Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ, специалист ЗФТШ при МФТИ. Окончила МГУ, имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор книг «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Избранные вопросы алгебры».

Иррациональные неравенства

В школе довольно много времени уделяется построению графиков элементарных функций, но затем они почти не находят практического применения. В данной статье эти навыки пригодятся. Кроме того, последнее время почти совсем исчезли из преобразований, так называемые, сопряжённые выражения. В предлагаемом материале мы вспомним о них и увидим, как с их помощью можно упростить решения некоторых иррациональных неравенств. Приведённые ниже способы решений некоторых типов иррациональных неравенств не являются единственными способами их решения, но отличаются от других тем, что с помощью сопряжённых выражений иррациональные неравенства превращаются в рациональные, которые решаются с помощью классического метода интервалов, изучаемого всеми школьниками в 9 классе.

§ 1. Неравенства вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ и $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

Для решения неравенства обязательно придётся найти ОДЗ: $f(x) \geq 0$.

Рассмотрим разность $\sqrt{f(x)} - g(x)$. Квадратный корень, если он существует, т. е., если $x \in$ ОДЗ, принимает неотрицательные значения. Поэтому,

а) если $g(x) < 0$, то разность **положительна** в ОДЗ и неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ *выполнено* в ОДЗ, а неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ не имеет решений;

б) если же $g(x) \geq 0$, то знак разности может быть **любым**, но сумма $\sqrt{f(x)} + g(x) \geq 0$ (неотрицательна), и умножение разности на эту сумму не меняет знака разности. Этот же результат получаем, если учтём, что обе части неравенств $\sqrt{f(x)} > g(x)$ и $\sqrt{f(x)} < g(x)$ неотрицательны, и возведение в квадрат приводит к равносильным в ОДЗ неравенствам $f(x) > g^2(x)$ и $f(x) < g^2(x)$ соответственно. Отсюда следуют хорошо известные условия равносильности:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \end{array}\right. \qquad (1)$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases} \qquad (2)$$

Пример 1. (МФТИ, 2003) Решите неравенство $\sqrt{9-2\sqrt{19+81x^3}}<3+3x$.

♦ Найдём сначала ОДЗ:

$$\begin{cases}19+81x^3\ge 0,\\ 9-2\sqrt{19+81x^3}\ge 0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3\ge-\dfrac{19}{81},\\ x^3\le\dfrac{5}{4\cdot 81}.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{19}{3}};\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{12}}\right].$$

Теперь решаем неравенство в ОДЗ.

$$\sqrt{9-2\sqrt{19+81x^3}}<3+3x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x+3>0,\\ 9-2\sqrt{19+81x^3}<9+18x+9x^2.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1,\\ 2\sqrt{19+81x^3}>-9x(x+2).\end{cases}\Leftrightarrow$$

(Замечаем, что в ОДЗ $x>-1$, поэтому $x+2>0$)

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-x<0,\\ \begin{cases}1>-x\ge 0,\\ 4\left(19+81x^3\right)>18^2x^2+4\cdot 81x^3+81x^4.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>0,\\ \begin{cases}-1<x\le 0,\\ 4\left(19+81x^3\right)>18^2x^2+4\cdot 81x^3+81x^4.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in(0;+\infty),\\ \begin{cases}x\in(-1;0],\\ \left(x^2+\dfrac{38}{9}\right)\left(x^2-\dfrac{2}{9}\right)<0\Leftrightarrow x^2<\dfrac{2}{9}.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in(0,+\infty),\\ x\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{3};0\right].\end{array}\right.$$

Учтём ОДЗ и получим, что $x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{12}}\right]$.

Ответ. $x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{12}}\right]$. ♦

Теперь рассмотрим частный случай неравенств $\sqrt{f(x)}>g(x)$ и $\sqrt{f(x)}<g(x)$.

§ 2. Неравенства вида $\sqrt{ax+b}\le cx+d$ и $\sqrt{ax+b}\ge cx+d$.

Они часто встречаются в качестве первых или вторых заданий вступительных экзаменов почти во все вузы. Их можно решать по-разному. Существует, по крайней мере, три способа решения.

Первый способ (как частный случай общего).

Пример 2. (МГУ, 1999)

Решите неравенство $\dfrac{3x-2}{\sqrt{5x-2}}<1$.

♦ Найдём сначала ОДЗ: $5x-2>0\Leftrightarrow x>\dfrac{2}{5}$.

Тогда $\dfrac{3x-2}{\sqrt{5x-2}}<1\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}3x-2-\sqrt{5x-2}<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{5x-2}>3x-2$.

Рассмотрим два случая.

1. Если $3x-2<0\Leftrightarrow x<\dfrac{2}{3}$, то неравенство $\sqrt{5x-2}>3x-2$ выполнено в ОДЗ, т. е. $\dfrac{2}{5}<x<\dfrac{2}{3}$.

2. Если $3x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge\dfrac{2}{3}$, то

$$\sqrt{5x-2}>3x-2\Leftrightarrow(3x-2)^2-5x+2<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x^2-17x+6<0\Leftrightarrow\frac{2}{3}\le x<\frac{17+\sqrt{73}}{18}.$$

Объединяя оба случая, получаем, что $x\in\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{17+\sqrt{73}}{18}\right)$. **Ответ.** $\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{17+\sqrt{73}}{18}\right)$. ♦

Второй способ.

