Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ, специалист ЗФТШ при МФТИ. Окончила МГУ, имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».

Эффективные методы решений неравенств, содержащих множитель вида

$\left(a^{f(x)}-a^{g(x)}\right)$, $\left(\log_a f(x)-\log_a g(x)\right)$, $\left(a(x)^{f(x)}-a(x)^{g(x)}\right)$ и $\left(\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)\right)$.

Все школьники, независимо от профиля, изучают метод интервалов для рациональных функций. Учащиеся математических классов изучают также обобщенный метод интервалов для непрерывных функций. Этот метод является универсальным для решения неравенств, но при его применении необходимо, в отличие от классического метода, определять знак функции на промежутке. Однако «пробная» точка бывает «плохой», иногда при выяснении знака функции в «пробной» точке вычисления могут оказаться громоздкими, и в результате арифметической ошибки знак может оказаться неверным. А в условиях экзамена на исправление, если даже ошибка замечена, нет времени. В этой ситуации школьники, да и авторы многих пособий, ограничиваются только фразой: применим обобщенный метод интервалов (в конкретных задачах это оказывается совсем не простым делом!).

Мы предлагаем нестандартные методы решения классических показательных и логарифмических неравенств вида $a^{f(x)}-a^{g(x)}>0$ и $\log_a f(x)-\log_a g(x)>0$, неравенств, содержащих сложную экспоненту, вида $a(x)^{f(x)}>a(x)^{g(x)}$, неравенств, содержащих логарифм с переменным основанием, вида $\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)>0$, не рассматривая отдельно случаев основания, большего или меньшего единицы, а также неравенств, содержащих левые части этих неравенств в виде множителей. Эти методы позволяют многие неравенства решить быстро и красиво. Приведены условия равносильности и правила, позволяющие за один шаг свести решение, например, неравенств $h(x)\left(\log_a f(x)-\log_a g(x)\right)\geq 0$ или $h(x)\left(a^{f(x)}-a^{g(x)}\right)\geq 0$, где $f(x), g(x), h(x)$ – рациональные функции, к решению рационального неравенства $h(x)(a-1)\left(f(x)-g(x)\right)\geq 0$ классическим методом интервалов.

Все выведенные ниже условия равносильности верны для неравенств обоих знаков. Чтобы не загромождать формулы в условиях равносильности и для экономии места мы будем рассматривать неравенства только одного знака. Если условие равносильности для нестрогого неравенства имеет тот же вид, что и для строгого, мы не будем выписывать его отдельно. Если же условие равносильности для нестрогого неравенства имеет иной вид, мы выпишем его отдельно.

§1. Показательные неравенства.

Рассмотрим неравенства вида
$a^{f(x)}-a^{g(x)}>0\,(<0)$ или
$a^{f(x)}-a^{g(x)}\ge 0\,(\le 0)$,
где a **заданное положительное** число.
Замечаем, что
$a^{f(x)}-a^{g(x)}\equiv a^{g(x)}\left(a^{f(x)-g(x)}-1\right)$, поэтому
знак разности $a^{f(x)}-a^{g(x)}$ совпадает со знаком разности $a^{f(x)-g(x)}-1$.

Рассмотрим, для определённости, неравенство

$$a^{f(x)}-a^{g(x)}>0.$$

Пусть выполнено неравенство
$a^{f(x)-g(x)}-1>0$.
Тогда, если $a>1$, то $f(x)-g(x)>0$ и $(a-1)(f(x)-g(x))>0$; если $0<a<1$, то $f(x)-g(x)<0$ и $(a-1)(f(x)-g(x))>0$, т.е. если $a^{f(x)-g(x)}-1>0$, то $(a-1)(f(x)-g(x))>0$.

Пусть, наоборот, $a>0$ и выполнено неравенство $(a-1)(f(x)-g(x))>0$.
Тогда, если $a>1$, то $f(x)-g(x)>0$ и $a^{f(x)-g(x)}-1>0$; если $0<a<1$, то $f(x)-g(x)<0$ и $a^{f(x)-g(x)}-1>0$, т.е., если $(a-1)(f(x)-g(x))>0$, то $a^{f(x)-g(x)}-1>0$.
Отсюда следует, что

$$\boxed{\begin{aligned}&a^{f(x)}-a^{g(x)}>0\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0. \qquad (1)\end{aligned}}$$

Заметим, что при решении строгого неравенства a не может быть равно 1.

