Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ, специалист ЗФТШ при МФТИ. Окончила МГУ, имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».

Задачи с параметром

Параметр – это величина, входящая в математическую формулу и сохраняющая постоянное значение в пределах одного явления или для данной частной задачи, но при переходе к другому явлению или другой задаче меняющая свое значение.

«Толковый словарь русского языка»
под редакцией Д. Н. Ушакова

В последние годы наблюдается настоящий **«**бум**»** на задачи с параметрами: они присутствуют практически во всех вариантах ЕГЭ, во многих вузах на вступительных экзаменах, на выпускных экзаменах в матклассах.

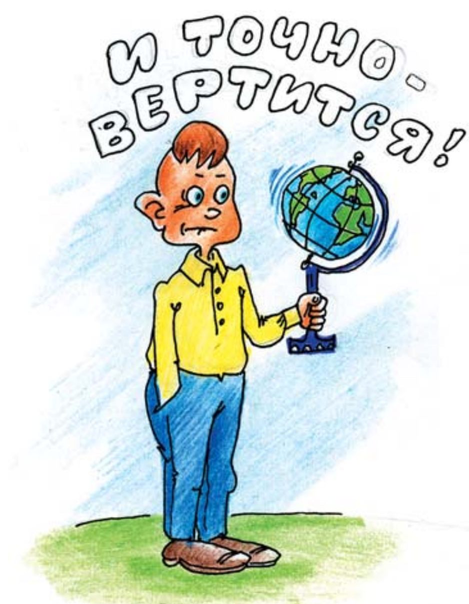
Статья написана по многочисленным просьбам учащихся 8-11 классов и учителей. Первая часть адресована всем учащимся. Поэтому она содержит, в основном, самые простые уравнения с параметром, которые сводятся к решению линейного или квадратного уравнения.

Введение

Задачи с параметрами окружают нас повсюду.

В повседневной жизни они часто решаются экспериментально или приходится пользоваться готовыми решениями, подготовленными специалистами, причем одна и та же задача разными людьми может решаться по-разному. Например, взрослый человек, прочитавший инструкцию, повернёт рычажок используемого прибора на рекомендуемый угол, а не умеющий читать любопытный ребёнок найдёт решение экспериментально. Есть так или иначе решаемые задачи, а есть такие, которые поставлены, но способы их решений до сих пор не найдены. Некоторые задачи решаются десятилетиями, для решения других создаются большие научные коллективы и т. д. По большому счёту все задачи – это задачи с параметрами.

Все школьники постоянно решают задачи такого типа, иногда даже не замечая этого.



В первую очередь это уравнение $f(x,a,b,c)=0$ (с тремя параметрами!), с которым работают с 8 класса – хорошо известное уравнение $ax^2+bx+c=0$. В этом случае учащиеся пользуются формулами, т. е. готовыми решениями. Но не для всех уравнений есть формулы! Вот с такими уравнениями труднее всего «сражаться».

Нельзя научиться решать *любые* задачи с параметрами, как нельзя научиться решать любую задачу без параметра, потому что всегда можно придумать более «хитрую» задачу. Школьник, привыкший всюду применять формулы, интуитивно боится задач с параметрами, потому что в них не сразу можно понять, какую формулу надо применить. Может быть, проще обойтись без всяких формул, а, может быть, и не существует формул, с помощью которых решается задача, и нужно выбрать какой-то другой способ решения. При решении задач с параметрами надо всегда *активно* использовать соображения, исходящие из *здравого смысла*.

Задачи с параметрами традиционно считаются наиболее трудными. Во-первых, времени на них в школьной программе не хватает. Во-вторых, это связано, видимо, с тем, что часто они являются исследовательскими, т. е. при их решении надо не просто применить те или иные формулы, а найти те значения параметра, при которых выполнено некоторое условие для корней. При этом не всегда требуется искать сами корни. В-третьих, конечно, прежде чем решать задачи с параметрами, надо научиться решать классические задачи без параметров (как

показывает опыт, прежде всего квадратные уравнения) и уметь всесторонне исследовать квадратный трёхчлен.