Неравенства можно решать с помощью замены переменных, положив $t=\sqrt{ax+b}, t\ge 0$. Тогда $ax+b=t^2$, и ОДЗ неравенства выполняется автоматически. При $a\ne 0$ неравенство $\sqrt{ax+b}\le cx+d$, например, в новых переменных примет вид $t \le \dfrac{c(t^2-b)}{a}+d \Leftrightarrow \dfrac{c(t^2-b)+ad-at}{a} \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{ct^2-at+ad-bc}{a} \ge 0$, и задача о нахождении решения иррационального неравенства сводится к нахождению **неотрицательных** решений квадратного неравенства

$\dfrac{ct^2-at+ad-bc}{a} \ge 0$.

Пример 3. Решите неравенство

$x+2a-\sqrt{3ax+4a^2} > 0$.

♦ Так как левая часть и подкоренное выражение линейны, то проще всего такие неравенства решаются заменой переменных: $t=\sqrt{3ax+4a^2}$, $t \ge 0 \Leftrightarrow 3ax+4a^2=t^2, t\ge 0, \Rightarrow$

$\Rightarrow 3ax = t^2-4a^2$. Видно, что x можно выразить через t, если $a \ne 0$. Поэтому придётся рассматривать два случая.

1. Если $a=0$, то

   $x+2a-\sqrt{3ax+4a^2} > 0 \Leftrightarrow x > 0.$

2. Если $a \ne 0$, то $x=\dfrac{t^2-4a^2}{3a}$, и тогда неравенство $x+2a-\sqrt{3ax+4a^2} > 0$ примет вид

$$\begin{cases} t \ge 0, \\ \dfrac{t^2-4a^2}{3a}+2a-t>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0, \\ \dfrac{t^2-3at+2a^2}{3a}>0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0, \\ a(t-a)(t-2a)>0. \end{cases}$$

Теперь видно, что решение неравенства зависит от знака a.

а) Если $a>0$, то $\begin{cases} t \ge 0, \\ a(t-a)(t-2a)>0. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0, \\ (t-a)(t-2a)>0. \end{cases} \Leftrightarrow t \in [0;a) \cup (2a;+\infty),$$

или в старых переменных

$$\left[\begin{array}{l} 0 \le \sqrt{3ax+4a^2} < a \Leftrightarrow -\dfrac{4a}{3} \le x < -a, \\ \sqrt{3ax+4a^2} > 2a \Leftrightarrow x > 0. \end{array}\right.$$

б) Если $a<0$, то $\begin{cases} t \ge 0, \\ a(t-a)(t-2a)>0. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0, \\ (t-a)(t-2a)<0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0, \\ t \in (2a;a). \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing,$$

т.к. $t \ge 0$.

$a<0: \varnothing$,

Ответ. $a=0: x \in (0;+\infty)$,

$a>0: x \in \left[-\dfrac{4a}{3};-a\right) \cup (0;+\infty)$.

Третий способ.

Быстрее всего его смогут решить те, кто «дружит» с графиками, кто быстро построит эскизы левой и правой частей неравенства. Тогда окажется, что **неравенства** $\sqrt{ax+b} \le cx+d$ или $\sqrt{ax+b} \ge cx+d$ могут быть решены с помощью единственного **уравнения** (которое придётся решать при любом способе). Останется только найти точки пересечения графиков функций, стоящих справа и слева в неравенстве. Этот приём особенно пригодится тем, кто хочет научиться хорошо и быстро решать задания ЕГЭ.

В зависимости от знаков a,b,c,d и знаков неравенства $<,>,\le,\ge$ получатся сплошные или пунктирные промежутки, такие, как на рисунках.

Решение неравенства $\sqrt{x+a^2} \le c^2-b^2x$ – сплошной промежуток на рис.1, решение неравенства $\sqrt{x+a^2} \ge c^2-b^2x$ – пунктирный промежуток на рис.1.

Решение неравенства $\sqrt{x-a^2} \le b^2x+c^2$ – объединение двух сплошных промежутков на рис.2, решение неравенства $\sqrt{x-a^2} \ge b^2x+c^2$ – пунктирный промежуток на рис.2 . и т. д.

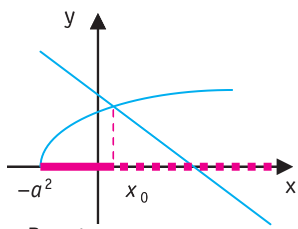


Рис.1.

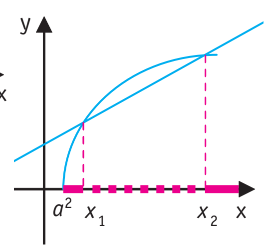


Рис.2.

Пример 4. (МГУ, 2002, психфак) Решите неравенство $\sqrt{x+2} > x-1$.

♦ Это неравенство можно решить несколькими способами.