Теперь рассмотрим нестрогое неравенство

$$a^{f(x)}\ge a^{g(x)},$$

где $a>0$, может быть, параметр. Мы акцентируем на нём внимание, несмотря на то, что для него условие равносильности имеет тот же вид. Практика показывает, что некоторые учителя, а за ними и учащиеся, считают, что при решении показательных неравенств сразу надо писать, что $a>0, a\ne 1$. Это неверно, т. к. a^x определено для любых $a>0$, но свойства функций $y=a^x$ для $a>0, a\ne 1$ (строго возрастающие или убывающие) и $y=1^x$ (тождественная единица) различны.

По определению решения нестрогого неравенства,

$$a^{f(x)}\ge a^{g(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^{f(x)}=a^{g(x)},\\ a^{f(x)}>a^{g(x)}.\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}a^{g(x)}\left(a^{f(x)-g(x)}-1\right)=0,\\ a^{f(x)-g(x)}-1>0.\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}a=1,\\ f(x)-g(x)=0,\\ a^{f(x)-g(x)}-1>0.\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)=0,\\ (a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0.\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x))\ge 0.$$

Итак, для любого $a>0$

$$\boxed{a^{f(x)}-a^{g(x)}\ge 0\Leftrightarrow(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)\ge 0. \quad (2)}$$

Пример 1. (типа ЕГЭ (А)) Найдите область определения функции $y=\sqrt{\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{2}\right)^x}$.

♦Для решения неравенства воспользуемся условием равносильности (2) (все выведенные условия равносильности верны для неравенств обоих знаков).

$$D(y):\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{2}\right)^x\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^3\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}-1\right)(x-3)\le 0\Leftrightarrow x\ge 3.$$

Ответ. $[3;+\infty)$.♦

При конкретном a неравенство $a^{f(x)}>a^{g(x)}$, конечно, может быть решено стандартным способом, и объём выкладок тот же. Но здесь уже есть преимущество – не надо задумываться над тем, какое a (оно больше или меньше 1), надо менять знак неравенства или не надо, возрастает или убывает заданная показательная функция.

Однако отсюда следует замечательное правило, которое уже намного упростит решение сложных неравенств, содержащих в качестве множителя разность $a^{f(x)}-a^{g(x)}$.

Правило 1.

Знак разности $a^{f(x)}-a^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-g(x))$.

Используя правило 1, немедленно получаем уже новое условие равносильности:

$$h(x)\cdot\left(a^{f(x)}-a^{g(x)}\right)\geq 0\ (\leq 0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h(x)(a-1)\left(f(x)-g(x)\right)\geq 0\ (\leq 0). \qquad (3)$$

Пример 2. Решите неравенство

$$\left(x^2-3x-11\right)\left(3^{x^2}-3^{7x+4}\right)\geq 0.$$

♦Применим условие равносильности (3). А затем полученное рациональное неравенство решим классическим методом интервалов.

$$\left(x^2-3x-11\right)\left(3^{x^2}-3^{7x+4}\right)\geq 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x-11\right)(3-1)\left(x^2-7x-4\right)\geq 0\Leftrightarrow$$
$$x\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{53}}{2}\right]\cup\left[\frac{7-\sqrt{65}}{2};\frac{3+\sqrt{53}}{2}\right]\cup\left[\frac{7+\sqrt{65}}{2};+\infty\right).$$

Ответ.

$$\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{53}}{2}\right]\cup\left[\frac{7-\sqrt{65}}{2};\frac{3+\sqrt{53}}{2}\right]\cup\left[\frac{7+\sqrt{65}}{2};+\infty\right).$$ ♦

Пример 3. Решите неравенство

$$\frac{\left(3^{x^2}-3\right)\left(2^{-x}-2^3\right)\left(4^x-4^{x^2+2x-2}\right)}{\left(x^2-5x+6\right)}>0.$$

♦Воспользуемся неоднократно правилом 1: знак разности $3^{x^2}-3$ совпадает со знаком произведения $(3-1)\left(x^2-1\right)$, знак разности $2^{-x}-2^3$ совпадает со знаком произведения $(2-1)(-x-3)$, знак разности $\left(4^x-4^{x^2+2x-2}\right)$ совпадает со знаком произведения $(4-1)\left(x-x^2-2x+2\right)$, полученное затем неравенство решаем методом интервалов (рис.1).