При решении сложных задач алгебры в результате очевидной или очень искусной замены переменных часто приходят к исследованию квадратного трёхчлена. Многие задачи решаются *по-разному* при различных возможных значениях параметра, т. е. приходится рассматривать несколько случаев.

Задачи с параметрами трудны хотя бы потому, что трудно определить, что такое параметр: в одном и том же уравнении, но в разных задачах параметром может быть то одна, то другая переменная.

Параметр a в уравнении $f(x,a)=0$ или неравенстве $f(x,a)\geq 0$ (или любом другом неравенстве для $f(x,a)$) – это *обычная, равноправная с x* переменная, которую надо найти, если по отношению к другой переменной ставятся некоторые специальные условия. Иногда, как мы увидим, в уравнении $f(x,a)=0$ переменные меняются ролями – это происходит, когда потребуется найти x, если условия накладываются на a. Заметим, что ведь даже не всегда в условии задачи a «обзывается» параметром. Параметр – понятие условное: иногда в задаче нет речи о параметрах, но при её решении бывает удобно ввести некоторую переменную, которая сыграет роль параметра (например, так можно решать некоторые уравнения или задачи о нахождении множества значений функции). Равноправие подтверждается и тем, что иногда для приведения выражения $f(x,a)$ к более простому виду приходится решать уравнение $f(x,a)=0$ относительно a.

Если речь идёт, например, об уравнении, то при конкретных (постоянных) значениях параметра мы получаем конкретное уравнение с числовыми коэффициентами – *частную задачу*. При других значениях параметра получается уравнение с другими коэффициентами – *другая частная* задача.

Многие задачи можно решать несколькими способами. Тогда каждый выбирает тот, который для него более понятен или больше нравится. Иногда способы практически одинаковы по громоздкости и сложности, но иногда попадается тот, при котором решение становится просто «красивым» – например, очень коротким по сравнению с другими.

Это особенно касается задач с параметрами.

При решении таких задач иногда удобно, а иногда просто необходимо строить графики. Это возможно в задачах, где встречаются знакомые линии: прямые, параболы, гиперболы, окружности, графики простейших логарифмических, показательных функций, и т. д. Иногда рассматриваются графики в обычной плоскости, а иногда лучше рассмотреть графики в плоскости $(x;a)$, где x – независимая переменная, а a – параметр.

Бывает, что задача решается без всяких графиков, но более громоздко. Кроме того, эскизы графиков иногда помогают наглядно увидеть и «ход» решения.

Встречается большое количество задач, в которых невозможно найти всё множество решений, да нас об этом и не просят. Поэтому приходится искать способ решить поставленную задачу, не имея в распоряжении всего множества решений данного уравнения или неравенства, например, поискать специальные свойства входящих в уравнение функций (чётность, монотонность, ограниченность множества значений и т. д.), которые позволят судить о существовании некоторого специального множества решений.

Наиболее понятный для школьников способ решения задач с параметрами состоит в том, что сначала находятся все решения, а затем отбираются те, которые удовлетворяют дополнительным условиям. В первой части будут приведены, в основном, примеры, которые могут быть решены таким способом, чтобы эта часть была понятна и полезна всем школьникам, начиная с 9 класса (и даже некоторым восьмиклассникам – всё зависит от программы по алгебре в 8 классе школы). Но это удаётся не всегда.

§1. Как начинать решать задачи с параметрами?

Не надо бояться задач с параметрами. Можно дать некоторые самые *общие рекомендации*, которые могут помочь, по крайней мере, правильно начать решать задачу с параметрами.

1. Прежде всего при решении задач с параметрами надо сделать то, что делается

при решении любого уравнения или неравенства – привести заданные уравнения или неравенства к более простому виду, если это, конечно, возможно: разложить рациональное выражение на множители; разложить тригонометрический многочлен на множители; избавиться от модулей, логарифмов, и т. д. Есть большая часть задач, в которых основная трудность состоит именно в преобразовании к более простому виду. На таких уравнениях и неравенствах мы не будем останавливаться специально – здесь нужно свое искусство. Чтобы выбрать дальнейший ход действий, необходимо ещё и ещё раз внимательно прочитать задание.