Решим его *графически*. Построим графики функций $y=\sqrt{x+2}$, $y=x-1$, посмотрим, где первый график расположен выше второго (рис.3). Видно, что $\sqrt{x+2} > x-1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in [-2; x_0)$. Для нахождения решения останется найти x_0, т. е. решить только уравнение $\sqrt{x+2} = x-1$ (и **не надо** рассматривать случаи разных знаков для $x-1$):

$$\sqrt{x+2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0, \\ x+2 = x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

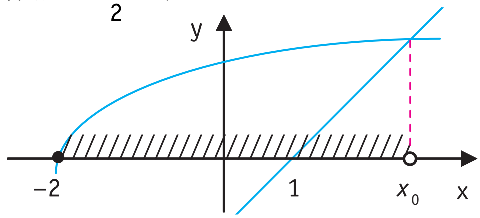


Рис.3.

Получаем решение неравенства:

$$x \in \left[-2; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right).$$ **Ответ.** $\left[-2; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$. ♦

С помощью графиков можно решать и более сложные неравенства.

Пример 5. (МГУ, 2003, ф-т фундаментальной медицины) Решите неравенство $\sqrt{2-x} - \sqrt{4+x} \le \sqrt{x+3}$.

♦Неравенство $\sqrt{2-x} - \sqrt{4+x} \le \sqrt{x+3} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{2-x} \le \sqrt{4+x} + \sqrt{x+3}$ мы тоже решим с помощью одного уравнения. Для этого начертим эскизы правой и левой частей неравенства:

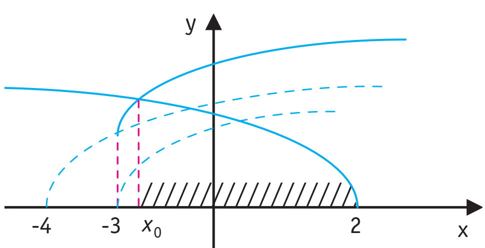


Рис.4.

Из рисунка 4 видно, что решением неравенства является отрезок $[x_0; 2]$, где x_0 – точка пересечения графиков левой и правой частей. Найдём:

$$x_0 : \sqrt{2-x} = \sqrt{4+x} + \sqrt{x+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-x = 4+x+2\sqrt{4+x}\sqrt{x+3}+x+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \ge 0, \\ -5-3x \ge 0, \\ 25+30x+9x^2 = 4x^2+28x+48. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le -\frac{5}{3}, \\ 5x^2+2x-23=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le -\frac{5}{3}, \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{116}}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1-\sqrt{116}}{5}.$$

Ответ. $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{116}}{5}; 2\right]$. ♦

Задачи такого вида могут встретиться как вспомогательные в более сложных неравенствах.

Пример 6. (МГУ, 2004, химфак) Решите неравенство $\sqrt{\log_6 x + 4} < \sqrt{\log_6 x} + \sqrt{\log_6 x - 1}$.

♦ Удобно сделать замену переменных: $\log_6 x = t$. Тогда данное неравенство примет вид: $\sqrt{t+4} < \sqrt{t} + \sqrt{t-1}$. Решим его с привлечением графиков – рис.5.

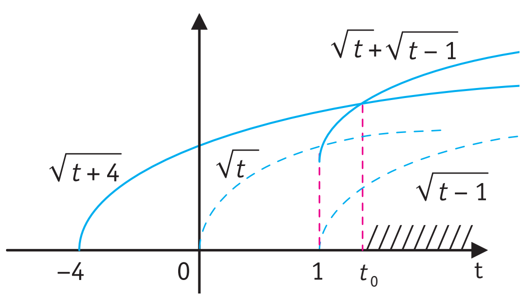


Рис.5.

Найдём точку (или точки) пересечения:

$$\sqrt{t+4} = \sqrt{t} + \sqrt{t-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 1, \\ t+4 = t+2\sqrt{t^2-t}+t-1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 1, \\ 2\sqrt{t^2 - t} = -t + 5. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 1, \\ 5 - t \ge 0, \\ 4t^2 - 4t = t^2 - 10t + 25. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le t \le 5, \\ 3t^2 + 6t - 25 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{-3 + 2\sqrt{21}}{3}.$$

Точка одна, поэтому решением неравенства будет $t > \dfrac{2\sqrt{21} - 3}{3}$. Возвращаясь к старым переменным, получим, что

$x \in \left(6^{\frac{2\sqrt{21}-3}{3}}; +\infty\right)$. **Ответ.** $\left(6^{\frac{2\sqrt{21}-3}{3}}; +\infty\right)$. ♦

Пример 7. (МГУ, 1983, биофак) Решите неравенство $8 + 6 \cdot \left|3 - \sqrt{x+5}\right| > x$.

♦ $8 + 6 \cdot \left|3 - \sqrt{x+5}\right| > x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6 \cdot \left|3 - \sqrt{x+5}\right| > x - 8$.

1. Если $x - 8 < 0$, то неравенство выполнено в ОДЗ, т. е. $x \in [-5; 8)$.

2. Если $x - 8 \ge 0$, то

$x + 5 \ge 13 \Rightarrow \sqrt{x+5} > 3 \Rightarrow \left|3 - \sqrt{x+5}\right| = \sqrt{x+5} - 3$

и $6 \cdot \left|3 - \sqrt{x+5}\right| > x - 8 \Leftrightarrow 6\sqrt{x+5} > x + 10$.