Поэтому

$$\frac{\left(3^{x^2}-3\right)\left(2^{-x}-2^3\right)\left(4^x-4^{x^2+2x-2}\right)}{\left(x^2-5x+6\right)}>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{\left(x^2-1\right)(-x-3)\left(x-x^2-2x+2\right)}{(x-2)(x-3)}>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2(x+1)(x+3)(x+2)}{(x-2)(x-3)}>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in(-3;-2)\cup(-1;1)\cup(1;2)\cup(3;+\infty).$$

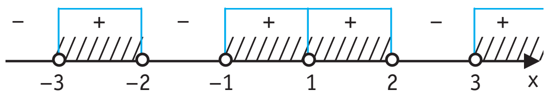

Рис.1.

Ответ. $(-3;-2)\cup(-1;1)\cup(1;2)\cup(3;+\infty)$. ♦

§2. Логарифмические неравенства.

Рассмотрим неравенство

$$\log_a f(x)>\log_a g(x),$$

где a некоторое заданное положительное число, отличное от 1, $f(x)>0,\ g(x)>0$.

Замечаем, что $\log_a f(x)-\log_a g(x)=\log\frac{f(x)}{g(x)}$ в ОДЗ, а это значит, что знак разности $\log_a f(x)-\log_a g(x)$ совпадает со знаком $\log\frac{f(x)}{g(x)}$.

Пусть выполнено неравенство $\log_a f(x)-\log_a g(x)>0$, или, что то же, $\log_a\frac{f(x)}{g(x)}>0$.

Тогда, если $a>1$, то $\frac{f(x)}{g(x)}>1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)-g(x)>0$, т.к. $g(x)>0$, и $(a-1)(f(x)-g(x))>0$;

если $0<a<1$, то $\frac{f(x)}{g(x)}<1\Leftrightarrow$

$f(x)-g(x)<0$ и по-прежнему

$(a-1)(f(x)-g(x))>0$, т. е., если $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}>0$, то $(a-1)(f(x)-g(x))>0$.

Пусть, наоборот, $a>0,\ a\neq 1,\ f(x)>0,$ $g(x)>0$ и выполнено неравенство $(a-1)(f(x)-g(x))>0$.

Тогда, если $a>1$, то

$f(x)-g(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}>1$ и $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ и $\log_a f(x)-\log_a g(x)>0$;

если $0<a<1$, то $f(x)-g(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}<1$ и $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ и $\log_a f(x)-\log_a g(x)>0$,

т.е., если $(a-1)(f(x)-g(x))>0$, то $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ в ОДЗ. Отсюда получаем, что

$$\log_a f(x)-\log_a g(x)>0 \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x))>0 \text{ в ОДЗ} \qquad (4)$$

Можно записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ

$$\log_a f(x)-\log_a g(x)>0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ (a-1)(f(x)-g(x))>0. \end{cases} \qquad (5)$$

Заметим, что, если $g(x)\equiv 1$, то получается очень полезное условие равносильности:

$$\log_a f(x)>o \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-1)>0 \text{ в ОДЗ} \quad (6)$$

Можно записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ.

$$\log_a f(x)>0(<0) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0, \\ (a-1)(f(x)-1)>0(<0). \end{cases} \qquad (7)$$

Условия равносильности верны и для обоих знаков, и для нестрогих неравенств.

Пример 4. (типа ЕГЭ (А)) Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\log_{\frac{1}{7}}\left(25-x^2\right)-1}.$$

♦ Запишем неравенство для области определения, а для его решения воспользуемся условием равносильности (5).

$$D(y): \log_{\frac{1}{7}}\left(25-x^2\right)-1\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25-x^2>0, \\ \left(\dfrac{1}{7}-1\right)\left(25-x^2-\dfrac{1}{7}\right)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-5)(x+5)<0, \\ \left(25-x^2-\dfrac{1}{7}\right)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-5;-\sqrt{\frac{174}{7}}\right]\cup\left[\sqrt{\frac{174}{7}};5\right).$$

Ответ. $\left(-5;-\sqrt{\dfrac{174}{7}}\right]\cup\left[\sqrt{\dfrac{174}{7}};5\right)$ ♦

Пример 5. (МФТИ, 2004). Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\log_8 \dfrac{x^2-2|x|}{|x|-3}\geq 0$.

