[\begin{array}{l} -\frac{3}{2}, \\ 0 \end{array}\right.$ уравнение имеет один корень (кратности 2) и при $p = \frac{1}{2}$ один простой корень.

При $p \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ уравнение имеет два различных корня.

Рассмотрим второе уравнение.

Сделаем замену переменных, положив $t = \sqrt{x - \frac{1}{3}}, t \ge 0, x - \frac{1}{3} = t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t^2 + \frac{1}{3}, \\ t \ge 0 \end{cases}$

(ОДЗ корня выполнено автоматически).

Тогда уравнение примет вид системы

$$\begin{cases} t \ge 0, \\ \frac{3t^2 - 5}{p} = \frac{1}{t - 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0, \\ p \ne 0, \\ (3t^2 - 5)(t - 2) = p. \end{cases}$$

Построим эскиз графика функции

$y(t) = (t - 2)(3t^2 - 5) \equiv$

$\equiv 3(t - 2)\left(t - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(t + \sqrt{\frac{5}{3}}\right) =$

$= 3t^3 - 6t^2 - 5t + 10$ (рис.20).

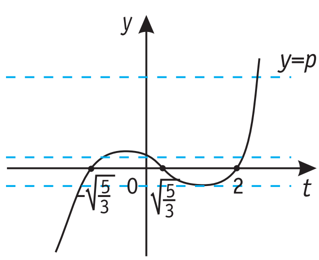

Рис. 20

Видно, что у функции два экстремума. Найдём их. Вычисляем

$y' = 9t^2 - 12t - 5 = 9\left(t + \frac{1}{3}\right)\left(t - \frac{5}{3}\right)$, теперь найдём стационарные (критические) точки:

$y' = 0 \Leftrightarrow t = \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{3}, \\ \frac{5}{3}. \end{array}\right.$

Расставляем знаки производной (рис. 21):

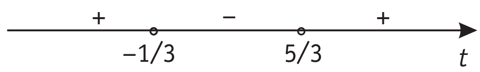

Рис. 21

Теперь видно, что значение параметра, при котором имеем то или иное число неотрицательных корней, зависит от значения функции в 0 и в точке минимума. Найдём этот минимум.

Вычисляем $y(0) = 10$ и $y\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{10}{9}$.

Как видно из эскиза, два различных неотрицательных решения имеем при

$p \in \left(-\frac{10}{9}; 0\right) \cup (0; 10]$, одно неотрицательное решение при $p \in \left\{-\frac{10}{9}\right\} \cup (10; +\infty)$.

Итак, два различных решения (рис. 22) каждое из двух уравнений имеет при $p \in (0; 0{,}5) \cup (0{,}5; 10]$ (рис. 22).

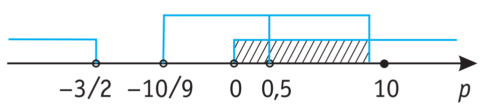

Рис. 22

При остальных p количество решений уравнений не совпадает.

Ответ: $(0; 0{,}5) \cup (0{,}5; 10]$. ♦

§6. Задачи, решения которых опираются на свойства входящих в уравнение функций

Задачу о нахождении решений уравнения $f(x, a) = 0$ при всех значениях a не надо путать с другой, в которой надо найти все значения x, удовлетворяющие уравнению при любом действительном a.

В первом случае надо выяснить, что происходит с решением при каждом фиксированном значении a:

при некоторых a решение существует и его надо найти, при других a решение не существует вовсе; а во втором – найти такие x, которые являются решением для всех действительных значений a одновременно.

Пример 16. (МГУ, 1975, филол. ф-т) Найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$2\log_{2+a^2}\left(4-\sqrt{7+2x}\right)=\log_{2+a^2x^2}(4-3x)$$

при любом действительном a.

♦ В задаче опять переменные поменялись своими обычными ролями.