Решим неравенство графически (рис.6), x_1, x_2 находятся из уравнения

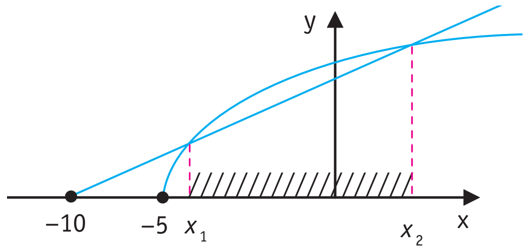


Рис.6.

$6\sqrt{x+5} = 10 + x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 10 \ge 0, \\ 36x + 180 = 100 + 20x + x^2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -10 \\ \left[\begin{array}{l} x = 20, \\ x = -4. \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$$ верно, а так как $x \ge 8$, то $x \in [8; 20)$.

Итак, $x \in [-5; 20)$. **Ответ.** $[-5; 20)$. ♦

§3. Неравенства вида $\dfrac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \le 0 \ (\ge 0)$.

Рассмотрим, для определённости, неравенство $\dfrac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \ge 0$.

Обычно при решении такого неравенства рассматривают два случая в зависимости от знака знаменателя, затем решают два неравенства с корнем.

Мы поступим **иначе**: рассмотрим два случая в зависимости от знака $g(x)$, и неравенств с корнем решать не придётся.

1. Если $g(x) < 0$, то числитель положителен в ОДЗ, и $\dfrac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \ge 0 \Leftrightarrow h(x) > 0$ в ОДЗ.

2. Если $g(x) \ge 0$, то сумма $\sqrt{f(x)} + g(x)$ неотрицательна в ОДЗ, и умножение обеих частей неравенства на это сопряжённое выражение приводит к равносильному неравенству, т. е. в этом случае

$$\frac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{f(x) - g^2(x)}{h(x)} \ge 0.$$

Для неравенства другого знака меняется лишь знак.

Объединив оба условия, получаем условие равносильности

$$\boxed{\frac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \ge 0 \ (\le 0) \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ h(x) > 0 \ (< 0), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ \dfrac{f(x) - g^2(x)}{h(x)} \ge 0 \ (\le 0). \end{cases} \end{array}\right. \qquad (3)}$$

Одновременно получаем важное **правило 1:**

> при $g(x)\ge 0$ знак разности $\sqrt{f(x)}-g(x)$ совпадает со знаком разности $f(x)-g^2(x)$ в ОДЗ.

Пример 8. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-4x+3}-2(x+7)}{x^2-x-72}\le 0.$$

♦Найдём сначала ОДЗ:

$x^2-4x+3\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)\ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$.

Теперь рассмотрим два случая в зависимости от знака $(x+7)$.

1. $x+7<0 \Leftrightarrow x<-7$.

Тогда числитель положителен в ОДЗ и

$$\frac{\sqrt{x^2-4x+3}-2(x+7)}{x^2-x-72}\le 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow x^2-x-72<0 \Leftrightarrow (x+8)(x-9)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(-8;9)$. Учитывая ограничение, получаем, что $x\in(-8;-7)$ и $(-8;-7)\subset$ ОДЗ.

2. $x+7\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -7$. Воспользуемся правилом 1, тогда $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}-2(x+7)}{x^2-x-72}\le 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+3-4x^2-56x-196}{(x+8)(x-9)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-\dfrac{-30-\sqrt{321}}{3}\right)\left(x-\dfrac{-30+\sqrt{321}}{3}\right)}{(x+8)(x-9)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left[-7;\dfrac{-30+\sqrt{321}}{3}\right]\cup(9;+\infty)$ с учётом ограничения и ОДЗ выполнено.

Поэтому $x\in\left(-8;\dfrac{-30+\sqrt{321}}{3}\right]\cup(9;+\infty)$.

Ответ. $\left(-8;\dfrac{-30+\sqrt{321}}{3}\right]\cup(9;+\infty)$. ♦

§4. Неравенства вида $\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)}\ge 0\ (\le 0)$.

Так как в ОДЗ сумма корней $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}$ неотрицательна, то умножение обоих частей неравенства на это сопряжённое выражение приводит к равносильному неравенству, и имеет место условие равносильности

> $$\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)}\ge 0(\le 0) \Leftrightarrow \frac{f(x)-g(x)}{h(x)}\ge 0(\le 0) \quad (4)$$
> в ОДЗ.

Отсюда, в частности, следует полезное **правило 2**:

> Знак разности $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$ совпадает со знаком разности $f(x)-g(x)$ в ОДЗ.

Пример 9. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{28-3x-x^2}}{x^2-x-72}<0.$$

♦Найдём сначала ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2+5x+6\ge 0,\\ 28-3x-x^2\ge 0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+2)(x+3)\ge 0,\\ (x+7)(x-4)\le 0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\in[-7;-3]\cup[-2;4]$.

Воспользуемся условием равносильности (4).

Тогда $\dfrac{\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{28-3x-x^2}}{x^2-x-72}<0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \frac{x^2+5x+6-28+3x+x^2}{(x-9)(x+8)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+4x-11}{(x-9)(x+8)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-\left(-2-\sqrt{15}\right)\right)\left(x-\left(-2+\sqrt{15}\right)\right)}{(x-9)(x+8)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-8;-2-\sqrt{15}\right)\cup\left(-2+\sqrt{15};9\right).$$

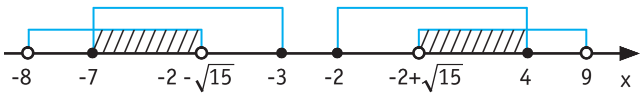


Рис.7.