♦ Перейдём, для удобства, во внешнем логарифме к основанию, большему 1, а затем несколько раз воспользуемся условиями равносильности (7) и (5):

$$\log_{\frac{1}{2}}\log_8 \frac{x^2-2|x|}{|x|-3}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\log_8 \frac{x^2-2|x|}{|x|-3}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_8 \dfrac{x^2-2|x|}{|x|-3}>0, \\ \log_8 \dfrac{x^2-2|x|}{|x|-3}\leq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-2|x|}{|x|-3}>1, \\ \dfrac{x^2-2|x|}{|x|-3}\leq 8. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-3|x|+3}{|x|-3}>0, \\ \dfrac{x^2-10|x|+24}{|x|-3}\leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{|x|-3}>0, \\ \dfrac{(|x|-4)(|x|-6)}{|x|-3}\le 0. \end{cases} \Leftrightarrow 4\le |x|\le 6.$$

Ответ. $4\le |x|\le 6$. ♦

Преимущество использования приведённых условий равносильности по сравнению с обычным способом решения простейших неравенств состоит в том, что мы не думаем о том, основание больше единицы или меньше. Кроме того, нет необходимости писать фразы о той или другой монотонности, тем более, что при их выводе мы опирались не на монотонность, а лишь на то, что логарифмы чисел, больших (меньших) 1, положительны (отрицательны). Это особенно важно при решении тестов, когда время для их решения ограничено.

Однако из условий равносильности следуют замечательные **правила**, которые уже намного упростят решение сложных неравенств, содержащих в качестве множителя $\log_a f(x)$ или разность $(\log_a f(x)-\log_a g(x))$.

Правило 2.

Знак разности $\log_a f(x)-\log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ

Правило 3.

Знак $\log_a f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-1)$ в ОДЗ

Эти правила дают возможность просто справиться с неравенствами, решение которых обычным способом потребует гораздо больше вычислений.

Пример 6. (МФТИ, 2003) Решите неравенство $\sqrt{3\lg^2 x^2+\lg^2(x+2)}>\lg x^2+\lg(x+2)$.

♦Найдём сначала ОДЗ:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x\ne 0. \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-2;0)\cup(0;+\infty).$$

Применим стандартный способ решения иррационального неравенства, т.е. рассмотрим два случая, связанные со знаком правой части неравенства. Будем работать в ОДЗ, поэтому не обязательно ставить значок ОДЗ в дальнейшем.

1. Если $\lg x^2+\lg(x+2)<0$, то неравенство выполнено в ОДЗ. Для решения неравенства воспользуемся условием равносильности (6):

$$\lg x^2+\lg(x+2)<0\Leftrightarrow \lg x^2(x+2)<0\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x^3+2x^2-1<0\Leftrightarrow (x+1)(x^2+x-1)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt5}{2}\right)\cup\left(-1;\frac{-1+\sqrt5}{2}\right),$$

2. Если $\lg x^2+\lg(x+2)\ge 0\Leftrightarrow x^2(x+2)-1\ge 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x\in\left[\frac{-1-\sqrt5}{2};-1\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt5}{2};+\infty\right)\ (**),$$

то обе части можно возвести в квадрат. Получившееся затем неравенство решаем, применяя одновременно правила 3 и 2.

$$\sqrt{3\lg^2 x^2+\lg^2(x+2)}>\lg x^2+\lg(x+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\lg^2 x^2+\lg^2(x+2)>$$
$$>\lg^2 x^2+2\lg x^2\lg(x+2)+\lg^2(x+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg^2 x^2-\lg x^2\lg(x+2)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x^2(\lg x^2-\lg(x+2))>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-x-2)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2(x-2)>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(2;+\infty).$$

Учтём условие (**), тогда

$$x\in\left[\frac{-1-\sqrt5}{2};-1\right)\cup\left[\frac{-1+\sqrt5}{2};+\infty\right).$$

Итак, собрав 1 и 2, получим: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(2;+\infty)$.

