Колесникова Софья Ильинична
старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ, специалист ЗФТШ при МФТИ. Окончила МГУ, имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор книг «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Избранные вопросы алгебры».

Иррациональные уравнения

Публикуемый материал является дополнением к заданию ЗФТШ №1 для 10 класса. В нём рассматривается два типа иррациональных уравнений: $\sqrt{f(x)}=g(x)$ и $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$.

Уравнения типа $\sqrt{f(x)}=g(x)$ рассматриваются для того, чтобы ещё раз обратить Ваше внимание на то, что при решении таких уравнений нет необходимости находить их ОДЗ, тогда как неотрицательность правой части уравнений проверять нужно обязательно.
Кроме того, рассматриваются различные способы решения простейшего вида этих уравнений: $\sqrt{ax+b}=cx+d$. Показывается аналитически и графически, откуда берутся посторонние («лишние») корни.

Для уравнений второго типа $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ показывается, что при их решении нет необходимости решать систему неравенств (ОДЗ) $\begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$, а достаточно подставить найденные корни уравнения $f(x)=g(x)$ в одно из них.

Приведённые маленькие замечания позволяют сократить время на решение таких стандартных задач, а потому дают возможность успешнее справляться с задачами на контрольных и выпускных экзаменах в школе, вступительных экзаменах в вуз, при решении заданий ЕГЭ любого уровня.
Материал рекомендуется учащимся, начиная с 9 класса.

§1. Уравнения вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$.

При решении уравнения этого вида очень многие школьники прежде всего находят ОДЗ: $f(x)\geq 0$, затем решают получившееся квадратное уравнение, проверяют, после нахождения решений, условие $f(x)\geq 0$ и успокаиваются. Ответ может оказаться неверным. Почему? Потому что могут появиться «лишние» корни. Почему? Потому что после возведения в квадрат решаются сразу два уравнения: $\sqrt{f(x)}=g(x)$ и $\sqrt{f(x)}=-g(x)$, но на разных промежутках числовой оси: $\sqrt{f(x)}=g(x)$ – там, где $g(x)\geq 0$, и $\sqrt{f(x)}=-g(x)$ – там, где $g(x)\leq 0$. «Лишние» корни – это корни второго уравнения, геометрически это пересечение графика функции $y=g(x)$ с графиком функции $y=-\sqrt{f(x)}$.

Как быть?
Дело в том, что обе части **любого** уравнения всегда можно возвести в квадрат, но при этом может получиться неравносильное уравнение, а, значит, могут появиться посторонние корни. В нашем случае получится

уравнение $f(x)=g^2(x)$, при этом очень важно, что ОДЗ уравнения выполняется **автоматически** - поэтому при таком способе решения **не надо** тратить энергию на решение неравенства $f(x)\ge 0$!

Заметим, что уравнение $\sqrt{f(x)}=g(x)$ может иметь решение для $g(x)\ge 0$, но не имеет решений, если $g(x)<0$.

Вспомним, что, если $f(x)\ge 0,\ g(x)\ge 0$, то $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)$.

Так как уравнение $\sqrt{f(x)}=g(x)$ может иметь решение лишь при условии $g(x)\ge 0$ (т. е. обе части в ОДЗ уравнения неотрицательны), то

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g^2(x),\\ g(x)\ge 0.\end{cases}\qquad (1)$$

Это очень важное условие равносильности. Во-первых, оно освобождает учащегося от необходимости исследовать, а после нахождения решений и проверять условие $f(x)\ge 0$ – неотрицательности подкоренного выражения, т. к. это условие выполняется автоматически.

Во-вторых, акцентирует внимание на проверке условия $g(x)\ge 0$ – **неотрицательности правой** части – это условие «отсекает» посторонние корни – корни уравнения $\sqrt{f(x)}=g(x)$. При этом сначала решается уравнение, а затем найденные корни подставляются в неравенство. Неравенство (за редким исключением, когда корни «плохие») заранее решать не надо.