Учитывая ОДЗ (рис.7), получаем, что $x\in\left[-7;-2-\sqrt{15}\right)\cup\left(-2+\sqrt{15};4\right]$.

Ответ. $\left[-7;-2-\sqrt{15}\right)\cup\left(-2+\sqrt{15};4\right]$. ♦

§5. **Неравенства** вида $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}\geq 0(или\leq 0)$.

При решении этого неравенства, как выясняется, школьники очень **часто** ошибаются. Воспользуемся определением нестрогого неравенства (для определённости будем рассматривать один знак, например, $\geq$).

По определению, $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}\geq 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}=0,\\ \dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}>0,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)=0,\\ g(x)\neq 0;\end{cases}\\ \dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}>0,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)=0,\\ g(x)\neq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)>0,\\ g(x)>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Поэтому

$$\boxed{\dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)=0,\\ g(x)\neq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)>0,\\ g(x)>0.\end{cases}\end{array}\right.\qquad(5)}$$

Типичная ошибка состоит в том, что школьники решают систему $\begin{cases}f(x)\geq 0,\\ g(x)>0,\end{cases}$ ошибочно считая, что $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0,\\ g(x)>0,\end{cases}$ теряя при этом решения уравнения $f(x)=0$, для которых должно быть выполнено неравенство $g(x)\neq 0$, а **знак** $g(x)$ может быть любым!

Пример 10. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2+2x-35}}{x^2+6x-55}\geq 0.$$

♦ Воспользуемся условием равносильности: (5)

$$\frac{\sqrt{x^2+2x-35}}{x^2+6x-55}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+6x-55\neq 0,\\ x^2+2x-35=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+6x-55>0,\\ x^2+2x-35>0.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\left[\begin{array}{l}-7,\\ 5;\end{array}\right.\\ (x-5)(x+11)\neq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}(x+11)(x-5)>0,\\ (x-5)(x+7)>0.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-7,\\ x\in(-\infty;-11)\cup(5;+\infty).\end{array}\right.$$

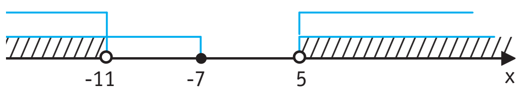


Рис.8.

Ответ. $(-\infty;-11)\cup\{-7\}\cup(5;+\infty)$.

Замечание. Школьники часто забывают записать в ответ точку $x=-7$. ♦

Все предыдущие рассуждения переносятся на неравенства вида $g(x)\sqrt{f(x)}\geq 0\ (\leq 0)$.

Пример 11. (МГУ, 1986, экон. ф-т) Решите неравенство

$$\sqrt{-25x^2+15x-2}\cdot\left(8x^2-6x+1\right)\ge 0 .$$

♦Воспользуемся условием равносильности (5) (с той разницей, что в данном случае нет ограничения $g(x)\ne 0$):

$$\sqrt{-25x^2+15x-2}\cdot\left(8x^2-6x+1\right)\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 25x^2-15x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{5},\\ x=\frac{1}{5};\end{array}\right.\\ \begin{cases} -25x^2+15x-2>0\Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right),\\ 8x^2-6x+1\ge 0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right).\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right]. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right]\cup\left\{\frac{2}{5}\right\}.$$

Ответ. $\left[\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right]\cup\left\{\frac{2}{5}\right\}$. ♦

§ 6. Решение иррациональных неравенств из вариантов МФТИ.

Пример 12. (МФТИ, 1999) Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{2x^3-22x^2+60x}}{x-6}\ge 2x-10$.

♦ Найдём сначала ОДЗ:

$$x^3-11x^2+30x=x(x-6)(x-5)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in[0;5]\cup[6;+\infty).$$

Теперь преобразуем числитель в ОДЗ:

$$\frac{\sqrt{2x^3-22x^2+60x}}{x-6}\ge 2x-10\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x(x-5)(x-6)}-2(x-5)(x-6)}{x-6}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{(x-5)(x-6)}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2(x-5)(x-6)}}{x-6}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5,\\ \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2(x-5)(x-6)}}{x-6}\ge 0.\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

(Воспользуемся правилом 2)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5,\\ \dfrac{x-2(x-5)(x-6)}{x-6}=-\dfrac{2(x-4)\left(x-\dfrac{15}{2}\right)}{x-6}\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;4]\cup\{5\}\cup\left(6;\frac{15}{2}\right].$$

Учтём ОДЗ и получим $x\in[0;4]\cup\{5\}\cup(6;7{,}5]$.

Ответ. $[0;4]\cup\{5\}\cup(6;7{,}5]$. ♦

Пример 13. (МФТИ, 2001) Решите неравенство $\dfrac{1}{2-\sqrt{x^2+3x}}\le\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+7}}$.