Перепишем уравнение, используя определение логарифма с переменным основанием:

$$2\log_{2+a^2}\left(4-\sqrt{7+2x}\right)=\log_{2+a^2x^2}(4-3x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\ln\left(4-\sqrt{7+2x}\right)}{\ln\left(2+a^2\right)}=\frac{\ln(4-3x)}{\ln\left(2+a^2x^2\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\left(2+a^2x^2\right)\ln\left(4-\sqrt{7+2x}\right)=$$

$$=\ln\left(2+a^2\right)\ln(4-3x).$$

По условию уравнение удовлетворяется при любом действительном a. Так как a входит только в квадрате, то любопытно посмотреть, что происходит, когда a^2 принимает свое наименьшее значение, т. е. при $a=0$. К тому же видно, что при таком a уравнение существенно упрощается, т. к. сокращается по одному логарифму справа и слева. Подставляем $a=0$ в уравнение:

$$\left(2\ln\left(2+a^2x^2\right)\ln\left(4-\sqrt{7+2x}\right)\right)=$$

$$=\left(\ln\left(2+a^2\right)\ln(4-3x)\right)\Big|_{a=0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\left(4-\sqrt{7+2x}\right)=\ln(4-3x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(4-\sqrt{7+2x}\right)^2=(4-3x),\\ 4-\sqrt{7+2x}>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}19+5x=8\sqrt{7+2x},\\ 4-\sqrt{7+2x}>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{7+2x}=3,\\ \sqrt{7+2x}=\frac{1}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-\frac{87}{25}.\end{array}\right.$$

Замечательно, что при одном конкретном значении a уравнение выполняется только в двух точках. Значит, только их и надо проверять. Подставим их последовательно в уравнение.

Если $x=1$, то

$$2\ln\left(2+a^2\right)\ln\left(4-\sqrt{7+2}\right)=\ln\left(2+a^2\right)\ln(4-3)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 0=0$ при любом a, т. е. $x=1$ является решением задачи.

Если $x=-\frac{87}{25}$, то $2\ln\left(2+a^2\frac{87^2}{25^2}\right)\ln\left(4-\frac{1}{5}\right)=$

$$=\ln\left(2+a^2\right)\ln\left(4+\frac{3\cdot 87}{25}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\left(2+a^2\frac{87^2}{25^2}\right)\ln\left(3\frac{4}{5}\right)=$$

$$=\ln\left(2+a^2\right)\ln\left(4+\frac{3\cdot 87}{25}\right).$$

Ясности нет. Надо подставить ещё какое-нибудь «удобное» a, например, $a^2=1\frac{4}{5}$, при котором опять по одному логарифму сократится:

$$2\ln\left(2+\frac{9}{5}\cdot\frac{87^2}{25^2}\right)\ln\left(3\frac{4}{5}\right)=$$

$$=\ln\left(2+1\frac{4}{5}\right)\ln\left(4+\frac{3\cdot 87}{25}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{250+9\cdot 87^2}{125}\right)=\ln\left(\frac{361}{25}\right).$$

Видно, что равенства нет. Следовательно, $x=-\frac{87}{25}$ не является решением.

Ответ: 1.♦

Встречается большое количество задач, в которых невозможно найти всё множество решений, да нас об этом и не просят. Поэтому приходится искать способ решить поставленную задачу, не имея в распоряжении всего множества решений данного уравнения или неравенства, например, поискать специальные свойства входящих в уравнение функций (чётность, монотонность, ограниченность множества значений и т. д.), которые позволят судить о существовании некоторого специального множества решений. Сейчас мы приведём примеры такого типа.

Пример 17. (МГУ, 1990, мехмат) Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение $b^2x^2-btg\left(\cos x\right)+1=0$ имеет единственное решение.

♦В уравнение переменная входит очень сложно, решить его при любом b невозможно. Поэтому теперь необходимо более внимательно присмотреться к самому уравнению. Заметим, что x входит в квадрате и под знаком косинуса. Что в этом общего? Обе функции чётные. Отсюда следует, что, если $x=a$ – решение уравнения, то $x=-a$ тоже решение, а, значит, если $a\neq -a$, то уравнение имеет, по крайней мере, два различных решения. Если уравнение имеет единственное решение, то $a=-a\Leftrightarrow a=0$. Итак, для существования единственного решения необходимо, чтобы уравнение имело корень, равный 0. Подставим $x=0$, чтобы найти все b, при которых это имеет место:

$b^2x^2-btg\left(\cos x\right)+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow btg1=1\Leftrightarrow b=ctg1$.