Наше условие равносильности особенно полезно при решении **тригонометрических** уравнений, в которых нахождение ОДЗ связано с решением тригонометрических неравенств, что гораздо сложнее, чем решение тригонометрических уравнений. Проверку в тригонометрических уравнениях даже условия $g(x)\ge 0$ не всегда просто сделать.

Замечание. При решении любых уравнений, где есть хотя бы один неравносильный переход, надо делать проверку, подставляя найденные корни в исходное уравнение!

Пример 1. $\sqrt{2x^3+2x^2-3x+3}=x+1$.

△ В этом примере особенно хорошо видно, что важным при решении является условие $x+1\ge 0$, а ОДЗ корня искать не надо, да и найти трудно.

$$\sqrt{2x^3+2x^2-3x+3}=x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\ge 0,\\ 2x^3+2x^2-3x+3=x^2+2x+1.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\ge 0,\\ 2x^3+x^2-5x+2=0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\ge 0,\\ (x-1)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0.\end{cases}$$

Сумма коэффициентов уравнения $2x^3+x^2-5x+2=0$ равна 0, значит, $x=1$ является корнем. Теперь можно выделить множитель (x – 1) делением углом, при помощи схемы Горнера или группировкой, выделяя последовательно слагаемые, которые делятся на (x – 1).

$$2(x^3-1)+(x^2-1)-5(x-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(2(x^2+x+1)+x+1-5)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(2x^2+3x-2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow x=\left[\begin{array}{l}1,\\ \frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Любопытно, что $x=-2$ принадлежит ОДЗ корня (–16+8+6+3>0), но не является решением, т. к. для него не выполнено условие $x+1\ge 0$.

Ответ. 0,5;1. ▲

Пример 2. Решите уравнение

$$4\sqrt{5x-x^2-6}=x-1.$$

△ $4\sqrt{5x-x^2-6}=x-1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}16\left(5x-x^2-6\right)=(x-1)^2,\\ x-1\ge 0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}17x^2-82x+97=0,\\ x\ge 1.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{41\pm\sqrt{212}}{17}.$$

Ответ. $\frac{41\pm\sqrt{212}}{17}$. ▲

В этом примере не оказалось лишних корней.

Пример 3. Решите уравнение
$\sqrt{x^3-5x+13}=x+2$.

$\triangle$ $\sqrt{x^3-5x+13}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\ge 0, \\ x^3-5x+13=(x+2)^2. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3-x^2-9x+9=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2, \\ (x-1)(x-3)(x+3)=0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=3. \end{array}\right.$

Ответ. 1; 3. ▲

Пример 4. (МГУ, 1974, экон. ф-т) Найти все действительные решения уравнения $\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$

$\triangle$ В ОДЗ обе части уравнения неотрицательны, поэтому возведение в квадрат обеих частей приводит к равносильному уравнению:

$\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x=2x^2+2\sqrt{x^4-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^4-1}=-2x \Leftrightarrow$ (Здесь мы воспользовались условием равносильности)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0, \\ x^4-1=4x^2 \Leftrightarrow x^2=2+\sqrt{5}. \end{cases} \Leftrightarrow x=-\sqrt{2+\sqrt{5}}$

Ответ. $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$. ▲

Пример 5. (МГУ, 1999) Решите уравнение
$\sqrt{\left|x^2+14x+47\right|-1}=|x+7|-1$.

$\triangle$ Здесь удобно сначала сделать замену переменных. Пусть $t=|x+7|$, тогда уравнение $|x+7|-1=\sqrt{\left|(x+7)^2-2\right|-1}$ примет вид $\sqrt{\left|t^2-2\right|-1}=t-1$. Решим его.