2. Если задана линейная система (может быть, и нелинейная) с параметрами, то никогда (если это возможно) не надо начинать

выражать через другие ту переменную, коэффициент при которой содержит параметр. Если это невозможно, то сначала надо рассмотреть случай, когда коэффициент равен 0.

3. Большое количество задач с параметрами так или иначе сводится к исследованию квадратного трёхчлена или многочлена более высокой степени. При решении, например, рациональных уравнений $f(x,a)=0$ и неравенств $f(x,a)>0$ надо помнить, что для разных степеней многочлена $f(x,a)$ методы решений разные. Поэтому в первую очередь рассматривают решение при тех значениях параметра, при которых обращается в ноль коэффициент при старшей степени x многочлена $f(x,a)$, понижая тем самым степень многочлена. Например, квадратное уравнение $A(a)x^2+B(a)x+C(a)=0$ при $A(a)=0$ превращается в линейное, если при этом $B(a)\neq 0$, а методы решения линейных и квадратных уравнений различны, и т. д. Мы специально рассмотрим простые примеры такого типа для того, чтобы девятиклассники привыкли обращать внимание на такие исключительные случаи, а выпускники об этом не забывали.

4. Если необходимо исследовать графически решение уравнения $f(x)=a$, *не надо* строить график функции $y=f(x)-a$. Нужно построить график функции $y=f(x)$, не содержащей параметра, т. к. его строить и исследовать легче, а затем посмотреть, в зависимости от дополнительных условий задачи, как пересекается или не пересекается начерченный график с различными прямыми $y=a$.

Так решаются, например, следующие задачи:

а) Сколько решений имеет уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=p$ (коэффициенты a, b, c – заданные числа) при различных значениях параметра p?

б) Найти все значения параметра p, при каждом из которых уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=p$ имеет три (или два, или одно) решения.

Строим сначала эскиз графика для функции $y=ax^3+bx^2+cx\equiv x\left(ax^2+bx+c\right)$ (свободный член отправляем к параметру!). Это сделать нетрудно, т. к. в этом случае всегда легко вычисляются корни и определяются, если необходимо, знаки функции в промежутках между корнями – сразу строится эскиз. Если у квадратного трёхчлена более одного корня, то придётся, если этого требует исследование, найти экстремум – школьники умеют его исследовать. При этом без свободного члена и вычисления в точках экстремума проще. Затем пересекаем график прямыми $y=p-d$ и получаем ответы на поставленные вопросы. Этот приём иногда эффективен и при исследовании квадратного трёхчлена с параметром. Так как $ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow ax^2+bx=-c$, то часто оказывается удобнее строить график функции $y(x)=x(ax+b)$, потому что можно освободиться от исследования дискриминанта.

§2. Основные типы задач для уравнений с параметрами

Чаще всего встречаются следующие три постановки задач. Для простоты сформулируем их для уравнения с одним параметром.

Задача 1. Решите уравнение $f(x,a)=0$ *при всех* a.

Что это значит?

Решить уравнение $f(x,a)=0$ при всех a – это значит, во-первых, найти все значения переменной a, при которых уравнение имеет решение, а во-вторых, найти эти решения при каждом таком a, т. е. решить уравнение относительно x, считая a «числом». В ответе обязательно указать, что при остальных значениях a задача не имеет решений.

Фактически, решить уравнение $f(x,a)=0$ при всех a значит, во-первых, найти все значения переменной a, при которых уравнение *можно* записать в виде одного или нескольких уравнений (формул) вида $x=g(a)$, а во-вторых, *найти* все функции $g(a)$.

Задача 2. Найдите все значения a, при которых уравнение $f(x,a)=0$ *имеет* решение. Иногда пишут «имеет, по крайней мере, одно решение», иногда «имеет хотя бы одно решение». В задачах этого типа не требуется находить сами решения – надо решить только вопрос об их существовании. Поэтому часто они требуют исследования, а не формального применения формул. С одной из таких задач школьники хорошо знакомы: все знают, что квадратное уравнение имеет решение, если его дискриминант неотрицателен.