Теперь учтём ОДЗ и получим, что $x\in(-2;-1)\cup(-1;1)\cup(2;+\infty)$.

Ответ. $(-2;-1)\cup(-1;1)\cup(2;+\infty)$. ♦

Теперь можно гораздо **проще** решить неравенство вида

$$\frac{\log_a f(x)-\log_a g(x)}{h(x)}\ge 0\ (\le 0).$$

Так как, в силу правила 2 для числителя, знак разности $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ, то немедленно получаем, что

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\log_a f(x)-\log_a g(x)}{h(x)} \ge 0(\le 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(a-1)(f(x)-g(x))}{h(x)} \ge 0(\le 0) \text{ в ОДЗ.} \quad (8)\end{aligned}}$$

Полное условие равносильности для этого неравенства имеет вид:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\log_a f(x)-\log_a g(x)}{h(x)} \ge 0(\le 0) \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ \dfrac{(a-1)(f(x)-g(x))}{h(x)} \ge 0(\le 0). \end{cases} \quad (9)\end{aligned}}$$

Пример 7. (МГУ, 1987, биофак) Решите неравенство $\dfrac{3\log_{0,5} x}{2-\log_{0,5} x} \ge 2\log_{0,5} x + 1$.

♦ Приведем сначала все к общему знаменателю, затем разложим числитель на множители и применим к каждой разности правила 2 и 3:

$$\frac{3\log_{0,5} x}{2-\log_{0,5} x} \ge 2\log_{0,5} x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(\log_{0,5}^2 x - 1\right)}{2-\log_{0,5} x} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_{0,5} x - 1)(\log_{0,5} x + 1)}{\log_{0,5} x - 2} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\log_{0,5} x - \log_{0,5}\frac{1}{2}\right)\left(\log_{0,5}\frac{1}{2}x\right)}{\log_{0,5} x - \log_{0,5}\frac{1}{4}} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \dfrac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}{x-\frac{1}{4}} \le 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}{x-\frac{1}{4}} \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

(Неравенство решаем методом интервалов, рис.) $x \in \left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right] \cup [2;+\infty)$.

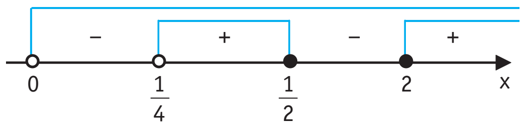

Рис.2.

Ответ. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right] \cup [2;+\infty)$. ♦

Пример 8. (Белгородский государственный технический университет, 2003)

Решите неравенство $\dfrac{\log_2(x+1)}{x-1} > 0$.

♦ Воспользуемся полным условием равносильности (9) $(g(x) \equiv 1)$:

$$\frac{\log_2(x+1)}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0, \\ \dfrac{x+1-1}{x-1} > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty). \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1;0) \cup (1;+\infty).$$

Ответ. $(-1;0) \cup (1;+\infty)$. ♦

Пример 9. (МГУ,1989, мехмат) Решите неравенство $\dfrac{x-1-\sqrt{0,5+x-x^2}}{\lg(4x+1)-\lg 5} \ge 0$.

♦ Найдём сначала ОДЗ.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}+x-x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right], \\ 4x+1 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{4};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right].$$

Теперь в ОДЗ воспользуемся правилом 5, а затем решим иррациональное неравенство:

$$\frac{x-1-\sqrt{0,5+x-x^2}}{\lg(4x+1)-\lg 5} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1-\sqrt{0,5+x-x^2}}{(4x+1)-5} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1-\sqrt{0,5+x-x^2}}{(x-1)} \ge 0 \Leftrightarrow \text{ В ОДЗ}$$

$$\left[\begin{array}{l} x-1<0, \\ \begin{cases} x-1>0, \\ (x-1)^2-\dfrac{1}{2}-x+x^2 \ge 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1, \\ \begin{cases} x>1, \\ 4x^2-6x+1 \ge 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1, \\ x \ge \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left((-\infty;1) \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{4};+\infty \right) \right) \cap \text{ОДЗ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{4};1 \right) \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{4};\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right].$$

Ответ. $\left(-\frac{1}{4};1 \right) \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{4};\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right]$. ♦

Рассмотрим, в частности, довольно громоздкое неравенство

$$\frac{f(x)\left(\log_a g_1(x)-\log_a g_2(x)\right)}{\log_b g_3(x)} > 0 \ (\ge 0),$$

где $a>0, a \ne 1, b>0, b \ne 1$, $g_i(x)>0, i=1,2,3$.