Часто школьники заканчивают на этом решение задачи. Но при этом b могут оказаться и другие решения у данного уравнения. Поэтому теперь надо решить уравнение при $b=ctg1$. Подставим

$b=ctg1:\ b^2x^2-ctg1\cdot tg\left(\cos x\right)+1=0$.

Уравнение не решается. Заметим, что под знаком tg стоит $\cos x$, а $\cos x$ изменяется от -1 до 1, значит, $tg(\cos x)$ изменяется от $tg\left(-1\right)=-tg1$ до $tg\,1$. Отсюда следует, что $-ctg1\cdot tg\left(\cos x\right)+1\equiv-\frac{tg\left(\cos x\right)}{tg1}+1$ изменяется от 0 до 2. Значит, оба слагаемые в уравнении неотрицательны, а тогда

$b^2x^2+\left(-ctg1\cdot tg\left(\cos x\right)+1\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b^2x^2=0,\\ ctg1\cdot tg(\cos x)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,\\ ctg1\cdot tg(\cos 0)\equiv 1\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0$. Других решений нет!

Ответ: $ctg1$.

При решении следующего примера придётся воспользоваться другими свойствами решений.

Пример 18. (МГУ, 1991, биофак) Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}2\left(a+2y\right)-y^2=\left(x-2\right)^2+z^2,\\ \left(xy+4\right)\sin\left(x+y\right)+\cos\left(y-x\right)=1,\\ \left(2-\dfrac{xyz\left(a-2\right)}{\sqrt{1-2xy}}\right)\left(atg^2z+x+y\right)=0.\end{cases}$$

имеет единственное решение.

♦Переменные входят в уравнение сложно – решить систему невозможно, да это и не требуется. Поэтому теперь необходимо более внимательно присмотреться к уравнениям. Заметим, что во второе и третье уравнения x и y входят так, что ничего не изменится, если их поменять местами. В первом уравнении сразу не видно, как они входят, поэтому преобразуем его:

$2\left(a+2y\right)-y^2=\left(x-2\right)^2+z^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a-z^2=\left(x-2\right)^2+\left(y-2\right)^2-4.$

Теперь видно, что и здесь x и y можно поменять местами. Значит, если есть решение $x=b,\ y=c,\ z=d,$ то есть и решение $x=c,\ y=b,\ z=d,$ притом если $b\neq c,$ то имеем два различных решения. Отсюда следует, что если единственное решение существует, то в нём $b=c$, т. е. $x=y$. Подставим $x=y$ в систему. Тогда она примет вид

$$\begin{cases} 2(a+2x)-x^2=(x-2)^2+z^2,\\ (x^2+4)sin(2x)=0,\\ \left(2-\dfrac{x^2z(a-2)}{\sqrt{1-2x^2}}\right)(atg^2z+2x)=0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2a-z^2-2(x-2)^2+4=0,\\ (x^2+4)sin(2x)=0,\\ \left(2-\dfrac{x^2z(a-2)}{\sqrt{1-2x^2}}\right)(atg^2z+2x)=0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2a-z^2-2(x-2)^2+4=0,\\ x=\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z},\\ \left(2-\dfrac{x^2z(a-2)}{\sqrt{1-2x^2}}\right)(atg^2z+2x)=0. \end{cases}$$

В третьем уравнении в знаменателе под корнем стоит $1-2x^2$, поэтому $1-2x^2>0$, значит, $1-\dfrac{k^2\pi^2}{2}>0\Leftrightarrow k=0\Leftrightarrow x=0$. Теперь $x=0$ подставим в систему и получим:

$$\begin{cases} x=0,\\ z^2=2a-4,\\ tgz=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=0,\\ z=\pm\sqrt{2(a-2)},\\ z=m\pi. \end{cases}$$

Отсюда следует, что для z решение единственно только для $a=2$. Многие школьники на этом заканчивают решение, но это неверно, т. к. при $a=2$ система может иметь и другие решения.

Проверим, нет ли других решений системы при $a=2$. Подставим $a=2$ в систему и получим:

$$\begin{cases} 2(2+2y)-y^2=(x-2)^2+z^2,\\ (xy+4)sin(x+y)+cos(y-x)=1,\\ 2(2tg^2z+x+y)=0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y^2+x^2+z^2-4(x+y)=0,\\ (xy+4)sin(x+y)+cos(y-x)=1,\\ x+y=-2tg^2z \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y^2+x^2+z^2+2tg^2z=0\Leftrightarrow x=y=z=0,\\ (4)sin(0)+cos(0)\equiv 1,\\ 0\equiv 0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=y=z=0$. Других решений нет.