Найти все значения a, при которых уравнение $f(x,a)=0$ имеет, по крайней мере, одно решение – это, фактически, значит найти все a, при которых *существует*, по крайней мере, одна функция $g(a)$, такая, что уравнение $f(x,a)=0$ можно записать в виде $x=g(a)$. При этом саму функцию $g(a)$ находить не требуется.

Задача 3. Найдите все значения a, при которых уравнение $f(x,a)=0$ имеет *ровно одно* (единственное) решение (ровно два или сколько-нибудь ещё).

С такими задачами школьники встречались: все знают, что квадратное уравнение имеет ровно одно решение, если его дискриминант равен 0, или ровно два, если его дискриминант положителен.

Найти все значения a, при которых уравнение $f(x,a)=0$ имеет ровно одно решение – это значит найти все a, при которых *существует единственная* функция $g(a)$, такая, что уравнение $f(x,a)=0$ можно записать в виде $x=g(a)$. При этом функцию $g(a)$ находить не требуется.

Рассмотрим простейшее уравнение с параметром – линейное уравнение.

Пример 1. (Московский государственный технологический университет «Станкин») Решите уравнение $2(4-a^2)x=a+2$ при всех a.

♦ Преобразуем сначала уравнение – вынесем общий множитель левой и правой частей:

$$2(4-a^2)x=a+2 \Leftrightarrow (a+2)(2x(2-a)-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+2=0,\\ x\in R;\end{cases}\\ 2x(2-a)-1=0.\end{array}\right.$$

Так как в уравнении $2x(2-a)-1=0$ коэффициент при старшей степени зависит от параметра, то отдельно рассматривается случай, когда он обращается в 0. Поэтому

$$2(2-a)x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=2,\\ -1=0;\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing;\\ \begin{cases}a\neq 2,\\ x=\dfrac{1}{2(2-a)}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ:

$a\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty): x=\dfrac{1}{2(2-a)}$;

$a=-2: x\in R$;

$a=2: \varnothing$. ♦

Пример 2. (МГУ, 1996, мехмат) Найти все a, при которых уравнение

$$\sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2}\right)=a-2\cos^2\left(2^{2x-x^2-1}\right)$$

имеет хотя бы одно решение.

♦ Заметим, что, т. к. $2^{2x-x^2-1}=\frac{1}{2}\cdot 2^{2x-x^2}$, то аргументы тригонометрических функций в уравнении

$$\sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2}\right)=a-2\cos^2\left(2^{2x-x^2-1}\right)$$

отличаются в два раза. Поэтому удобно сделать замену переменных: $2^{2x-x^2-1}=t,\ t>0$. Тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{3}\sin 2t = a-2\cos^2 t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2t = a-\left(1+\cos 2t\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}\cos 2t = \frac{a-1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a-1}{2}.$$

Отсюда следует необходимое условие: $\left|\frac{a-1}{2}\right|\le 1 \Leftrightarrow -1\le\frac{a-1}{2}\le 1 \Leftrightarrow a\in[-1;3]$.

На этом большинство школьников заканчивает решение задачи. Однако при всяком ли таком a уравнение имеет решение? Это равносильно тому, все ли значения из отрезка $[-1;1]$ принимает функция $\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$. Вспомним график функции $\sin x$ или представим себе изменение $\sin x$ на тригонометрическом круге – синус пробегает *все* значения от –1 до 1 на любом отрезке *длины* 2π. А пробегает ли аргумент нашей функции промежуток длины не менее 2π?

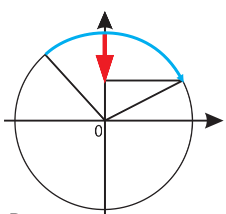


Рис. 1

Заметим, что $0<2^{2x-x^2}\equiv 2^{1-(x-1)^2}\le 2$, поэтому $\frac{\pi}{6}<2^{1-(x-1)^2}+\frac{\pi}{6}\le 2+\frac{\pi}{6}$ (рис. 1.)