Решение этого неравенства определяется знаками множителей. Воспользуемся тем, что, по правилу 2, в ОДЗ знак разности $\log_a g_1(x)-\log_a g_2(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)\left(g_1(x)-g_2(x)\right)$, а знак $\log_b g_3(x)$, по правилу 3, совпадает в ОДЗ со знаком $(b-1)\left(g_3(x)-1\right)$. Поэтому

$$\frac{f(x)\left(\log_a g_1(x)-\log_a g_2(x)\right)}{\log_b g_3(x)} > 0 \ (\ge 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)(a-1)\left(g_1(x)-g_2(x)\right)}{(b-1)\left(g_3(x)-1\right)} > 0 (\ge 0) \text{ в ОДЗ.} \quad (10)$$

Замечательно то, что мы освобождаемся от **всех логарифмов** за **ОДИН ШАГ**. Этими методами можно просто решать задачи серии С при выполнении ЕГЭ.

Пример 10. (МГУ, 1997, ф-т почв.)
Решите неравенство

$$\frac{(\log_2 3)^x-(\log_2 3)^2}{(\log_2 3)^{-x}-x\left(\log_{2^x} 3\right)} > 0.$$

♦ ОДЗ: $2^x \ne 1 \Leftrightarrow x \ne 0$.

Так как $\dfrac{(\log_2 3)^x-(\log_2 3)^2}{(\log_2 3)^{-x}-x\left(\log_{2^x} 3\right)} =$

$= \dfrac{(\log_2 3)^x-(\log_2 3)^2}{(\log_2 3)^{-x}-(\log_2 3)}$, то, по правилу 2,

$$\frac{(\log_2 3)^x-(\log_2 3)^2}{(\log_2 3)^{-x}-x\left(\log_{2^x} 3\right)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_2 3)^x-(\log_2 3)^2}{(\log_2 3)^{-x}-(\log_2 3)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_2 3-1)(x-2)}{(\log_2 3-1)(-x-1)} > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x+1} < 0 \Leftrightarrow x \in (-1;2)$. Учтём ОДЗ и получим, что $x \in (-1;0) \cup (0;2)$.

Ответ. $(-1;0) \cup (0;2)$. ♦

Пример 11. (МГУ,1998, мехмат)
Решите неравенство

$$\frac{1+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4}+\log_{\frac{1}{2}}(13-x)}{\left|x^2+2x-3\right|-\left|2x^2-10x+8\right|} \ge 0.$$

♦ Сначала приведём логарифмы к основанию 2, а затем воспользуемся полным условием равносильности (9)

$$\frac{1+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4}+\log_{\frac{1}{2}}(13-x)}{\left|x^2+2x-3\right|-\left|2x^2-10x+8\right|} \equiv$$

$$\equiv \frac{1+2\log_2\sqrt{x+4}-\log_2(13-x)}{\left|x^2+2x-3\right|-\left|2x^2-10x+8\right|} \equiv$$

$$\equiv \frac{\log_2 2(x+4)-\log_2(13-x)}{\left|x^2+2x-3\right|-\left|2x^2-10x+8\right|} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x+4>0,\\ 13-x>0,\\ \dfrac{2x+8-13+x}{\left(x^2+2x-3+2x^2-10x+8\right)\left(x^2+2x-3-2x^2+10x-8\right)}\geq 0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x+4>0,\\ 13-x>0,\\ \dfrac{x-\frac{5}{3}}{(x-1)^2\left(x-\frac{5}{3}\right)(x-11)}\leq 0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\in(-4;1)\cup\left(1;\dfrac{5}{3}\right)\left(\dfrac{5}{3};13\right),\\ x-11<0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$x\in(-4;1)\cup\left(1;\dfrac{5}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5}{3};11\right)$ (рис.3).