$\sqrt{\left|t^2-2\right|-1}=t-1 \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 1, \\ \left|t^2-2\right|-1=t^2-2t+1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 1, \\ \left|t^2-2\right|=t^2-2t+2\equiv(t-1)^2+1>0. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 1, \\ \left[\begin{array}{l} t^2-2=t^2-2t+2, \\ t^2-2=-t^2+2t-2. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 1, \\ \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=0, \\ t=1, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=1. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |x+7|=2, \\ |x+7|=1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=-9, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ x=-8. \end{array}\right. \end{array}\right.$

Ответ. –5; –6; –8; –9. ▲

Пример 6. Решите уравнение
$\sqrt{7-\cos x-6\cos 2x}=4\sin x$

$\triangle$ $\sqrt{7-\cos x-6\cos 2x}=4\sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\ge 0, \\ 7-\cos x-6\cos 2x=16\sin^2 x. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\ge 0, \\ 4\cos^2 x-\cos x-3=0. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\ge 0, \\ \left[\cos x=\left[\begin{array}{l} 1, \\ -\frac{3}{4}. \end{array}\right.\right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=1 \Leftrightarrow x=2\pi k; \\ \begin{cases} \cos x=-\frac{3}{4}, \\ \sin x\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow x=\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+2\pi k. \end{array}\right.$

Ответ. $2\pi k$; $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. ▲

§2. Уравнение вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$.

Рассмотрим подробнее самое простое уравнение вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$ – уравнение $\sqrt{ax+b}=cx+d$, $a\ne 0$ (1).

Его можно решать различными способами. Приведём три из них.

1. Можно воспользоваться приведённым выше условием равносильности:
   $\sqrt{ax+b}=cx+d \Leftrightarrow \begin{cases} cx+d\ge 0, \\ ax+b=(cx+d)^2. \end{cases}$
2. Можно сразу решить уравнение $ax+b=(cx+d)^2$ (ОДЗ уравнения выполняется автоматически), а затем сделать проверку: подставить найденные решения в заданное уравнение $\sqrt{ax+b}=cx+d$.

Обязательна ли проверка? Да, надо отсечь решения уравнения $-\sqrt{ax+b}=cx+d$. Рассмотрим решения уравнения на графике. Начертим эскизы левой и правой частей – например, рис.1.

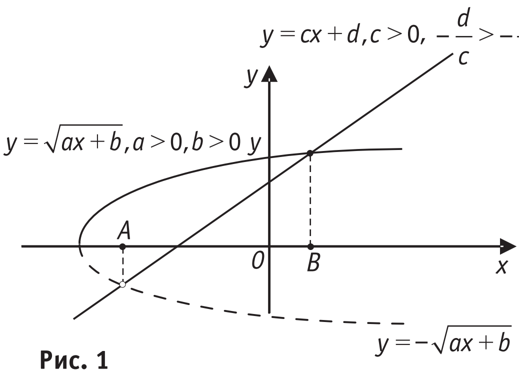


Рис. 1

В данном случае хорошо видно (рис.1), что полупарабола $y=\sqrt{ax+b}$ пересекается лишь с той частью прямой $y=cx+d$, где y принимает неотрицательные значения, а та часть прямой $y=cx+d$, где y принимает отрицательные значения, пересекается с полупараболой $y=-\sqrt{ax+b}, a>0, b>0$.

Но «лишние» корни могут и не появиться (рис.2.) – все зависит от коэффициентов в уравнении, а, значит, от взаимного расположения прямой и полупараболы.

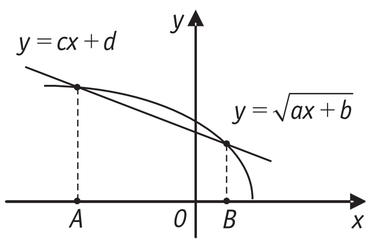


Рис. 2

3. Уравнение вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$ можно также решать с помощью замены переменных, положив $t=\sqrt{ax+b}$, $t\ge 0$.

Тогда $ax+b=t^2$, и ОДЗ уравнения выполняется **автоматически.** При этом $ax+b=t^2 \Leftrightarrow x=\frac{t^2-b}{a}$ и уравнение (1) в новых переменных примет вид

$$t=\frac{c\left(t^2-b\right)}{a}+d \Leftrightarrow ct^2-at-bc+ad=0.$$

Задача свелась к нахождению **неотрицательных** решений квадратного уравнения $ct^2-at-bc+ad=0$, что под силу любому школьнику.