Значит, $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}<\frac{a-1}{2}\le 1 \Leftrightarrow a\in(2;3]$.

Ответ: $(2;3]$. ♦

Пример 3. (Московский государственный технический университет) Найдите все значения a, при которых уравнение $\frac{(a-3)x^2+5x-2}{x-4}=0$ имеет единственное решение.

♦ Перепишем уравнение в более удобной форме:

$$\frac{(a-3)x^2+5x-2}{x-4}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(a-3)x^2+5x-2=0,\\ x\ne 4.\end{cases}$$

Так как коэффициент при старшей степени зависит от параметра, то сначала рассмотрим случай, когда он обращается в 0, и уравнение становится линейным.

Если $a=3$, то

$$(a-3)x^2+5x-2=0 \Leftrightarrow 5x-2=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}\ne 4$, т. е. $a=3$ удовлетворяет условию задачи.

Теперь займёмся квадратным уравнением.

Первый способ. Найдём прежде всего a, при которых корнем уравнения является число 4:

$$x=4:\quad (a-3)16+20-2=0 \Leftrightarrow a=\frac{15}{8}.$$

Теперь решим уравнение

$(a-3)x^2+5x-2=0$ при $a\ne\frac{15}{8}$ (ограничение $x\ne 4$ уже не пишем).

Если $a\ne 3$, то $x=\frac{-5\pm\sqrt{8a+1}}{a-3}$ при $a\ge -\frac{1}{8}$.

При $a=-\frac{1}{8}$ уравнение имеет единственный корень, не равный 4 (т. к. $a=-\frac{1}{8}\ne\frac{15}{8}$).

Если $a>-\frac{1}{8}$, то уравнение имеет два различных корня. Но при $a=\frac{15}{8}$ один из корней равен 4 и решением $\frac{(a-3)x^2+5x-2}{x-4}=0$ будет второй корень, т. е. задача имеет единственное решение. Итак, условию задачи удовлетворяют: $a=3$, $a=-\frac{1}{8}$, $a=\frac{15}{8}$.

Второй способ. Для выяснения существования a, при котором решение квадратного уравнения

$(a-3)x^2+5x-2=0 \Leftrightarrow x\left((a-3)x+5\right)=2$, отличное от 4, единственно, построим эскиз графика функции $y=x\left((a-3)x+5\right)$ (не $y=(a-3)x^2+5x-2$!) и посмотрим, при каких a он пересекается прямой $y=2$ только один раз.

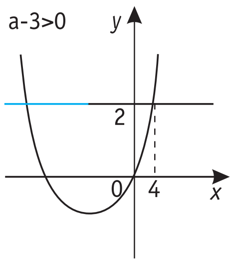


Рис. 2а

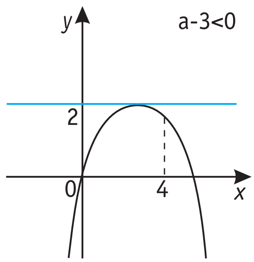


Рис. 2б

Видно, что решение единственное, если или (рис. 2а, 2б)

$$2=y(4)\Leftrightarrow 2=4(4a-7)\Leftrightarrow a=\frac{15}{8},$$

или (рис. 2б)

$$2=y\left(x_{верш}\right)=y\left(\frac{5}{2(3-a)}\right)=\frac{5}{2(3-a)}\cdot\frac{5}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=-\frac{1}{8}, \text{ при этом } x_{верш}=\frac{5}{2\left(3+\frac{1}{8}\right)}\neq 4.$$

Замечание. Если даже задача решается аналитически, например, первым способом, то рис. 2 дает возможность «увидеть» решение, в частности, уяснить роль знаменателя заданного уравнения.

Ответ: $-\frac{1}{8};\frac{15}{8};3$. ♦

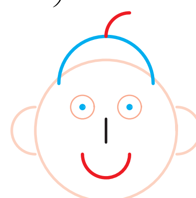
§3. Решение простейших уравнений с параметром в плоскости $(x;a)$

Рассмотрим уравнение $f(x,a)=0$. Пока в нём нет никакого параметра, левая часть – это функция с двумя переменными, которые как таковые в школе не изучаются (лишь вскользь упоминаются в 11 классе в связи с исследованием неравенств в плоскости).