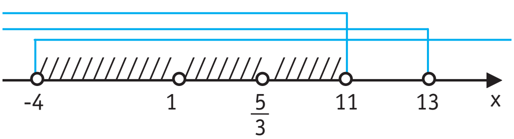

Рис.3.

Ответ. $(-4;1)\cup\left(1;\dfrac{5}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5}{3};11\right)$. ◆

Используя приведённые правила, можно решать довольно сложные неравенства, содержащие в качестве множителей и разности логарифмов, и разности показательных функций.

Пример 12. Решите неравенство

$$\frac{(4x+25)(4x+27)\log_{3-\sqrt{5}}\left(77-4x-x^2\right)}{\left(2^{x^2-2x}-2^{x+4}\right)}\geq 0.$$

◆Применим к неравенству правила и:

$$\frac{(4x+25)(4x+27)\log_{3-\sqrt{5}}\left(77-4x-x^2\right)}{\left(2^{x^2-2x}-2^{x+4}\right)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 77-4x-x^2>0,\\ \dfrac{\left(x+\frac{25}{4}\right)\left(x+\frac{27}{4}\right)\left(3-\sqrt{5}-1\right)\left(77-4x-x^2-1\right)}{\left(x^2-2x-x-4\right)}\geq 0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\in(-11;7),\\ \dfrac{\left(x+\frac{25}{4}\right)\left(x+\frac{27}{4}\right)\left(x-\left(-2-4\sqrt{5}\right)\right)\left(x-\left(-2+4\sqrt{5}\right)\right)}{(x+1)(x-4)}\geq 0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

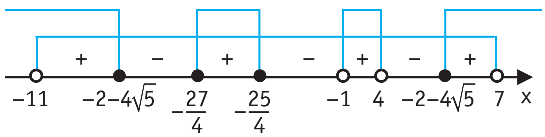

Рис.4.

Ответ.

$\left(-11;-2-4\sqrt{5}\right]\cup\left[-\dfrac{27}{4};-\dfrac{25}{4}\right]\cup(-1;4)\cup\left[-2+4\sqrt{5};7\right)$.◆

Пример 13. (МФТИ, 1992)

Решите неравенство $x\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{5}{2}-2^{\frac{1}{x}}\right)\right)>1$.

◆Найдём сначала ОДЗ:

$$\frac{5}{2}-2^{\frac{1}{x}}>0\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x}}<\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{x}<\log_2\frac{5}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-\log_{\frac{5}{2}}2}{x\log_{\frac{5}{2}}2}>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup\left(\log_{\frac{5}{2}}2;+\infty\right).$$

Преобразуем неравенство, заменив единицу частным, а затем применим последовательно правило, а потом правило.

$$x\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{2}-2^{\frac{1}{x}}\right)>1\Leftrightarrow x\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{2}-2^{\frac{1}{x}}\right)>\frac{x}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{2}-2^{\frac{1}{x}}\right)>x\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow$$

$$x\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{2}-2^{\frac{1}{x}}\right)-\log_{\frac{1}{2}}2^{-\frac{1}{x}}\right)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-2^{\frac{1}{x}}-2^{-\frac{1}{x}}\right)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(2^{\frac{1}{x}}-2\right)\left(2^{\frac{1}{x}}-2^{-1}\right)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}+1\right)=-\frac{x(x-1)(x+1)}{x^2}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$$

Учтём теперь ОДЗ

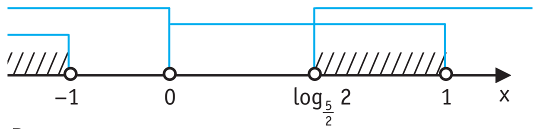

Рис.5.

и получаем, что $x\in(-\infty;-1)\cup\left(\log_{\frac{5}{2}}2;1\right)$.

Ответ. $(-\infty;-1)\cup\left(\log_{\frac{5}{2}}2;1\right)$. ♦

Литература.

Колесникова С. И. Математика. Интенсивный курс подготовки к Единому государственному экзамену. М.: Айрис – пресс, 2004.

Колесникова С. И. Математика. Решение сложных задач Единого государственного экзамена. М.: Айрис – пресс, 2005.

(продолжение следует)