Ответ: 2.♦

Пример 19. (МГУ, 1999, химфак) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left|\dfrac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2a\right|=a^2+1$

имеет нечётное число решений.

♦ Преобразуем заданное выражение, чтобы x входил «посимметричнее»:

$$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2a\right|=a^2+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|x\frac{\left(2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}\right)}{\left(2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}\right)}+2a\right|=a^2+1.$$

Теперь видно, что

$$f(x)=\frac{x\left(2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}\right)}{2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}}=f(-x),$$

т. е. $f(x)$ – чётная функция.

Отсюда следует, что, если $x=a$ – решение уравнения, то $x=-a$ тоже решение. Поэтому, если уравнение имеет нечётное число решений, то будет чётное число ненулевых решений, а нечётное число решений будет, если решением будет ещё и 0. Найдём a, при которых уравнение имеет решение $x=0$. Подставим $x=0$ в уравнение, получим

$$|2a|=a^2+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2a=a^2+1,\\ 2a=-a^2-1 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=1,\\ a=-1. \end{array}\right.$$

Проверим, действительно ли при этих a уравнение имеет нечётное (конечное) число решений:

$$a=1:\left|\frac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}+2\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}+2=2,\\ \dfrac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}+2=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}=0,\\ \dfrac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0,$$

т. к. второе уравнение совокупности не имеет решений (левая часть положительна и при $x>0$, и при $x<0$). Поэтому при $a=1$ уравнение имеет одно решение: $x=0$.

$$a=-1:\left|\frac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}-2\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}-2=2,\\ \dfrac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}-2=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}=4,\\ x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=1+\dfrac{8}{x-4},\\ x=0.\end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности исследуем графически.

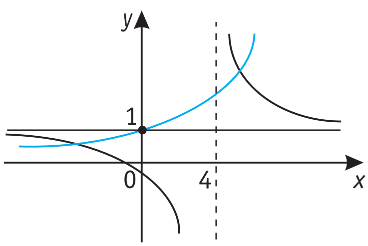

Рис. 23

Видно (рис. 23), что гипербола пересекается с экспонентой в двух точках. Поэтому при $a=-1$ имеем три решения.

Ответ: ±1. ♦

Пример 20. (МГУ, 2003, биофак) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{a-f(x)}=0,\\ y^2+\left(a-5\cdot10^6\right)y+25\cdot10^{10}=0,\ \text{где}\\ z^2+5\cdot10^3z+a=0,\end{cases}$$

$$f(x)=|x-1|+\left|x-2^2\right|+\left|x-3^2\right|+\ldots+\left|x-203^2\right|,$$

имеет хотя бы одно решение.

♦Второе и третье уравнения системы – квадратные. Они имеют решения, если их дискриминанты неотрицательны, т. е. если имеет решение система неравенств:

$$\begin{cases}D_1=\left(a-5\cdot10^6\right)^2-100\cdot10^{10}\ge0,\\ D_2=25\cdot10^6-4a\ge0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-10^7a+24\cdot10^{12}\ge0,\\ a\le625\cdot10^4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\in\left(-\infty;4\cdot10^6\right]\cup\left[6\cdot10^6;+\infty\right),\\ a\le625\cdot10^4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\in\left(-\infty;4\cdot10^6\right]\cup\left[6\cdot10^6;6{,}25\cdot10^6\right]$$ (рис. 24).

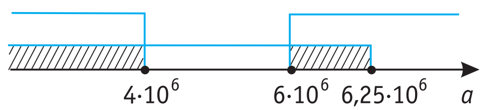

Рис. 24

Уравнение $\sqrt{a-f(x)}=0\Leftrightarrow f(x)=a$ и надо выяснить, при каких a оно имеет решение. При таким образом заданной функции $f(x)$ решение, конечно, найти нельзя. Поэтому прикинем эскиз графика функции $f(x)$.

Заметим, что если $x>203^2$, то все модули раскрываются со знаком плюс при x, и получается прямая с тангенсом угла наклона, равном 203.