Решение задачи в плоскости $(x;a)$ особенно пугает школьников. Они стараются избегать этого способа. А ведь на самом деле всё происходит именно в этой плоскости.

Пример-шутка. Найдите все значения параметра a, при которых совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l}
\left((x+1)^2+(a-1)^2-\frac{1}{4}\right)\left((x-1)^2+(a-1)^2\right)=0,\\
\left((x-1)^2+(a-1)^2\right)\left((x-1)^2+(a-1)^2-\frac{1}{4}\right)=0,\\
\left(x+3+\sqrt{1-a^2}\right)\left(x-3-\sqrt{1-a^2}\right)=0,\\
\left(x-\sqrt{\frac{1}{4}-a^2}\left(\left|a+\frac{1}{2}\right|+\left|a-\frac{1}{2}\right|-1\right)\right)=0,\\
\left(a-4-\sqrt{2x-1+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}\right)=0,\\
\left(a+1+\sqrt{1-x^2}\right)=0,\\
\left(a-2-\sqrt{4-x^2}\right)=0,\\
\left(x^2+a^2-9\right)=0
\end{array}\right.$$



имеет единственное решение.

♦ Решение задачи – «хвостик» на шапочке и точка (на рисунке).

Ответ: $[4,5]\cup\{-3\}$. ♦

Пример 4. Пять задач для уравнения $x^3-ax^2-ax+a^2=0$.

Найдите все a, при которых уравнение $x^3-ax^2-ax+a^2=0$ имеет:

1) три различных решения,
2) ровно два различных решения,
3) ровно одно решение.

Найдите все x, при которых уравнение $x^3-ax^2-ax+a^2=0$ имеет:

4) единственное решение,
5) два различных решения.

♦ Рассмотрим уравнение $x^3-ax^2-ax+a^2=0$.

Разложим левую часть на множители:

$x^3-ax^2-ax+a^2=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2(x-a)-a(x-a)\equiv(x-a)(x^2-a)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a,\\x^2=a.\end{array}\right.$$

Мы ещё не поставили задачу, никаких параметров нет, «буквы» равноправны. Нарисуем в плоскости $(x;a)$ линии, описываемые уравнением $x^3-ax^2-ax+a^2=0$, или, что то же, совокупностью уравнений $\left[\begin{array}{l}x=a,\\x^2=a,\end{array}\right.$ (рис. 3).

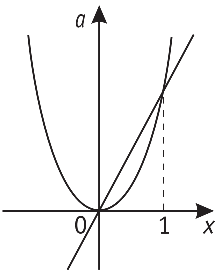


Рис. 3

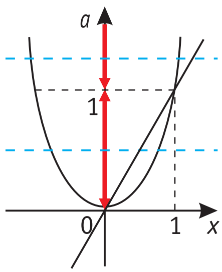


Рис. 4

Теперь решим поставленные задачи.

♦ 1) В задаче a является параметром. Проводим прямые $a=const=a_0$ и смотрим, сколько раз они пересекают кривую.

Из рис. 4 видно, что уравнение имеет ровно три различных решения, если $a\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Ответ: $(0;1)\cup(1;+\infty)$. ♦

♦ 2) Из рис. 5 видно, что уравнение имеет ровно два различных решения только в том случае, если $a=1$.

Ответ: 1. ♦

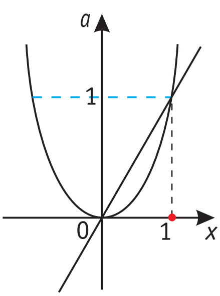


Рис. 5

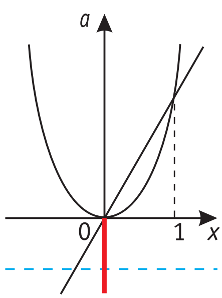


Рис. 6

♦ 3) Из рис. 6 видно, что уравнение имеет ровно одно решение, если $a\in(-\infty;0]$.