Пример 7. (МФТИ, 2000) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-8}=-ax+3a+2$ имеет единственное решение.

△ Решим задачу третьим способом. Пусть $\sqrt{x-8}=t$, $t\ge 0$, тогда $x=t^2+8$ и уравнение примет вид $at^2+t+5a-2=0$. Теперь задача состоит в том, чтобы найти все a, при которых уравнение $at^2+t+5a-2=0$ имеет единственное **неотрицательное** решение. Это имеет место в следующих случаях.

1. $a=0$, $t=2$.
2. $a\ne 0, D\equiv 1-20a^2+8=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\frac{1}{10} \Rightarrow t=5, \\ a=\frac{1}{2} \Rightarrow t=-1. \end{array}\right. \Rightarrow \text{одно неотрицательное решение при } a=-\frac{1}{10}.$$

3. $a\ne 0, D>0 \Leftrightarrow a\in\left(-\frac{1}{10};\frac{1}{2}\right)$,

$$t_1t_2=\frac{5a-2}{a}\le 0 \Leftrightarrow a\in\left(0;\frac{2}{5}\right] \Rightarrow$$

имеем единственное неотрицательное решение при $a\in\left(0;\frac{2}{5}\right]$.

Итак, имеем **Ответ.** $\left\{-\frac{1}{10}\right\}\cup\left[0;\frac{2}{5}\right]$. ▲

§3. Уравнения вида $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$.

Пусть задано уравнение $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$.

Запишем ОДЗ: $\begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$, но решать неравенства (за редким исключением) не надо.

В ОДЗ обе части неотрицательны, и возведение в квадрат дает равносильное уравнение. Поэтому

$$\boxed{\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)\text{ в ОДЗ}\qquad(2)}$$

Теперь видно, что для всех решений $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковые знаки, поэтому при таком способе решения нет необходимости проверять неотрицательность обеих функций – **достаточно** проверить неотрицательность **одной** из них: выбирают ту, для которой неравенство проще проверить. Можно записать полное условие равносильности, которое включает в себя ОДЗ уравнения:

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f(x)\ge 0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ g(x)\ge 0.\end{cases}\qquad(3)\end{gathered}}$$

Выбирают ту систему, в которой неравенство проще проверить (решать его не надо!).

Пример 8. Решите уравнение
$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^4-4x^2+x+7}$.

△ Видно, что подкоренное выражение в левой части намного проще, чем в правой, поэтому запишем так полное условие равносильности:

$$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^4-4x^2+x+7}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x+1>0\Leftrightarrow x\in R,\\ x^2+x+1=x^4-4x^2+x+7\Leftrightarrow x^4-5x^2+6=0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=3,\\ x^2=2.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{3},\\ x=\pm\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Ответ. $\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{3}$. ▲

Пример 9. (МФТИ,1984) Решите уравнение
$\sqrt{6\sin x\cos 2x}=\sqrt{-7\sin 2x}$.

△Воспользуемся полным условием равносильности (3):

$$\sqrt{6\sin x\cos 2x}=\sqrt{-7\sin 2x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2x\le 0,\\ 6\sin x\cos 2x=-7\sin 2x.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2x\le 0,\\ \sin x\left(6\cos^2 x+7\cos x-3\right)=0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0;\\ \begin{cases}2\sin x\cos x\le 0,\\ \cos x=\dfrac{1}{3}.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ \begin{cases}\sin x\le 0,\\ \cos x=\dfrac{1}{3}.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi n;\\ x=-\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi n.\end{array}\right.$$

Ответ. $\pi n;\ -\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi n, n\in Z$. ▲

§4. Применение графического исследования к решению задач ЕГЭ уровня А.