Если $202<x<203$, то появится один «минус», у двух слагаемых с x будут противоположные знаки – они сократятся, тангенс наклона прямой станет равен 201 и т. д. До тех пор пока число «минусов» меньше числа «плюсов», т. е. до $x\in\left(102^2;103^2\right)$, тангенс угла наклона прямых положительный. Если же $x\in\left(101^2;102^2\right)$, то «минусов» уже больше, чем «плюсов», и тангенс наклона прямых становится отрицательным, т. е. в точке $x=102^2$ имеем минимум, равный $f\left(102^2\right)$ (рис. 25).

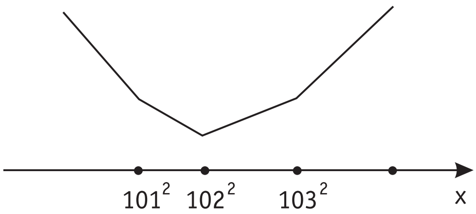

Рис. 25

Уравнение $f(x)=a$ будет иметь хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда $a \geq f\left(102^2\right)$. Найдём $f\left(102^2\right)$:

$$f\left(102^2\right)=\left(102^2-1\right)+\left(102^2-2^2\right)+$$
$$+\left(102^2-3^3\right)+\ldots+\left(102^2-101^2\right)+0+$$
$$+\left(103^2-102^2\right)+\left(104^2-102^2\right)+$$
$$+\left(105^2-102^2\right)+\ldots+\left(203^2-102^2\right)=$$
$$=\left(103^2-1\right)+\left(104^2-2^2\right)+\ldots\left(203^2-101^2\right)=$$
$$=102(104+106+108+\ldots+304)=$$
$$=102\cdot 204\cdot 101=2101608=2{,}101608\cdot 10^6.$$

Соберём все ограничения на a и получим

Ответ:

$\left[2101608;4\cdot 10^6\right]\cup\left[6\cdot 10^6;6{,}25\cdot 10^6\right]$.♦

В следующем примере успех обеспечивается удачной заменой переменных.

Пример 21. (МГУ, 2003, химфак) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\left(x+z\sqrt{2}\right)^2+\left(y+t\sqrt{2}\right)^2=25+2a\sqrt{25-a^2},\\ x^2+y^2=a^2,\\ z^2+t^2=\dfrac{25-a^2}{2}\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

♦Запишем ОДЗ: $25-a^2 \geq 0$.

Заметим, что второе уравнение задаёт окружность радиуса $|a|$ в плоскости $(x;y)$, а третье уравнение задаёт окружность радиуса $\sqrt{\dfrac{25-a^2}{2}}$ в плоскости $(z;t)$. Сделаем замену переменных, которая превратит последние два уравнения в тождества (это равносильно тому, что уравнения окружностей во втором и в третьем уравнении мы запишем в параметрической форме):

$$x=|a|\cos u,\ y=|a|\sin u,$$
$$z=\sqrt{\frac{25-a^2}{2}}\cos v,\ \ t=\sqrt{\frac{25-a^2}{2}}\sin v,$$

тогда первое уравнение примет вид:

$$\left(x+z\sqrt{2}\right)^2+\left(y+t\sqrt{2}\right)^2=25+2a\sqrt{25-a^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+25-a^2+2|a|\sqrt{2}\sqrt{\frac{25-a^2}{2}}\cos u\cos v+$$
$$+2|a|\sqrt{2}\sqrt{\frac{25-a^2}{2}}\sin u\sin v=25+2a\sqrt{25-a^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos u\cos v+\sin u\sin v=\pm 1 \Leftrightarrow \cos(u-v)=\pm 1,$$

причём «+» соответствует $a>0$, «–» соответствует $a<0$, при $a=0$ имеем тождество. Эти уравнения $\cos(u-v)=\pm 1$ всегда имеют решения, откуда следует, что решение всегда существует в ОДЗ, т. е. при $a\in[-5;5]$, например, $u=0, v=2\pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow x=a, y=0, z=\sqrt{\frac{25-a^2}{2}}, t=0 \text{ или}$$

$u=0, v=\pi$.

Ответ: $[-5;5]$.♦

(Продолжение следует: «Неравенства с параметром»)