Ответ: $(-\infty;0]$. ♦

♦ 4) Роли переменных *поменялись*! Теперь искомым *решением* уравнения является a, а x играет роль параметра, т. к. при различных x имеем различные решения для a. Теперь проводим прямые $x=x_0$ и смотрим, сколько раз они пересекают кривую. Видно, что или два раза, или один.

Из рис. 7 видно, что одно пересечение лишь при $x=0$ и $x=1$.

Ответ. 0; 1. ♦

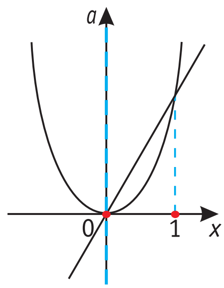


Рис. 7

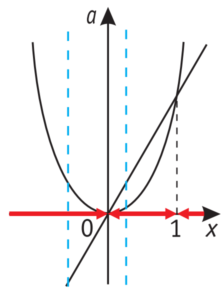


Рис. 8

♦ 5) В задаче параметром опять является x. Проводим на рис. 8 прямые, параллельные Oa и видим, что два пересечения имеют место при $x\in(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$. ♦

Из этих примеров следует, что в уравнении $x^3-ax^2-ax+a^2=0$ переменные a и x равноправны (это просто некоторая линия в плоскости $(x;a)$), а вот автор, который ставит *задачу* для этого уравнения, отводит одной из переменных роль параметра.

§4. Задача с «псевдопараметром»

То, что параметр – понятие условное, показывает следующая задача, при решении которой применяется приём введения нестандартного параметра, который логичнее назвать «псевдопараметром», т. к. он не подчиняется обычному определению.

Пример 5. (МГУ, 1994, ИСАА) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $a^2x^2+2a\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{x-4}=2\sqrt{3}-4$ имеет решение.

♦ **Первый способ.** В уравнении x присутствует в первой степени, во второй степени и под знаком корня. Алгоритмов решения таких уравнений нет.

Так как коэффициент при старшей степени зависит от параметра, то сначала рассмотрим случай, когда он обращается в 0.

Если $a=0$, то

$$a^2x^2+2a\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{x-4}=2\sqrt{3}-4 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-4}=2\sqrt{3}-4<0$ – решений нет, т. к. левая и правая части уравнения имеют разные знаки в ОДЗ.

Если $a\neq 0$, то рассмотрим уравнение *как квадратное относительно* x, считая $\sqrt{x-4}$ некоторым параметром, вернее, «псевдопараметром». Иногда этот приём приносит результаты. Уравнение имеет решение, если его дискриминант неотрицателен. Вычислим дискриминант:

$$\frac{D}{4}=a^2\left(3-2\sqrt{3}+1-\sqrt{x-4}+\left(2\sqrt{3}-4\right)\right)=$$

$$=-a^2\sqrt{x-4}\geq 0 \Leftrightarrow x=4.$$

Оказалось, что дискриминант неотрицателен только для $x=4$! При этом решение уравнения принимает вид:

$$\begin{cases} x=4, \\ x=\dfrac{a\left(1-\sqrt{3}\right)}{a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad a=\frac{1-\sqrt{3}}{4}.$$

Второй способ. При вычислении дискриминанта выяснилось, что

$2\sqrt{3}-4=-\left(\sqrt{3}-1\right)^2$. Если заметить это сразу, то оказывается, что

$$a^2x^2+2a\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{x-4}=2\sqrt{3}-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(ax+\left(\sqrt{3}-1\right)\right)^2+\sqrt{x-4}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ ax+\sqrt{3}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ 4a+\sqrt{3}-1=0. \end{cases}$$

Отсюда сразу следует ответ.

Ответ: $\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$.

Замечание. Так одно уравнение с параметром решилось двумя совершенно разными способами! ♦

Пример 6. (МФТИ, 2000). Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-8}=-ax+3a+2$ имеет единственное решение.