♦ Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2+3x\ge 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[0;+\infty),\\ x^2+4x+7>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;+\infty),\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[0;+\infty).$$

Теперь приведём всё к общему знаменателю. Затем числитель и знаменатель умножим на сопряжённые положительные выражения – соответствующие суммы. Тогда

$$\frac{1}{2-\sqrt{x^2+3x}}\le\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+7}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2+4x+7}+\sqrt{x^2+3x}\right)-2}{\left(2-\sqrt{x^2+3x}\right)\sqrt{x^2+4x+7}}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+4x+7+2\sqrt{x^2+4x+7}\sqrt{x^2+3x}+x^2+3x)-4}{4-x^2-3x}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+7x+3+2\sqrt{\left(x^2+4x+7\right)(x+3)x}}{(x-1)(x+4)}\ge 0\Leftrightarrow$$

(Заметим, что в ОДЗ

$$2x^2+7x+3=2(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)\ge 0\ )$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3,\\ (x-1)(x+4)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-4)\cup(1;+\infty).\end{array}\right.$$

Видно, что ОДЗ выполнено. Поэтому получаем
Ответ. $(-\infty;-4)\cup\{-3\}\cup(1;+\infty)$. ♦

Пример 14. (МФТИ, 2003) Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x-5}-4}<\dfrac{1}{2|x+6|-5}$

♦Найдём ОДЗ:
$x^2+4x-5\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-5]\cup[1;+\infty)$.

Проведём в ОДЗ преобразования, воспользуемся правилом (2) и тем, что знак разности модулей $(|f|-|g|)$ совпадает со знаком произведения $(f+g)(f-g)$:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4x-5}-4}<\frac{1}{2|x+6|-5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{x^2+4x-5}+1\right)-2|x+6|}{\left(\sqrt{x^2+4x-5}-4\right)\left(2|x+6|-5\right)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{x^2+4x-5}+1+2x+12\right)\left(\sqrt{x^2+4x-5}+1-2x-12\right)}{\left(x^2+4x-5-16\right)(2x+12+5)(2x+12-5)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{x^2+4x-5}+2x+13\right)\left(\sqrt{x^2+4x-5}-2x-11\right)}{\left(x^2+4x-21\right)(2x+17)(2x+7)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{x^2+4x-5}+2\left(x+\frac{13}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2+4x-5}-2\left(x+\frac{11}{2}\right)\right)}{(x+7)(x-3)\left(x+\frac{17}{2}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right)}>0.$$

Отметим для удобства исследования на числовой оси все интересующие нас «особые» точки:

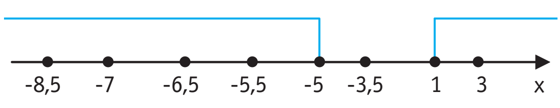


Рис. 9.

Теперь рассмотрим отдельно промежутки, на которых, по крайней мере, одна скобка, содержащая корень, сохраняет знак:

1. $x+\frac{13}{2}\le 0\Leftrightarrow x\le-\frac{13}{2}$

$\Rightarrow x<-\frac{11}{2}\Leftrightarrow 2x+11<0\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{x^2+4x-5}-(2x+11)>0,\ x-3<0,\ x+\frac{7}{2}<0$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+4x-5}+2\left(x+\frac{13}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2+4x-5}-2\left(x+\frac{11}{2}\right)\right)}{(x+7)(x-3)\left(x+\frac{17}{2}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2+4x-5}-(-2x-13)}{(x+7)\left(x+\frac{17}{2}\right)}>0\Leftrightarrow$$

(Воспользуемся правилом 1)

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+4x-5-4x^2-52x-169}{(x+7)\left(x+\frac{17}{2}\right)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x-\left(-8-\sqrt{6}\right)\right)\left(x-\left(-8+\sqrt{6}\right)\right)}{(x+7)\left(x+\frac{17}{2}\right)}<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-8-\sqrt{6};-\frac{17}{2}\right)\cup\left(-7;-8+\sqrt{6}\right).$$

При этом видно, что решение принадлежит ОДЗ.

Учитывая условие $x\le-\frac{13}{2}$ получаем, что

$$x\in\left(-8-\sqrt{6};-\frac{17}{2}\right)\cup\left(-7;-\frac{13}{2}\right].$$

2. $-\frac{13}{2}<x<-\frac{11}{2}$: тогда

$-2x-13<0,\ 2x+11<0,\ x-3<0, x+\frac{7}{2}<0,$

$x+\frac{17}{2}>0,\ x+7>0,\ \sqrt{x^2+4x-5}-(-2x-13)>0,$

$\sqrt{x^2+4x-5}-(2x+11)>0$ и неравенство выполнено в ОДЗ.

3. $x\ge-\frac{11}{2}\Leftrightarrow 2x+11\ge 0\Rightarrow 2x+13>0\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{x^2+4x-5}+(2x+13)>0,\ x+7>0, x+\frac{17}{2}>0.$

Тогда

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+4x-5}-(-2x-13)\right)\left(\sqrt{x^2+4x-5}-(2x+11)\right)}{(x+7)(x-3)\left(x+\frac{17}{2}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2+4x-5}-(2x+11)}{(x-3)\left(x+\frac{7}{2}\right)}>0\Leftrightarrow$$

(в силу правила 1)

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+4x-5-4x^2-44x-121}{(x-3)\left(x+\frac{7}{2}\right)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x-\frac{-20-\sqrt{22}}{3}\right)\left(x-\frac{-20+\sqrt{22}}{3}\right)}{(x-3)\left(x+\frac{7}{2}\right)}<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(\frac{-20-\sqrt{22}}{3};\frac{-20+\sqrt{22}}{3}\right)\cup\left(-\frac{7}{2};3\right).$$

Учитывая условие $x\ge-\frac{11}{2}$ и ОДЗ, получаем, что $x\in\left[-\frac{11}{2};\frac{-20+\sqrt{22}}{3}\right)\cup[1;3)$.