Уметь строить эскизы левой и правой частей уравнения $\sqrt{ax+b}=cx+d$ очень полезно. Графическая интерпретация решения такого уравнения помогает быстро решить некоторые задачи ЕГЭ.

Пример 10. Какое утверждение

1) уравнение имеет два корня одного знака (оба корня или положительны, или оба корня отрицательны);
2) уравнение имеет только один корень, и он отрицателен;
3) уравнение имеет два корня разных знаков;
4) уравнение имеет только один корень, и он положителен;

верно по отношению к корням уравнения

а) $\sqrt{x+4}=3(x+1)$,

б) $\sqrt{7-x}=x+1$,

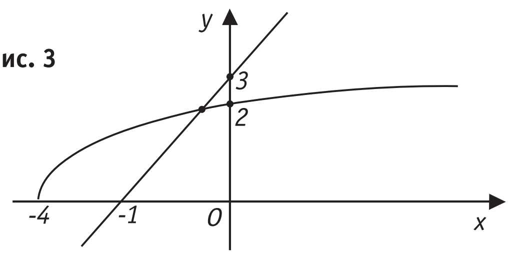
в) $3\sqrt{10-x}=12-x$,

г) $5\sqrt{7-x}=13-x$?

△ Для ответа на поставленный вопрос не обязательно решать уравнение. Часто достаточно аккуратно начертить эскизы левой и правой частей.

а) $\sqrt{x+4}=3(x+1)$.

Рис. 3



На чертеже надо отметить точки пересечений полупараболы и прямой с осями координат. Из рисунка 3 ясно, что пересечение происходит на отрицательной полуоси – это обеспечивается тем, что прямая пересекает ось 0x правее полупараболы, а ось 0y выше полупараболы.

Ответ. 2).

б) $\sqrt{7-x}=x+1$.

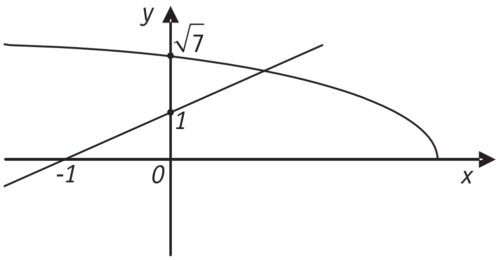


Рис. 4

Из рисунка 4 ясно, что пересечение происходит на положительной полуоси.
Это обеспечивается тем, что прямая пересекает отрицательную полуось 0x, а ось 0y прямая пересекает ниже полупараболы.

Ответ. 4).

в) $3\sqrt{10-x}=12-x$.

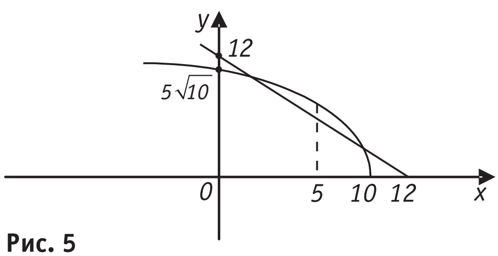


Рис. 5

Это более трудный пример, т. к. не ясно, прямая пересекается с полупараболой (а тогда дважды), касается или вовсе не имеет общих точек с полупараболой. Надо что-то сделать дополнительно, например, подставить такие значения x, при которых корни извлекаются нацело, или поискать точку ($x=5$), в которой ясно, что расположено выше – прямая или полупарабола.

Ответ. 1).

г) $5\sqrt{7-x}=13-x$.

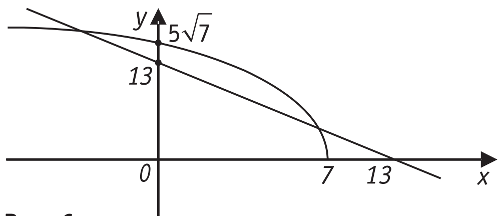


Рис. 6

Из рисунка 6 ясно, что корней два, и они разных знаков. Это обеспечивается тем, что прямая пересекает ось 0x правее, а ось 0y ниже полупараболы.

Ответ. 3). ▲