♦ Такие уравнения проще всего решать заменой переменных. Пусть

$$\sqrt{x-8}=t \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 0, \\ x=8+t^2, \end{cases}$$

тогда уравнение примет вид

$$\begin{cases} at^2+t+5a-2=0, \\ t\geq 0. \end{cases}$$

Теперь задача состоит в том, чтобы найти все a, при которых уравнение $at^2+t+5a-2=0$ имеет единственное *неотрицательное* решение.

Так как коэффициент при старшей степени зависит от параметра, то прежде всего рассмотрим случай, когда он обращается в 0.

Если $a=0$, то $at^2+t+5a-2=0 \Leftrightarrow t=2$. Следовательно, $a=0$ удовлетворяет условию задачи.

Теперь решаем задачу для квадратного уравнения $at^2+t+5a-2=0$, где $a\neq 0$. Эту задачу можно решать несколькими способами.

Первый способ. Уравнение $at^2+t+5a-2=0$ имеет единственное неотрицательное решение в двух случаях.

1. Дискриминант равен 0, и единственное решение неотрицательно. Если

$$D=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\dfrac{1}{10}, \\ a=\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \quad \text{то } t=-\frac{1}{2a},$$

и решение неотрицательно при $a=-\dfrac{1}{10}$.

2. Дискриминант положительный, но один корень отрицательный, а другой – нет.

По теореме Виета, $t_1t_2=\dfrac{5a-2}{a}$.

Если $D>0 \Leftrightarrow a\in\left(-\frac{1}{10};\frac{1}{2}\right)$, то корни будут разных знаков, если

$t_1t_2=\frac{5a-2}{a}<0 \Leftrightarrow a\in\left(0;\frac{2}{5}\right)$.

Если же один из корней равен 0 (пусть это будет t_1), то $at^2+t+5a-2=0 \Leftrightarrow a=\frac{2}{5}$, тогда второй корень $t_2=-\frac{1}{a}=-\frac{2}{5}$ – отрицательный. Значит, $a=\frac{2}{5}$ удовлетворяет условию задачи.

Итак, $a\in\left\{-\frac{1}{10}\right\}\cup\left[0;\frac{2}{5}\right]$.

Второй способ. Перепишем заданное уравнение по-другому:

$at^2+t+5a-2=0 \Leftrightarrow t(at+1)=2-5a$.

При $a\neq 0$ прикинем эскиз графика левой части уравнения-функции $y(t)=t(at+1)$ (обратите внимание: не $at^2+t+5a-2$!) (рис. 9а, 9б) и будем пересекать его прямыми $y=2-5a$.

Видно, что при $a>0$ (рис. 9а)) единственный неотрицательный корень уравнения $t(at+1)=2-5a$ существует только при условии $2-5a\geq 0 \Leftrightarrow a\leq\frac{2}{5}$.

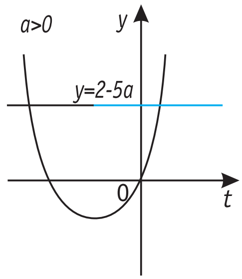


Рис. 9а

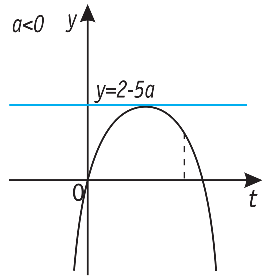


Рис. 9б

Если $a<0$ (рис. 9б), то единственный неотрицательный корень уравнения $t(at+1)=2-5a$ существует только в случае $y_{верш}=2-5a$ (прямая $y=2-5a$ не пересекает отрицательную часть параболы, т. к. $2-5a>0$), т. е.

$y_{верш}=y\left(-\frac{1}{a}\right)=2-5a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4a}=2-5a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{1}{2}, \\ a=-\frac{1}{10}, \end{array}\right.$

но у нас $a<0$, поэтому только $a=-\frac{1}{10}$ удовлетворяет условию задачи.

Итак, $a\in\left\{-\frac{1}{10}\right\}\cup\left[0;\frac{2}{5}\right]$.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{10}\right\}\cup\left[0;\frac{2}{5}\right]$. ♦

(продолжение следует)