Теперь объединим три рассмотренных случая:

$$x\in\left(-8-\sqrt{6};-\frac{17}{2}\right)\cup\left(-7;\frac{-20+\sqrt{22}}{3}\right)\cup[1;3).$$

Ответ.

$\left(-8-\sqrt{6};-\frac{17}{2}\right)\cup\left(-7;\frac{-20+\sqrt{22}}{3}\right)\cup[1;3)$. ♦

Пример 15. (МФТИ, 2004) Решите неравенство $\frac{5}{6-3\sqrt{6-x-x^2}}-\frac{1}{x+1}>\frac{1}{1+|x+1|}$.

♦ Найдём сначала ОДЗ: $6-x-x^2\ge0\Leftrightarrow x\in[-3;2]$. Теперь приведём к общему знаменателю слагаемые не содержащие корень:

$$\frac{5}{6-3\sqrt{6-x-x^2}}-\frac{1}{x+1}>\frac{1}{1+|x+1|}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{5}{3\left(2-\sqrt{6-x-x^2}\right)}>\frac{2+|x+1|+x}{(x+1)(1+|x+1|)}\ (1).$$

Раскроем модуль:

1. Если $x+1>0$, то $x+2>0$ и

$$\frac{5}{3\left(2-\sqrt{6-x-x^2}\right)}>\frac{2+|x+1|+x}{(x+1)(1+|x+1|)}\Leftrightarrow$$

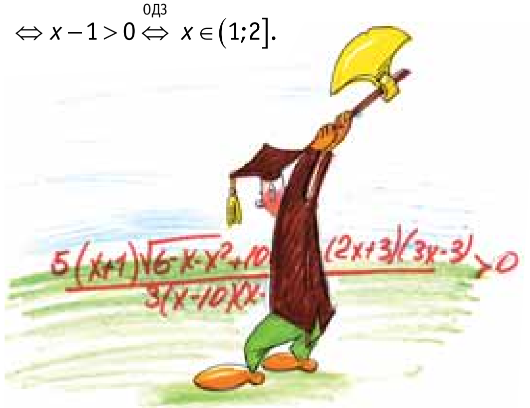
$$\Leftrightarrow\frac{5\left(2+\sqrt{6-x-x^2}\right)}{3(x-1)(x+2)}>\frac{2x+3}{(x+2)(x+1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{5\left(2+\sqrt{6-x-x^2}\right)}{3(x-1)}>\frac{2x+3}{(x+1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{5(x+1)\sqrt{6-x-x^2}+10x+10-(2x+3)(3x-3)}{3(x-1)(x+1)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{5(x+1)\sqrt{6-x-x^2}-6x^2+7x+19}{3(x-1)(x+1)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1>0\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}x\in(1;2].$$



Так как

$6x^2-7x-19<0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x\in\left(\frac{7-\sqrt{505}}{12};\frac{7+\sqrt{505}}{12}\right)\supset(-1;2]$$ и числитель положителен на $(-1;2]$.

2. Если $x+1<0$, то $\frac{5}{3\left(2-\sqrt{6-x-x^2}\right)}>\frac{-1}{x(x+1)}$ (2)

Сделаем замену переменных $x^2+x=x(x+1)=t$, $t>0$, тогда (2) примет вид $\frac{5}{3\left(2-\sqrt{6-t}\right)}>\frac{-1}{t}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5t+6-3\sqrt{6-t}}{t(t-2)}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25t^2+60t+36-54+9t}{(t-2)}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25t^2+69t-18}{(t-2)}>0 \Leftrightarrow \frac{(t+3)\left(t-\frac{6}{25}\right)}{(t-2)}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(25t-6)}{(t-2)}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25x^2+25x-6}{x^2+x-2}>0 \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{6}{5}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)}{(x+2)(x-1)}>0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x\in[-3;-2)\cup\left(-\frac{6}{5};-1\right).$$

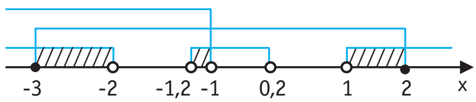


Рис.10.

Ответ. $[-3;-2)\cup\left(-\frac{6}{5};-1\right)\cup(1;2]$. ♦

Четыре неравенства из задач вступительных экзаменов в ВУЗы, опубликованных в предыдущем номере журнала

1) МАТИ им. К.Э. Циолковского. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x^2+x-2}}-\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2+4x-5}}<\frac{1}{\sqrt{6x-6}}.$$

♦ На первый взгляд, все знаменатели разные, и приводить неравенство к стандартному виду сложно. Прикинем корни знаменателей: ясно, что все они имеют корень, равный 1. Поэтому разложим квадратные трехчлены в знаменателях на линейные множители, а затем упростим неравенство:

$$\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{(x-1)(x+2)}}-\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{(x+5)(x-1)}}<\frac{1}{\sqrt{6(x-1)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{(x+2)}}-\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{(x+5)}}<\frac{1}{\sqrt{6}}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ \frac{(x+5)-(x+2)}{\sqrt{(x+2)(x+5)}}<\frac{1}{\sqrt{6}}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ \frac{3}{\sqrt{(x+2)(x+5)}}<\frac{1}{\sqrt{6}}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ 54<x^2+7x+10. \end{cases} \Leftrightarrow x\in(4;+\infty).$$

Ответ. $(4;+\infty)$. ♦

2) Московский государственный авиационный институт (технический университет). Решите неравенство

$$\sqrt{\log_2 x}+\sqrt{5+\log_{0,5} x}\le 3.$$

♦ Сделаем замену переменных: $\log_2 x=t$.

Тогда неравенство примет вид $\sqrt{t}\le 3-\sqrt{5-t}$. Решим его, прикинув эскизы графиков левой и правой частей (рис.10.)

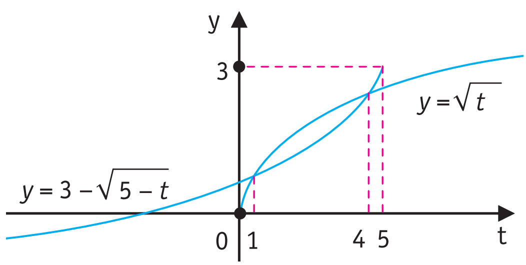


Рис.10.

Видно, что решением является объединение промежутков $[0;t_1]\cup[t_2;5]$. Найдём t_1,t_2:

$$\sqrt{t}+\sqrt{5-t}=3 \Leftrightarrow t+2\sqrt{5t-t^2}+5-t=9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{5t-t^2}=4 \Leftrightarrow 20t-4t^2=16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2-5t+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=1, \\ t_2=4. \end{array}\right.$$

Значит, $t\in[0;1]\cup[4;5]$, или в старых переменных:

$$0\le\log_2 x\le 1 \Leftrightarrow x\in[1;2],\ 4\le\log_2 x\le 5 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x\in[16;32].$$

Итак,

$\sqrt{\log_2 x}+\sqrt{5-\log_2 x}\le 3 \Leftrightarrow x\in[1;2]\cup[16;32]$.

Неравенство $\sqrt{t}\le 3-\sqrt{5-t}$ можно решить и без графиков:

$$\sqrt{t}\le 3-\sqrt{5-t} \Leftrightarrow \sqrt{t}+\sqrt{5-t}\le 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t+2\sqrt{t}\sqrt{5-t}+5-t\le 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{t}\sqrt{5-t}\le 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t\le 5, \\ 20t-4t^2\le 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t\le 5, \\ t^2-5t+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow t\in[0;1]\cup[4;5].$$

Ответ. $[1;2]\cup[16;32]$. ♦

3) Московская государственная академия приборостроения и информатики.

Решите неравенство

$$\frac{5x+1}{x+5}\sqrt{9-4x}>\sqrt{9-4x}.$$

♦ Найдём ОДЗ: $9-4x\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{9}{4}\right]$.

Приведём неравенство к стандартному виду:

$$\frac{5x+1}{x+5}\sqrt{9-4x}>\sqrt{9-4x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9-4x}\left(\frac{5x+1}{x+5}-1\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9-4x}\left(\frac{x-1}{x+5}\right)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-5)\cup\left(1;\frac{9}{4}\right).$$

Ответ. $(-\infty;-5)\cup\left(1;\frac{9}{4}\right)$. ♦

4) МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Решите неравенство $\frac{4x}{1+x^2}<1+\sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}$.

Для удобства, сделаем замену переменных:

$$\sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}=t \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0, \\ \frac{2x}{1+x^2}=t^2. \end{cases}$$

При таком способе решение ОДЗ корня выполняется автоматически. Тогда неравенство примет вид

$$\begin{cases} t\ge 0, \\ 2t^2<1+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0, \\ t\in\left(-\frac{1}{2};1\right) \end{cases} \Leftrightarrow t\in[0;1).$$

Возвращаемся к старым переменным:

$$0\le\sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}<1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ \frac{2x}{1+x^2}<1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ (x-1)^2>0 \Leftrightarrow x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in[0;1)\cup(1;+\infty).$$

Ответ. $[0;1)\cup(1;+\infty)$. ♦

ОДНАЖДЫ НА ЛЕКЦИИ

Органы чувств человека — глаза, уши — действуют по логарифмическому закону, что позволяет им работать в большем диапазоне, чем у искусственных приборов. Я открыл, что это — общее правило для человеческого восприятия: если вы хотите повысить свой уровень жизни вдвое, не боритесь за удвоение зарплаты, она испарится незаметно. Надо ее увеличить на порядок-другой. Когда у вас будет экспоненциальная зарплата — проверьте.

Ребята, я всегда любил девочек. Особенно за то, как быстро они заменяют t на x.

Я вам рекомендую ходить на лекции. Сам я тоже буду на них ходить.

Нелинейность уравнения Навье-Стокса является основной трудностью гидродинамики, не считая отсутствия денег.